第23卷第2期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 2
2003年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2003

Liénard 方程至多存在 n 个极限环的充分条件*

陈秀东， 陈 勇
（大连理工大学应用数学系，辽宁 大连 116024）

摘 要：在文[7,8]中对 Liénard 方程提出状态函数的概念. 本文我们将极限环存在性的研究转化为微积分中连续函数（状态函数）零点的研究，给出了 Lienard 方程至多存在 n 个极限环的充分条件. 最后证明了 A. Lins, W. de Melo, C. C. Pugh 的猜想[1].

关键词：极限环；状态函数.
分类号：AMS(2000) 34C25, 34A12, 34K15/CLC number: O175.12
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)02-0333-06

1 引 言

关于 Liénard 方程存在多个极限环的问题，Г. С. Рычков[9,10]，张芷芬[2,4,5]，张芷芬、何启敏[6]，D. A. Neumann, L. D. Sabbagh[11]，黄克成[12,13]，黄启昌、杨思訒[14]和李继彬[15]等作了很好的工作.

讨论 Liénard 方程

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

或其等价方程组

$$\dot{x} = y - F(x), \dot{y} = -g(x), \qquad (*)'$$

其中 $F(x) = \int_0^x f(\xi)\mathrm{d}\xi$.

总假设 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，且存在数

$$0 < r_+ \leqslant +\infty, -\infty \leqslant r_- < 0,$$

使

$$xg(x) > 0, \text{当} r_- < x < 0, 0 < x < r_+.$$

记 $G(x) = \int_0^x g(\xi)\mathrm{d}\xi$. 作 Филиппов 变换[2,3]，将 $(*)'$ 在 (x,y) 右条形区域 $0 \leqslant x < r_+$ 上的轨线变为 (z,y) 右条形域或右半平面区域 $0 \leqslant z < G_1 = G(r_1) \leqslant +\infty$ 上的轨线，其方程为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = F_1(z) - y, \text{当} 0 \leqslant z < G_1; \qquad (1)$$

* 收稿日期：2001-02-07
作者简介：陈秀东（1937- ），男，教授.

将$(*)'$在(x,y)左条形区域$r_- < x \leqslant 0$上的轨线变为(z,y)右条形域或右半平面区域$0 \leqslant z < G_2 = G(r_-) \leqslant +\infty$上的轨线，其方程为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = F_2(z) - y, \text{当 } 0 \leqslant z < G_2. \tag{2}$$

与文[7,8]一样，设$F(z)$在$[0,G](0<G\leqslant+\infty)$上连续可微，称方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = F(z) - y, \text{当 } 0 \leqslant z < G \tag{3}$$

的过特征曲线(函数)$y=F(z)$上点$(z_0,F(z_0))$的轨线为(3)或$F(z)$的特征轨线(简称为$F(z)$的z_0特征轨线)；z_0特征轨线与y轴两个交点的上方点(y轴坐标大的)称为z_0特征轨线的上特征点，下方点(y轴坐标小的)称为下特征点(简称为z_0上(下)特征点)．由文[7,8]有

引理 1 设$F(z)$在$[0,G)$上连续可微，则对任一$z_0 \in (0,G)$，$F(z)$的z_0上特征点$B(0,y_B)$和z_0下特征点$A(0,y_A)$皆存在，或者$y_B > F(0), y_A \leqslant F(0)$，或者$y_B \geqslant F(0), y_A < F(0)$；且当$z_0 \to G$时，或者$y_B$单调增加，$y_A$不增(若$y_A < F(0)$，$y_A$单调减少)，或者$y_B$不减(若$y_B > F(0)$，$y_B$单调增加)，$y_A$单调减少．

当$F(x)$为奇函数时，在文[7]中我们定义了三个状态函数：

$$\Phi_1(z_0) = \int_0^{z_0} F'(z)(\bar{y} - y)\mathrm{d}z; \tag{4}$$

$$\Phi_2(z_0) = \int_0^{z_0} F(z)\left(\frac{1}{F(z)-y} + \frac{1}{\bar{y}-F(z)}\right)\mathrm{d}z; \tag{5}$$

$$\Phi_3(z_0) = \int_0^{z_0} F'(z)\left(\frac{1}{F(z)-y} + \frac{1}{\bar{y}-F(z)}\right)\mathrm{d}z. \tag{6}$$

不妨设$g(x)=x$[2,3]，此时方程组$(*)'$可写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y - F(x), \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x. \tag{$*$}$$

对$(*)$作 Филиппов 变换[2]，则$(*)$变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = F_i(z) - y, \quad i = 1,2, \tag{7}$$

其中$F_1(z)=F(\sqrt{2z}), F_2(z)=F(-\sqrt{2z})$.

如果在$(*)$中的$F(x)$为$2n+1$次多项式，即

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i x^i, N = 2n+1, \tag{8}$$

在$F_1(z)=-F_2(z)$的条件下，作 Филиппов 变换，可得

$$F(z) = F_1(z) = \sqrt{2z}\sum_{i=0}^{n} 2^i a_{2i+1} z^i,$$

$$F'(z) = \frac{1}{\sqrt{2z}}\sum_{i=0}^{n} 2^i (2i+1) a_{2i+1} z^i. \tag{9}$$

有趣的是：$F(z), F'(z)$和$F''(z)$均至多存在n个正的零点．

这时，考虑$\Phi_1(z_0) = \int_0^{z_0} F'(z)(\bar{y}-y)\mathrm{d}z$，积分中$(\bar{y}-y)$关于$z_0$是严格单调减少的非负函数，而$F'(z)$至多有$n$个正零点．从这一事实，深入研究$\Phi_1(z_0)$的性质，对解答 A. Lins, W. de

Melo, C. C. Pugh 的猜想会有很大帮助.

定理 1 如果满足:

i) $F(0)=0$; $F'(x)\not\equiv$ 常数, $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, δ 是某一个小正数;

ii) 当 $z_0\in(0,+\infty)$ 时, $\int_0^{z_0}m(z)F(\sqrt{2z})\mathrm{d}z$ 至多有 n 个零点, 其中 $m(z)$ 保号;

iii) $F(x)=-F(-x)$ ($F(x)$ 是奇函数), 则方程组 (*) 至多有 n 个极限环.

证明 写 $F_1(z)=F(z)$, 给出能量函数 $\lambda(z,y)=\dfrac{(y-F(z))^2}{2}+z$ (见图 1), 如文[17]

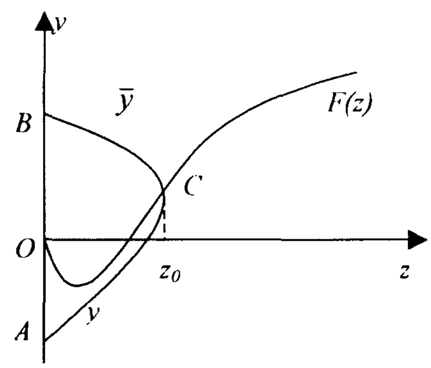

图 1

证明有

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}z}=(y-F(z))\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}-F'(z)\right)+1$$
$$=(y-F(z))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}-F'(z)(y-F(z))+1$$
$$=(y-F(z))/(F(z)-y)-F'(z)(y-F(z))+1$$
$$=-F'(z)(y-F(z)). \tag{10}$$

由

$$\int_{\widehat{ACB}}\mathrm{d}\lambda=\int_{\widehat{AC}}\mathrm{d}\lambda+\int_{\widehat{CB}}\mathrm{d}\lambda$$
$$=\{[(F(z_0)-F(z_0))^2/2+z_0]-[(y_A-0)^2/2+0]\}+\{[(y_B-0)^2/2+0]$$
$$-[(F(z_0)-F(z_0))^2/2+z_0]\}$$
$$=(y_B^2-y_A^2)/2 \tag{11}$$

和

$$\int_{\widehat{AC}}\mathrm{d}\lambda+\int_{\widehat{CB}}\mathrm{d}\lambda=\int_0^{z_0}-F'(z)(y-F(z))\mathrm{d}z-\int_{z_0}^{0}F'(z)(\bar{y}-F(z))\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{z_0}F'(z)(\bar{y}-y)\mathrm{d}z, \tag{12}$$

于是有

$$\Phi_1(z_0)=\int_{\widehat{ACB}}\mathrm{d}\lambda=\int_0^{z_0}F'(z)(\bar{y}-y)\mathrm{d}z=(y_B^2-y_A^2)/2. \tag{13}$$

由式(13)和定理 1 的条件 ii)和 iii)及定积分中值定理有

$$\Phi_1(z_0)=\frac{1}{m(\xi)}(\bar{y}(\xi)-y(\xi))\int_0^{z_0}m(z)F(\sqrt{2z})\mathrm{d}z,$$

其中$\dfrac{\bar{y}(z)-y(z)}{m(z)}$保号(>0),$\xi\in(0,z_0)$.(*)的极限环必为(*)的闭轨,由条件 ii)和 iii)(参见文献[7]),故(*)的极限环至多有 n 个. □

由式(13)可知.

推论 1.1 如果满足定理 1 的条件(i),(iii),则(*)的极限环必与 y 轴交于两点 A,B,且

$$|y_A|=|y_B|\neq 0.$$

推论 1.2 如果 $F(x)$是奇函数,A. Lins, W. de Melo, C. C. Pugh 的猜想成立.

系统(*)的极限环必为闭轨,反之闭轨却不一定是极限环.对(*)作 Филиппов 变换,其本质上可以对(*)的左,右条形域或半平面的轨线运用微分方程的比较定理,研究某些非线性函数的零点,可能比研究其本身的非线性函数要容易些.一个新的想法或新概念的提出有可能使某些问题得到简化.根据文[7,8]、比较定理和解的唯一性定理,不难有:

引理 2[3] 如果对(*)作 Филиппов 变换和 $F_1(z)=F(\sqrt{2z})\leqslant F_2(z)=F(-\sqrt{2z})$ 或 $F_1(z)\geqslant F_2(z)$,则(*)没有极限环.(此即为[3]的定理 5.4 的结论)

定理 2 如果系统(*)满足 i)定理 1 的条件 i);

ii) 积分$\int_0^{z_0}m(z)(F(\sqrt{2z})-F(-\sqrt{2z}))\mathrm{d}z$在$(0,+\infty)$上至多有$n$个正零点,其中$m(z)$保号;

iii) $F(\sqrt{2z})-F(-\sqrt{2z})$ 的 n 阶导数在$(0,+\infty)$上至多有 n 个正零点.

则(*)至多有 n 个极限环.

证明 对于一般非线性函数$F(x)$而言,$F(x)-F(-x)$是奇函数,作 Филиппов 变换后,显然由定理 1 系统

$$\dot{x}=y-(F(x)-F(-x)),\dot{y}=-x \tag{*}''$$

至多有 n 个极限环,由于 $F(x)$ 是非线性函数,不能推出系统(*)至多有 n 个极限环.不妨设 $F_1(z)-F_2(z)=F(\sqrt{2z})-F(-\sqrt{2z})$ 的正零点为 $z_i(0<z_1\leqslant z_2\leqslant\cdots\leqslant z_i,i=1,2,\cdots,n)$(包含重正零点,或 $F_1(z)-F_2(z)$ 不变号的正零点).由引理 2,在$(0,z_1]$上(*)无极限环,再由引理 2,文[7,8]和条件(iii)及定积分中值定理,可知(*)在$(z_1,+\infty)$上(*)至多有n个零点,于是(*)在$(0,+\infty)$至多有 n 个极限环. □

将来要研究的问题,我们将证明什么条件下是闭轨,什么条件下是极限环.

由定理 1 中的证明类似得到

推论 2.1 A. Lins, W. de Melo, C. C. Pugh 猜想成立.

在这里,根据

$$F(x)=\sum_1^N a_ix^i\quad(N=2n+1,2n+2) \tag{14}$$

有

$$F_1(z) - F_2(z) = F(\sqrt{2z}) - F(-\sqrt{2z}) = 2\sqrt{2z}\sum_0^n 2^i a_{2i+1} z^i$$

$$F_1'(z) - F_2'(z) = \frac{2}{\sqrt{2z}}\sum_0^n 2^i (2i+1) a_{2i+1} z^i$$

取 $m(z) = \sqrt{2z}$，由上式或(9)式可推出定理 2 条件 iii)，就得到推论 2.2.

参考文献:

[1] LINS A, DE MEDO W, PUGH C C. *On Lineard equation* [J]. Lect. Notes in Math., 1977, **597**: 335—357.

[2] 张芷芬，丁同仁，黄文灶，等. 微分方程定性理论 [M]. 北京：科学出版社，1985.
ZHANG Zhi-fen, DING Tong-ren, HUANG Wen-zao, et al. *Qualitative Theory of Differential Equation* [M]. Beijing: Scientific Publishers, 1985. (in Chinese)

[3] 叶彦谦. 多项式微分系统定性理论 [M]. 上海：上海科技出版社，1995.
YE Yan-qian. *Qualitative Theory of Polynomial Differential System* [M]. Shanghai: Shanghai Scientific Technical Publishers, 1995. (in Chinese)

[4] 张芷芬. 关于方程 $\ddot{x} + \mu\sin\dot{x} + x = 0$ 在 $|x| \leqslant (n+1)\pi$ 上恰好存在 n 个极限环的定理 [J]. 中国科学，1980，**10**: 941—948.
ZHANG Zhi-fen. *A theorem of* $\ddot{x}+\mu\sin\dot{x}+x=0$ *with* $|x|\leqslant(n+1)\pi$ *existing exact n limit cycles* [J]. Science in China, 1980, **10**: 941—948. (in Chinese)

[5] 张芷芬. 关于 Lienard 方程极限环的唯二性问题 [D]. 北京大学常微论文集，1980.
ZHANG Zhi-fen. *The problem of Lienard Equation Existing Only Two Limit Cycles* [D]. Proceeding of ODE, Peking University, 1980. (in Chinese)

[6] 张芷芬，何启敏. 关于 Liénard 方程至多存在 n 个极限环的一个充分条件 [C]. 东北师范大学讲学讲义，1980.
ZHANG Zhi-fen, HE Qi-min. *A sufficient condition for Liénard's equation existing at most n limit cycles* [C]. Northeast Normal University. (in Chinese)

[7] CHEN Xiu-dong. *Zero point of state function and limit cycle* [J]. Ann. Differential Equations, 1985, **1**(2): 151—160.

[8] CHEN Xiu-dong. *Properties of characteristic functions and existence of limit cycles of Liénard's equation* [J]. Chin. Ann. of Math., Ser. B, 1983, **4**(2): 207—215.

[9] Г. С. Рычков, Некоторые критерии наличия и отсуствия предельных циклов у динамической системы второго порядка [J]. Сибир. Матем, Журнал, Т. 1966, **7**(6): 1425—1431.

[10] Г. С. Рычков, Максимальные число предельных пиклов системы $\dot{y} = -x, \dot{x} = y - \sum_{i=0}^{2} a_i x^{2i+1}$ равно двум [J]. Д иффе. урзвнения, Т, Ⅵ, 1975, **2**: 390—391.

[11] DEAN A. NEUMANN, SABBAGH L D. *Periodic solutions of Liénard systems* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1978, **62**: 148—156.

[12] 黄克成. Liénard 方程的极限环 [J]. 华东水利学院学报，1979，**1**: 116—123.
HUANG ke-cheng. *Cycles of Liénard's equation* [J]. Journal of East China Institute of Water Conservancy, 1979, **1**: 116—123. (in Chinese)

[13] 黄克成. 微分方程$\frac{dx}{dt}=h(y)-F(x),\frac{dy}{dt}=-g(x)$极限环的存在性 [J]. 数学学报, 1980, **23**(4): 483—490.

HUANG Ke-cheng. *On the existence of limit cycles of the system* $\frac{dx}{dt}=h(y)-F(x),\frac{dy}{dt}=-g(x)$ [J]. Acta. Math. Sinica, 1980, **23**(4): 483—490. (in Chinese)

[14] 黄启昌, 杨思訒. 关于有交变阻尼的 Lienard 方程存在多个极限环的条件 [J]. 东北师大学报(自然科学版), 1981, **1**.

HUANG Qi-chang, YANG Si-ren. *Conditions of existence of the limit cycles of Liénard equations with alternate domping* [J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition), 1981, **1**. (in Chinese)

[15] 李继彬. 机械振动方程类$\ddot{x}+(a|\dot{x}\lambda+b\dot{x}|\dot{x}|^{\mu}+c)\dot{x}+x=0$的定性分析 [J]. 东北师大学报(自然科学版), 1981, **2**.

LI Ji-bin. *The qualitative analysis for differential equations of a mechanic vibrations* [J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition), 1981, 2. (in Chinese)

[16] 陈秀东. Liénard 方程至少存在 n 个极限环的充分条件和构造方法 [J]. 东北师大学报(自然科学版), 1983, **1**: 1—8.

CHEN Xiu-dong. *Liénard equation with sufficient conditions and construction method of at least n limit cycles* [J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition), 1983, **1**: 1—8. (in Chinese)

[17] CHEN Yong, CHEN Xiu-dong. *On Lins, A., W. de Melo and C. C. Pugh's conjecture* (Ⅰ) [J]. J. Math. Res. Exposition, 2002, **22**(3): 368—370.

[18] 陈秀东. 状态函数零点及极限环(Ⅰ) [C]. 全国第四届非线性振动学术会议论文集, 1986.

CHEN Xiu-dong. *Zero point of state function and limit cycle* [C]. Proceeding of Fouth National Non-linear Vibrations Symposium, 1986. (in Chinese)

[19] CHEN Xiu-dong, SUN Li-hua. *On A. Lins, W. de Melo and C. C. Pugh's conjecture* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1985, **5**(3): 41—43.

A Sufficient Condition for Liénard's Equation Existing at Most n Limit Cycles

CHEN Xiu-dong, CHEN Yong

(Dept. of Appl. Math., Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China)

Abstract: In this paper, based on the concept of state function [7,8], the study of limit cycle existence is transformed to the study of zero points of continuous function. As a result, we obtain a sufficient condition for Liénard's equation existing at most n limit cycles and give an affirmative answer to Lins, A., W. de Melo and C. C. Pugh's conjecture.

Key words: limit cycle; state function.