关联单形和一点的一类几何不等式*

马 统 一
(河西学院数学系，甘肃 张掖 734000)

摘 要：本文建立联系单形和一动点的几个新颖不等式，并提出几个有待进一步讨论的猜想.

关键词：单形；超球；体积；不等式；猜想..
分类号：AMS(2000) 51K05/CLC number：O184
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)02-0373-08

1 引 言

设欧氏空间$E^n(n\geqslant 2)$中的n维单形$\Sigma_A=\mathrm{conv}\{A_0,A_1,\cdots,A_n\}$的体积为$V$，顶点$A_i$所对$n-1$维界面$\Pi_i=\mathrm{conv}\{A_0,A_1,\cdots,A_{i-1},A_{i+1},\cdots,A_n\}$的体积为$F_i$，该面上的高为$h_i$，单形$\Sigma_A$的外接超球半径和内切超球半径分别为$R,r$，单形$\Sigma_A$内任一点$P$至$n-1$维界面$\Pi_i$的距离为$d_i$. 对另一$n$维单形$\Sigma_{A'}=\mathrm{conv}\{A'_0,A'_1,\cdots,A'_n\}$的相应元素采用类似的记号.

1975年，L. Gerber[1] 建立了涉及单形内一点的一个有趣结果：

$$\prod_{i=0}^{n} d_i \leqslant \left(\frac{R}{n}\right)^{n+1}. \tag{1.1}$$

1996年，冷岗松[2] 和张晗方[3] 各自独立地将(1.1)式加强为：

$$\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} d_j \leqslant \frac{n!}{\sqrt{n^n(n+1)^{n-1}}}V. \tag{1.2}$$

(1.2)式原是陈计等关于Gerber不等式加强的一个猜想[2].

1997年，冷岗松与唐立华[4] 建立了另一个涉及单形内一点的不等式：

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{d_i^\alpha} \geqslant \frac{2}{r^\alpha}+\frac{(n-1)n^\alpha}{R^\alpha}(\alpha\geqslant 1). \tag{1.3}$$

最近，马统一[5] 证明了一个类似于(1.3)的不等式：

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{d_id_j} \geqslant \frac{1}{r^2}+\frac{(C_{n+1}^2-1)n^2}{R^2}. \tag{1.4}$$

当且仅当Σ_A为正则单形且P为其中心时，以上(1.1)—(1.4)式取等号.

* 收稿日期：2000-12-22
基金项目：河西学院科技开发重点课题资助项目(02—B2).
作者简介：马统一(1959-)，男，副教授.

本文中,我们将建立涉及单形和一动点的一类新的几何不等式.

2 几个引理

引理 1[6] 设 $y_i > 0(i = 0,1,\cdots,n)$,则 n 维单形 Σ_A 的体积 V 与它的 $n-1$ 维界面 Π_i 的体积 $F_i(i = 0,1,\cdots,n)$ 之间有不等式

$$\left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right)^n \prod_{j=0}^{n} F_j^2 \geqslant \frac{n^{3n}}{(n!)^2} \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} y_j\right) F_i^2 V^{2(n-1)}, \tag{2.1}$$

当 Σ_A 为正则单形且 $y_0 = y_1 \cdots = y_n$ 时等式成立.

引理 2 设 $y_i > 0(i = 0,1,\cdots,n)$,$0 < \theta \leqslant 1$,则对两个 n 维单形 Σ_A 与 $\Sigma_{A'}$ 成立不等式

$$\left(\sum_{i=0}^{n} y_i F_i^\theta F_i'^\theta\right)^n \geqslant (n+1)^{(n-1)(1-\theta)} \left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)^\theta \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} y_j\right) (VV')^{(n-1)\theta}, \tag{2.2}$$

当 Σ_A 和 $\Sigma_{A'}$ 均为正则单形且 $y_0 = y_1 \cdots = y_n$ 时等号成立.

证明 由 Maclaurin 不等式[7],可得

$$\left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right)^n \geqslant (n+1)^{(n-1)} \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} y_j, \tag{2.3}$$

等号成立当且仅当 $y_0 = y_1 \cdots = y_n$.

于是,由引理 1 及(2.3),并利用 Hölder 不等式,得

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right)^n \prod_{j=0}^{n} F_j^{2\theta} &= \left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right)^{n(1-\theta)} \left(\left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right)^n \prod_{j=0}^{n} F_j^2\right)^\theta \\ &\geqslant (n+1)^{(n-1)(1-\theta)} \left(\sum_{i=0}^{n} \prod_{j\neq i} y_j\right)^{(1-\theta)} \left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2} \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j\neq i} y_j\right) F_i^2\right)^\theta V^{2(n-1)\theta} \\ &\geqslant (n+1)^{(n-1)(1-\theta)} \left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)^\theta \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j\neq i} y_j\right) F_i^{2\theta} V^{2(n-1)\theta},\end{aligned}$$

即

$$\left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right)^n \prod_{j=0}^{n} F_j^{2\theta} \geqslant (n+1)^{(n-1)(1-\theta)} \left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)^\theta \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j\neq i} y_j\right) F_i^{2\theta} V^{2(n-1)\theta}, \tag{2.4}$$

对(2.4)式利用 Cauchy 不等式,得

$$\begin{aligned}&(n+1)^{(n-1)(1-\theta)} \left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)^\theta \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j\neq i} y_j\right) (F_i F_i')^\theta (VV')^{(n-1)\theta} \\ &\leqslant \left((n+1)^{(n-1)(1-\theta)} \left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)^\theta \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j\neq i} y_j\right) F_i^{2\theta} V^{2(n-1)\theta}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

$$\left((n+1)^{(n-1)(1-\theta)} \left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)^\theta \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j \neq i} y_j\right) F_i'^{2\theta} V'^{2(n-1)\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right)^n \prod_{j=0}^{n} (F_j F_j')^\theta, \tag{2.5}$$

再对(2.5)式作置换 $y_j \to y_j (F_j F_j')^\theta (j=0,1,\cdots,n)$,即得

$$\left(\sum_{i=0}^{n} y_i F_i^\theta F_i'^\theta\right)^n \geqslant (n+1)^{(n-1)(1-\theta)} \left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)^\theta \cdot \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} y_j\right) (VV')^{(n-1)\theta},$$

至此，(2.2)式得证.

特别地，于(2.2)式中取 $\Sigma_{A'}$ 为正则单形，则得

推论 2.1 在 n 维单形 Σ_A 中，对 $y_i > 0, i = 0,1,\cdots,n, 0 < \theta \leqslant 1$，有

$$\left(\sum_{i=0}^{n} y_i F_i^{\theta}\right)^{n} \geqslant (n+1)^{\frac{(n-1)(2-\theta)}{2}} \left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)^{\frac{\theta}{2}} \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} y_j\right) V^{(n-1)\theta}, \tag{2.6}$$

当 Σ_A 为正则单形且 $y_0 = y_1 = \cdots y_n$ 时取等号.

引理 3[4] 在 n 维单形 Σ_A 中，对 $0 < \theta \leqslant 1$，成立不等式

$$\left(\sum_{i=0}^{n} F_i^{\theta}\right)^2 - 2\sum_{i=0}^{n} F_i^{2\theta} \geqslant (n^2-1)\mu_n^{\theta} V^{\frac{2(n-1)\theta}{n}}, \tag{2.7}$$

其中 $\mu_n = \dfrac{n^3}{n+1}\left(\dfrac{n+1}{(n!)^2}\right)^{\frac{1}{n}}$，当单形 Σ_A 为正则时上式取等号.

引理 4[8] 设 $x_i > 0, i = 0,1,\cdots,n, \sum\limits_{i=0}^{n} x_i = 1$，则对 $k \in \{0,1,\cdots,n\}$ 有

$$\sum_{0\leqslant i_0<i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \frac{x_{i0} + x_{i1} + \cdots + x_{ik}}{x_{i0}x_{i1}\cdots x_{ik}} \geqslant (k+1)C_{n+1}^{k+1}(n+1)^k, \tag{2.8}$$

当且仅当 $x_0 = x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n+1}$ 时上式取等号.

引理 5 设 $a_i > 0, b_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$，实数 $\alpha > 0$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\alpha+1}}{b_i^{\alpha}} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha+1} \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\alpha}, \tag{2.9}$$

式中等号当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$ 时成立.

由 Cauchy 不等式易证，从略.

3 主要结论

记 $C_n = (n-1)\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)^{\alpha} \mu_n^{\frac{\alpha}{2}}$，$\mu_n$ 的意义同引理 3.

定理 1 在 n 维单形 Σ_A 中，对 $\alpha \geqslant 1$ 成立不等式：

(i) $$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(h_i - d_i)^{\alpha}} \geqslant \frac{1}{n^{\alpha}}\left(\frac{2}{r^{\alpha}} + \frac{C_n}{V^{\alpha/n}}\right) \geqslant \frac{1}{n^{\alpha}}\left(\frac{2}{r^{\alpha}} + \frac{(n-1)n^{\alpha}}{R^{\alpha}}\right); \tag{3.1}$$

(ii) $$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(h_i + d_i)^{\alpha}} \geqslant \frac{1}{(n+2)^{\alpha}}\left(\frac{2}{r^{\alpha}} + \frac{C_n}{V^{\alpha/n}}\right) \geqslant \frac{1}{(n+2)^{\alpha}}\left(\frac{2}{r^{\alpha}} + \frac{(n-1)n^{\alpha}}{R^{\alpha}}\right), \tag{3.2}$$

当且仅当 Σ_A 为正则单形且 P 为该单形的中心时，以上两式取等号.

证明 我们仅证(i)，而(ii) 类似证之.

记单形 $\Sigma_{A_i} = \mathrm{conv}\{A_0, A_1, \cdots, A_{i-1}, P, A_{i+1}, \cdots, A_n\}$ 的体积为 $V_i (i = 0,1,\cdots,n)$，又记 $\lambda_i = V_i/V$，则 $n\lambda_i V = nV_i = F_i d_i$. 于是

$$\left.\begin{aligned} & d_i = \frac{nV\lambda_i}{F_i}(i = 0,1,\cdots,n) \\ & \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 (\lambda_i = V_i/V) \end{aligned}\right\}. \tag{*}$$

由($*$)和引理 5,得

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(h_i-d_i)^{\alpha}}=\frac{1}{(nV)^{\alpha}}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{F_i}{1-\lambda_i}\right)^{\alpha}=\frac{1}{(nV)^{\alpha}}\sum_{i=0}^{n}\frac{(F_i^{\alpha/(\alpha+1)})^{\alpha+1}}{(1-\lambda_i)^{\alpha}}$$

$$\geqslant\frac{1}{(nV)^{\alpha}}\frac{\left(\sum_{i=0}^{n}F_i^{\theta}\right)^{\alpha+1}}{\left(\sum_{i=0}^{n}(1-\lambda_i)\right)^{\alpha}}=\frac{1}{n^{2\alpha}V^{\alpha}}\left(\sum_{i=0}^{n}F_i^{\theta}\right)^{\alpha+1},\tag{3.3}$$

其中 $\theta=\frac{\alpha}{\alpha+1}$,式中等号成立当且仅当 $\frac{F_0^{\theta}}{1-\lambda_0}=\frac{F_1^{\theta}}{1-\lambda_1}=\cdots=\frac{F_n^{\theta}}{1-\lambda_n}$.

因 $(\alpha-1)\theta+2\theta=\alpha$,当 $\alpha\geqslant1$ 时由 Hölder 不等式,得

$$\left(\sum_{i=0}^{n}F_i\right)^{\alpha}=\left(\sum_{i=0}^{n}F_i^{\theta(\alpha-1)/\alpha}F_i^{2\theta/\alpha}\right)^{\alpha}\leqslant\left(\sum_{i=0}^{n}F_i^{\theta}\right)^{\alpha-1}\left(\sum_{i=0}^{n}F_i^{2\theta}\right),\tag{3.4}$$

所以

$$f\equiv\left(\sum_{i=0}^{n}F_i^{\theta}\right)^{\alpha+1}-2\left(\sum_{i=0}^{n}F_i\right)^{\alpha}\geqslant\left(\sum_{i=0}^{n}F_i^{\theta}\right)^{\alpha-1}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}F_i^{\theta}\right)^{2}-2\sum_{i=0}^{n}F_i^{2\theta}\right),\tag{3.5}$$

注意到一个著名的结果[9]:

$$\left(\prod_{i=0}^{n}F_i\right)^{\frac{1}{n+1}}\geqslant\sqrt{\mu_n}V^{\frac{n-1}{n}},\tag{3.6}$$

当且仅当 Σ_A 为正则单形时(3.6)式取等号.

故由算术 — 几何平均不等式,得

$$\sum_{i=0}^{n}F_i^{\theta}\geqslant(n+1)\left(\prod_{i=0}^{n}F_i\right)^{\frac{\theta}{n+1}}\geqslant(n+1)\sqrt{\mu_n^{\theta}}V^{\frac{n-1}{n}\theta},\tag{3.7}$$

利用(3.5),(3.7)及引理 3,得

$$f\geqslant\left((n+1)\mu_n^{\frac{\theta}{2}}V^{\frac{n-1}{n}\theta}\right)^{\alpha-1}\cdot(n^2-1)\mu_n^{\theta}V^{\frac{2(n-1)\theta}{n}}=(n-1)(n+1)^{\alpha}\mu_n^{\frac{\alpha}{2}}V^{\frac{n-1}{n}\alpha},\tag{3.8}$$

从而由(3.3),(3.8),并注意到

$$nV=r\sum_{i=0}^{n}F_i,\tag{3.9}$$

得

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(h_i-d_i)^{\alpha}}\geqslant\frac{f+2\left(\sum_{i=0}^{n}F_i\right)^{\alpha}}{n^{2\alpha}V^{\alpha}}\geqslant\frac{2\left(\sum_{i=0}^{n}F_i\right)^{\alpha}+(n-1)(n+1)^{\alpha}\mu_n^{\frac{\alpha}{2}}V^{\frac{n-1}{n}\alpha}}{n^{2\alpha}V^{\alpha}}$$

$$=\frac{1}{n^{\alpha}}\left(\frac{2}{r^{\alpha}}+\frac{C_n}{V^{\alpha/n}}\right),\tag{3.10}$$

故(i)中第一个不等式成立.

由于单形的体积 V 与其外接超球半径 R 之间有不等式[10]:

$$V^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{n+1}{n^2}\mu_n^{\frac{1}{2}}R\tag{3.11}$$

(等号成立当且仅当单形为正则),代入(3.10)立得(i)的第二个不等式.并由证明过程易知,(3.1)式当且仅当 Σ_A 为正则单形且 P 为其中心时取等号.

定理 2 在 n 维单形 Σ_A 中,成立不等式

(i) $$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{(h_i-d_i)(h_j-d_j)}\geqslant\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\alpha_n(C_{n+1}^2-1)}{V^{2/n}}\right)$$
$$\geqslant\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{(C_{n+1}^2-1)n^2}{R^2}\right);\tag{3.12}$$

(ii) $$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{(h_i+d_i)(h_j+d_j)}\geqslant\frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\alpha_n(C_{n+1}^2-1)}{V^{2/n}}\right)$$
$$\geqslant\frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{(C_{n+1}^2-1)n^2}{R^2}\right),\tag{3.13}$$

其中$\alpha_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\mu_n$，$\mu_n$的意义同引理3. 当且仅当$\Sigma_A$为正则单形且$P$为其中心时，以上两式取等号.

证明 我们只证(i). 在变换(*)的意义下，

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{(h_i-d_i)(h_j-d_j)}=\frac{1}{(nV)^2}\sum_{i<j}\frac{F_iF_j}{(1-\lambda_i)(1-\lambda_j)}$$
$$=\frac{1}{n^4V^2}\left(\sum_{i<j}\frac{F_iF_j}{(1-\lambda_i)(1-\lambda_j)}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}(1-\lambda_i)\right)^2,$$

于是

$$\begin{aligned}
n^4V^2\sum_{i<j}\frac{1}{(h_i-d_i)(h_j-d_j)}&=\left(\sum_{i<j}\frac{F_iF_j}{(1-\lambda_i)(1-\lambda_j)}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}(1-\lambda_i)\right)^2\\
&=\left(\sum_{i<j}\frac{F_iF_j}{(1-\lambda_i)(1-\lambda_j)}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}(1-\lambda_i)^2+2\sum_{i<j}(1-\lambda_i)(1-\lambda_j)\right)\\
&=2\sum_{i<j}F_iF_j+\sum_{i<j}F_iF_j\left(\frac{1-\lambda_i}{1-\lambda_j}+\frac{1-\lambda_j}{1-\lambda_i}\right)+\\
&\quad 2\sum_{i<j}\left(\frac{F_iF_j}{(1-\lambda_i)(1-\lambda_j)}\right)\left(\sum_{\substack{p<q\\(p,q)\neq(i,j)}}(1-\lambda_p)(1-\lambda_q)\right)+\\
&\quad \sum_{i<j}\frac{F_iF_j}{(1-\lambda_i)(1-\lambda_j)}\left(\sum_{\substack{k=0\\k\neq i,j}}^{n}(1-\lambda_k)^2\right)\\
&\geqslant 4\sum_{i<j}F_iF_j+2C_{n+1}^2(C_{n+1}^2-1)\left(\prod_{i=0}^{n}F_i\right)^{\frac{2}{n+1}}+(n-1)C_{n+1}^2\left(\prod_{i=0}^{n}F_i\right)^{\frac{2}{n+1}}\\
&=4\sum_{i<j}F_iF_j+C_{n+1}^2(2C_{n+1}^2+n-3)\left(\prod_{i=0}^{n}F_i\right)^{\frac{2}{n+1}}\\
&=2\left(\sum_{i=0}^{n}F_i\right)^2-2\sum_{i=0}^{n}F_i^2+C_{n+1}^2(2C_{n+1}^2+n-3)\left(\prod_{i=0}^{n}F_i\right)^{\frac{2}{n+1}}\\
&\geqslant\left(\sum_{i=0}^{n}F_i\right)^2+(C_{n+1}^2(2C_{n+1}^2+n-3)+n^2-1)\mu_nV^{\frac{2(n-1)}{n}}\\
&=\left(\sum_{i=0}^{n}F_i\right)^2+(n+1)^2(C_{n+1}^2-1)\mu_nV^{\frac{2(n-1)}{n}},
\end{aligned}\tag{3.14}$$

其中第二个不等式利用了(3.6)式和引理3中$\theta=1$的情形.

注意到恒等式(3.9)，由上式即得

$$\sum_{i<j}\frac{1}{(h_i-d_i)(h_j-d_j)}\geqslant\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\alpha_n(C_{n+1}^2-1)}{V^{2/n}}\right), \tag{3.15}$$

此即(i) 中第一个不等式.

继续对(3.15) 使用不等式(3.1) 即得(i) 中第二个不等式.

定理 3 在 n 维单形 Σ_A 中,对 $0<\theta\leqslant 1$ 有

(i) $$\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(h_j-d_j)^\theta\leqslant(n+1)\left(\frac{n^n(n!)^2}{(n+1)^{n+1}}\right)^{\frac{\theta}{2}}V^\theta; \tag{3.16}$$

(ii) $$\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(h_j+d_j)^\theta\leqslant(n+1)\left(\frac{(n+2)^{2n}(n!)^2}{(n+1)^{n+1}n^n}\right)^{\frac{\theta}{2}}V^\theta, \tag{3.17}$$

当 Σ_A 为正则且 P 为其中心时(3.16),(3.17) 取等号.

证明 我们只证(ii). 于推论 2.1 中令 $y_i=(h_i+d_i)^\theta(i=0,1,\cdots,n)$,则得

$$(nV)^{n\theta}\left(\sum_{i=0}^{n}(1+\lambda_i)^\theta\right)^n\geqslant(n+1)^{\frac{(n-1)(2-\theta)}{2}}\left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)^{\frac{\theta}{2}}V^{(n-1)\theta}\left(\sum_{i=0}^{n}\prod_{j\neq i}(h_j+d_j)^\theta\right),$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\prod_{j\neq i}(h_j+d_j)^\theta&\leqslant(n+1)^{\frac{(n-1)(\theta-2)}{2}}\left(\frac{(n!)^2}{n^n}\right)^{\frac{\theta}{2}}V^\theta\left(\sum_{i=0}^{n}(1+\lambda_i)^\theta\right)^n\\&\leqslant(n+1)^{\frac{(n-1)(\theta-2)}{2}}\left(\frac{(n!)^2}{n^n}\right)^{\frac{\theta}{2}}V^\theta(n+1)^{(1-\theta)n}\left(\sum_{i=0}^{n}(1+\lambda_i)\right)^{n\theta}\\&=(n+1)\left(\frac{(n+2)^{2n}(n!)^2}{(n+1)^{n+1}n^n}\right)^{\frac{\theta}{2}}V^\theta.\end{aligned}$$

定理 4 在两个 n 维单形 Σ_A 和 $\Sigma_{A'}$ 中,成立不等式

(i) $$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{d_ih_i'}\geqslant\left(\frac{(n+1)^{n+1}n^n}{(n!)^2}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{VV'}\right)^{\frac{1}{n}}; \tag{3.18}$$

(ii) $$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(d_ih_i')^\alpha}\geqslant(n+1)\left(\frac{(n+1)n^n}{(n!)^2}\right)^{\frac{\alpha}{n}}\left(\frac{1}{VV'}\right)^{\frac{\alpha}{n}}(\alpha>0); \tag{3.19}$$

(iii) $$\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(d_jh_j')^\theta\leqslant(n+1)\left(\frac{(n!)^2}{(n+1)n^n}\right)^\theta(VV')^\theta(0<\theta\leqslant 1), \tag{3.20}$$

当单形 Σ_A 与 $\Sigma_{A'}$ 均为正则且 P 为 Σ_A 中心时各式取等号.

证明 (i) 利用变换(*)和引理 2 中 $\theta=1$ 之情形,得

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(d_ih_i')}\right)^n&=\frac{1}{(n^2VV')^n}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{F_iF_i'}{\lambda_i}\right)^n\geqslant\frac{1}{(n^2VV')^n}\left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)(VV')^{(n-1)}\left(\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{\lambda_j}\right)\\&=\frac{n^n}{(n!)^2}\left(\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{\lambda_j}\right)\frac{1}{VV'}\geqslant\frac{(n+1)^{n+1}n^n}{(n!)^2}\frac{1}{VV'},\end{aligned}$$

最后一步用到引理 4 中 $k=n$ 之情形. 上式两端开 n 次方即得欲证(i).

(ii). (ii)是(i)的推广. 由引理 5 和不等式(3.6),得

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(d_ih_i')^\alpha}=\frac{1}{(n^2VV')^\alpha}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{F_iF_i'}{\lambda_i}\right)^\alpha=\frac{1}{(n^2VV')^\alpha}\sum_{i=0}^{n}\frac{(F_iF_i')^{\frac{\alpha}{n+1}(n+1)}}{\lambda_i^\alpha}$$

$$\geqslant \frac{1}{(n^2VV')^\alpha}\frac{\left(\sum_{i=0}^{n}(F_iF_i')^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)^{\alpha+1}}{\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\right)^\alpha} = \frac{1}{(n^2VV')^\alpha}\left(\sum_{i=0}^{n}(F_iF_i')^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)^{(\alpha+1)}$$

$$\geqslant \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{(n^2VV')^\alpha}\prod_{i=0}^{n}(F_iF_i')^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \geqslant \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{(n^2VV')^\alpha}\mu_n^\alpha(VV')^{\frac{n-1}{n}\alpha}$$

$$= (n+1)\left(\frac{(n+1)n^n}{(n!)^2}\right)^{\frac{\alpha}{n}}\left(\frac{1}{VV'}\right)^{\frac{\alpha}{n}},$$

其中 μ_n 的意义如前.

(iii) 于引理 2 中令 $y_i=(d_ih_i')^\theta, i=0,1,\cdots,n$,则得

$$(n^2VV')^{n\theta}\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^\theta\right)^n \geqslant (n+1)^{(n-1)(1-\theta)}\left(\frac{n^{3n}}{(n!)^2}\right)^\theta (VV')^{(n-1)\theta}\left(\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}d_j^\theta h_j'^\theta\right),$$

从而

$$\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(d_jh_j')^\theta \leqslant (n+1)^{(n-1)(\theta-1)}\left(\frac{(n!)^2}{n^n}\right)^\theta (VV')^\theta\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^\theta\right)^n$$

$$\leqslant (n+1)^{(n-1)(\theta-1)}\left(\frac{(n!)^2}{n^n}\right)^\theta (VV')^\theta (n+1)^{(1-\theta)n}\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\right)^{n\theta}$$

$$= (n+1)^{(n-1)(\theta-1)}(n+1)^{(1-\theta)n}\left(\frac{(n!)^2}{n^n}\right)^\theta (VV')^\theta$$

$$= (n+1)^{1-\theta}\left(\frac{(n!)^2}{n^n}\right)^\theta (VV')^\theta = (n+1)\left(\frac{(n!)^2}{(n+1)n^n}\right)^\theta (VV')^\theta,$$

即 $\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(d_jh_j')^\theta \leqslant (n+1)\left(\frac{(n!)^2}{(n+1)n^n}\right)^\theta (VV')^\theta$, 故(iii)成立.

注 于(iii)中取 Σ_A 为正则单形,$\theta=1$,则得不等式(1.2).

4 几个猜想

最后,我们提出下列几个猜想,供大家进一步研究.

猜想 在 n 维单形 Σ_A 中,证明或否定

(i) $$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{d_i^\alpha} \geqslant n^\alpha\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(h_i-d_i)^\alpha} \geqslant (n+2)^\alpha\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(h_i+d_i)^\alpha}(\alpha\geqslant 1);\qquad(4.1)$$

(ii) $$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{d_id_j} \geqslant n^2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{(h_i-d_i)(h_j-d_j)}$$

$$\geqslant (n+2)^2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{(h_i+d_i)(h_j+d_j)};\qquad(4.2)$$

(iii) $$\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}d_j^\theta \leqslant \frac{1}{n^{n\theta}}\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(h_j-d_j)^\theta \leqslant \frac{1}{(n+2)^{n\theta}}\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(h_j+d_j)^\theta(0<\theta\leqslant 1).$$

(4.3)

参考文献：

[1] GERBER L. *The orthocentric simplex as an extreme simplex* [J]. Pacific J. Math., 1975, **56**: 97—111.

[2] 冷岗松. 关于 Gerber 不等式的一个猜想 [J]. 数学研究与评论, 1996, **16**(4): 561—564.
LENG Gang-song. *A conjecture on Gerber's inequality* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1996, **16**(4): 561—564.

[3] 张晗方. E^n 中的一个几何恒等式及其应用[A]. 单墫主编. 几何不等式在中国 [C]. 南京：江苏教育出版社, 1996, 248—252.
ZHANG Han-fang. *A identical equation in E^n with applications* [A]. *Geometrical inequalities in China* [C]. SHAN Zun, Jiangsu education Press, Nanjing, 1996, 248—252.

[4] 冷岗松, 唐立华. 再论 Peder 不等式的高维推广及应用 [J]. 数学学报, 1997, **40**(1): 14—21.
LENG Gang-song, TANG Li-hua. *More on higher-dimensional generalized pedoe inequalities and their applications* [J]. Acta Math. Sinica, 1997, **40**(1): 14—21. (in Chinese)

[5] 马统一. 关于高维单形的一个不等式及应用 [J]. 数学的实践与认识, 2000, **30**(4): 508—512.
MA Tong-yi. *An inequality of high-dimensional simplex with application* [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2000, **30**(4): 508—512.

[6] 张　垚. 关于垂足单形的一个猜想 [J]. 系统科学与数学, 1992, **12**(4): 371—375.
ZHANG Yao. *A conjection for the volume of simplex with feet of perpendicular as vertices* [J]. J. Sys. Sci. and Math. Sci., 1992, **12**(4): 371—375.

[7] HARDY G H. 不等式 [M]. 北京：科学出版社, 1965, 53—57.
HARDY G H. *Inequalities* [M]. Beijing: Sci. Press, 1965, 53—57.

[8] MITRINOVIC D S, VASIC P M. *Analytie Inequalities* [M]. Springer-Verlay, 1970, 282.

[9] 张景中, 杨路. 关于质点组的一类几何不等式 [J]. 中国科学技术大学学报, 1981, **11**(2): 1—8.
ZHANG Jing-zhong, YANG Lu. *A class of geometric inequalities concerning the mass-points system* [J]. J. China Univ. Sci. Technol., 1981, **11**(2): 1—8.

[10] FEJES L. *Toth Reguläre Figuren* [M]. Akadémiai Kiadó Budapest, 1965.

A Class of Geometric Inequalities for a Simplex with an Interior Point

MA Tong-yi

(Dept. of Math., Hexi University, Zhangye, Gansu 734000, China)

Abstract: In this paper we establish some inequalities for an interior point of an n-dimensional simplex, and we present some conjectures about these inequalities.

Key words: simplex; sphere; volume; geometric; inequalities; conjecture.