第23卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 23 No. 3
2003年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 2003

具有无穷时滞中立型积分微分方程周期解的存在性、唯一性和稳定性*

杨喜陶

（湘潭工学院数学与软件研究所，湖南 湘潭 411201）

摘　要：证明了一类具有无穷时滞的中立型积分微分方程解的一致有界性、一致稳定性、周期解的存在唯一性，推广和改进了王全义关于"无穷时滞的积分微分方程的周期解的存在性、唯一性与稳定性"的有关结果.

关键词：一致稳定；一致有界；周期解；时滞.

分类号：AMS(2000) 34D40,34K40/CLC number：O175.6

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2003)03-0473-08

1　引言与假设

考虑如下中立型 Volterra 积分微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)-\int_{-\infty}^{t}B(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right)=A(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\mathrm{d}s+g(t,x(t))+f(t),\quad(1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)-\int_{-\infty}^{t}B(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right)=A(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\mathrm{d}s+g(t,x(t)),\quad(2)$$

其中 $t\in R$，$A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$，$B(t,s)$，$C(t,s)$ 为连续函数矩阵，$f(t):R\to R^n$ 为连续，$g(t,x):R\to R^n$ 连续，$x=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)^T\in R^n$.

定义 $|x|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，$A\in R^{n\times n}$，$|A|=\sup_{|x|=1}|Ax|$. 此外假设

(H1) $A(t)$，$f(t)$ 在 R 上有界，$M_0=\sup_{t\in R}|f(t)|$，$M_1=\sup_{t\in R}|A(t)|$，$\int_{-\infty}^{t}|B(t,s)|\mathrm{d}s$ 及 $\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)\mathrm{d}s|$ 在 R 上连续有界，$M=\sup_{t\in R}\int_{-\infty}^{t}|B(t,s)|\mathrm{d}s$.

(H2) $g(t,0)=0$，存在 R 上的有界连续函数 $b_1(t)$ 使 $|g(t,x)-g(t,y)|\leqslant b_1(t)|x-y|$ 对任意 $t\in R$，$x,y\in R^n$ 成立.

---

* 收稿日期：2000-11-07

基金项目：湖南省教育厅科研项目资助(02C446)

作者简介：杨喜陶(1963-)，男，硕士，教授.

(H3) $b(t)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{a_{jj}(t)+\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{n}|a_{ij}(t)|\}$，存在常数 $K>0$：$\frac{1}{K}+M<1$ 使当 $t\in R$ 时有

$$b(t)+K[\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)|\mathrm{d}s+M_1\int_{-\infty}^{t}|B(t,s)|\mathrm{d}s]\leqslant 0,$$

其中 $a_{ij}(t)$，M 及 M_1 与 $b_1(t)$ 为(H1)，(H2) 所给.

(H4) 存在 $K>0,\frac{1}{K}<1$ 使当 $t\in R$ 时有

$$b(t)+K[\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)|\mathrm{d}s+M_1\int_{-\infty}^{t}|B(t,s)|\mathrm{d}s]\leqslant 0.$$

(H5) $A(t),f(t)$ 为 T 周期，$g(t,x)$ 关于 t 为 T 周期，$\frac{1}{T}\int_0^T b(t)=-a<0$($b(t)$ 为(H3) 所给)，且对任意 $t,s\in R$ 有：$B(t+T,s+T)=B(t,s)$，$C(t+T,s+T)=C(t,s)$.

文[1] 证明当 $B(t,s)=0$ 时，在上述假设及还假定(1) 具有“消失记忆”的条件下证明了(1) 的周期解的存在唯一性，大大推广了[2] 的有关结果，本文在去掉“消失记忆”条件下证明了(1) 解的一致稳定性、一致有界性及定义于 R 上有界解的存在唯一性，从而即算在 $B(t,s)=0$ 的条件下也推广了[1] 的相应结果. φ 为 $(-\infty,t_0]\to R^n$ 的有界连续函数，$x(t,t_0,\varphi)$ 表(1) 或(2) 的解：在 $(-\infty,t_0]$ 上，$x(t,t_0,\varphi)=\varphi$，在 $[t_0,t_1)$，在 (t_1 可为 ∞) 上满足(1) 或(2).

定义 1 称(2) 的零解方程称为一致稳定的，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)$，对任意 $t_0\in R$ 及 $(-\infty,t_0]\to R^n$ 的有界连续函数 φ，若 $|\varphi(t)|<\delta(t\in(-\infty,t_0])$，有

$$|x(t,t_0,\varphi)<\varepsilon\ |(t\in(-\infty,t_0]).$$

定义 2 称(1) 的解为一致有界，若对任意 $\alpha>0$，存在 $M(\alpha)>0$；对任意 $t_0\in R$ 及 $(-\infty,t_0]\to R^n$ 的有界连续函数 φ，若 $|\varphi(t)|<\alpha(t\in(-\infty,t_0])$，有

$$|x(t,t_0,\varphi)|<M(\alpha)(t\geqslant t_0).$$

2 几个引理

引理 1[1] 对于微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x, \tag{3}$$

其中 $t\in R,x\in R^n$，$A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$ 为连续函数矩阵，$X(t)$ 为(3) 的基本解矩阵，$b(t)$ 为(H3) 所给，则有

$$|X(t)X^{-1}(s)|\leqslant\exp(\int_{-\infty}^{t}b(r)\mathrm{d}r),t\geqslant s.$$

引理 2 设 $C(t,s)$ 满足(H1) 及(H5)，$f(t)$ 为连续 T 周期函数，则 $g(t)=\int_{-\infty}^{t}C(t,s)f(s)\mathrm{d}s$ 为连续 T 周期函数.

证明 由于 $\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)|\mathrm{d}s=\int_0^{\infty}|C(t,t-s)|\mathrm{d}s$，及 $\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)|\mathrm{d}s$ 的连续性知：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ K>0,\forall\ t\in[0,T]$ 有 $\int_K^{\infty}|C(t,t-s)|\mathrm{d}s<\varepsilon$.

由 $C(t,s)$ 的周期性,有 $\forall\, t \in R, \int_K^{\infty} |C(t,t-s)|\mathrm{d}s < \varepsilon$.

$\exists\, \delta > 0$, 当 $|t - t_0| < \delta, t \in [0,K]$ 有

$$|C(t,t-s)f(t-s) - C(t_0,t_0-s)f(t_0-s)| < \varepsilon,$$

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\infty}^{t} C(t,s)f(s)\mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{t_0} C(t_0,s)f(s)\mathrm{d}s\right| \\ &= \left|\int_0^K C(t,t,s)f(t-s)\mathrm{d}s - \int_0^K C(t_0,t_0-s)f(t_0-s)\mathrm{d}s\right| + \\ &\quad \left|\int_K^{\infty} C(t,t-s)f(t-s)\mathrm{d}s - \int_K^{\infty} C(t_0,t_0-s)f(t_0-s)\mathrm{d}s\right| < K\varepsilon + 2M_0\varepsilon,\end{aligned}$$

从而 $\int_{-\infty}^{t} C(t,s)f(s)\mathrm{d}s$ 连续.

引理 3 $b(t)$ 为连续 T 周期函数,$\frac{1}{T}\int_0^T b(t)\mathrm{d}t = -a < 0$,则存在常数 $\beta > 0$ 使

$$\exp\left(\int_s^t b(r)\mathrm{d}r\right) \leqslant \beta \exp(-a(t-s)), \quad t \geqslant s,$$

若 $b(t)$ 为非正则可取 $\beta = e^{aT}$.

证明 令 $b = \sup_{t\in R}|b(t)|, \beta = e^{aT+bT}$,对任意 $t \geqslant s$,设 $s + nT \leqslant t \leqslant s + (n+1)T$, 由于

$$\begin{aligned}\int_s^t b(r)\mathrm{d}r &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{s+kT}^{s+(k+1)T} b(r)\mathrm{d}r + \int_{s+nT}^{t} b(r)\mathrm{d}r \\ &= -anT + \int_{s+nT}^{t} b(r)\mathrm{d}r \\ &\leqslant -a(t-s) + aT + bT,\end{aligned}$$

故

$$\exp\int_s^t b(r)\mathrm{d}r \leqslant \beta e^{-a(t-s)},$$

且从证明过程可知若 $b(t) \leqslant 0$,则可取 $\beta = e^{aT}$.

引理 4 若(H1) 及(H5) 满足,$\int_{-\infty}^{t} B(t,s)x(s)\mathrm{d}s$ 可导,则

$$\begin{aligned}&\int_0^t X(t)X^{-1}(r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\int_{-\infty}^{r} B(r,s)x(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}r \\ &= \int_0^t B(t,s)x(s)\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{0} B(t_0,s)x(s)\mathrm{d}s + \\ &\quad \int_0^t X(t)X^{-1}(r)A(r)\left(\int_{-\infty}^{r} B(r,s)x(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

其中 $X(t)$ 为(3)的基本解矩阵,$x(t)$ 为有界连续.

证明由引理 1 与引理 3 及分部积分法可得.

3 主要结果

定理 1 设(H1),(H2),(H3),(H5)满足,则对任意 $(-\infty, t_0] \to R^n$ 的有界连续函数 φ,

(1) 的解 $x(t,t_0,\varphi)$ 的存在区间为$[t_0,\infty)$，且(1) 的解为一致有界.

证明 对任意 $\alpha>0,t_0\in R,\varphi\in C((-\infty,t_0],R^n)$，$|\varphi(t)|\leqslant\alpha\ (t\in(-\infty,t_0])$，由引理 2 知(1) 的过$(t_0,\varphi)$ 的解 $x(t,t_0,\varphi)$ 局部存在，设存在区间为$[t_0,A)$，取

$$M_2=\max\{\alpha,(\alpha\beta+M_0\beta a^{-1}+\alpha M)(1-\frac{1}{K}-M)^{-1}\},$$

记 $x(t)=x(t,t_0,\varphi)$，则当 $t\in[t_0,A)$ 时，$|x(t)|<M_2$.

反之若存在 $t_1\in[t_0,A)$，使当 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 时有 $|x(t)|<M_2$，而 $|x(t_1)|=M_2$，由于满足

$$x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)\varphi(t_0)+\int_0^t X(t)X^{-1}(r)[\int_{-\infty}^r C(r,s)x(s)\mathrm{d}s+g(r,x(r))+f(r)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_{-\infty}^r B(r,s)x(s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}r,$$

其中 $X(t)$为(3)的基本解矩阵，而

$$\int_0^t X(t)X^{-1}(r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\int_{-\infty}^r B(r,s)x(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}r=\int_0^t B(t,s)x(s)\mathrm{d}s-\int_{-\infty}^{t_0}B(t_0,s)x(s)\mathrm{d}s+\int_0^t X(t)X^{-1}(r)A(r)(\int_{-\infty}^r B(r,s)x(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}r,$$

故有

$$\begin{aligned}M_2=|x(t_1)|&\leqslant|X(t_1)X^{-1}(t_0)\varphi(t_0)|+\alpha\int_{-\infty}^{t_0}|B(t_0,s)|\mathrm{d}s+\\&\int_0^{t_1}X(t_1)X^{-1}(r)[\int_{-\infty}^r M_2|C(r,s)|\mathrm{d}s+M_2b_1+M_0]\mathrm{d}r+M_2\int_{-\infty}^{t_1}|B(t_1,s)\mathrm{d}s|+\\&\int_0^{t_1}M_1|X(t_1)X^{-1}(r)|(\int_{-\infty}^r|B(r,s)|M_2\mathrm{d}s)\mathrm{d}r\\&\leqslant\alpha\exp(\int_0^{t_1}b(s)\mathrm{d}s)+M_2\int_{-\infty}^{t_1}\exp(\int_r^{t_1}b(s)\mathrm{d}s)[\int_{-\infty}^r|C(r,s)|\mathrm{d}s+b_1(r)+\\&M_1\int_{-\infty}^r|B(r,s)|\mathrm{d}s]\mathrm{d}r+M_0\int_{-\infty}^{t_1}\exp(\int_r^{t_1}b(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}r+(M_2+\alpha)M\\&\leqslant\alpha\beta+\frac{M_2}{K}+\frac{M_0\beta}{a}+M_2M<\alpha\beta+\frac{M_2}{K}+\frac{M_0\beta}{a}+(M_2+\alpha)M.\end{aligned}$$

从而有

$$M_2<(\alpha\beta+M_0\beta a^{-1}+\alpha M)(1-\frac{1}{K}-M)^{-1},$$

与 M_2 的取法矛盾. 故 $A=\infty$，且(1)的解为一致有界.

定理 2 若(H1)，(H2)，(H3)及(H5)满足，则(2)的零解一致稳定，从而(1)的解在$[t_0,\infty)$上存在唯一.

证明 与定理 1 类似，从略.

定理 3 若(H1)，(H2)，(H3)及(H5)满足，则(1)有唯一定义于 R 上的有界解 $p(t)$，且 $p(t)$ 为 T 周期.

证明 (Ⅰ) 方程(1) 有定义于 R 的有界解 $p(t)$.

取 $\varphi(t)=0$，设 $x(t)=x(t,0,0)$，由定理 1 知存在常数 $M_3>0$ 使对任意 $t\geqslant 0$ 有：$|x(t)|\leqslant M_3$. 记 $y_n(t)=x(t+nT)$，则$\{y_n(t)\}$ 在$[-T,\infty)$ 上一致有界且满足方程(1). 从而$\{y_n(t)$

$-\int_{-\infty}^{t} B(t,s)y_n(s)\mathrm{d}s\}$ 为等度连续.

由引理 2 的证明知:对任意 $\varepsilon > 0$,存在常数 $v > 0$. 对任意 $t \in R$ 有

$$\int_{v}^{\infty} |B(t,t-s)|\mathrm{d}s > \varepsilon.$$

由 $B(t,s)$ 的周期性与连续性知:$B(t,t-s)$ 在 $R\times[0,v]$ 上一致连续,即存在 $\delta<\varepsilon$,当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时,有

$$|B(t_1,t_1-s)-B(t_2,t_1-s)|<\varepsilon,$$

故有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{t_1} B(t_1,s)y_n(s)\mathrm{d}s-\int_{-\infty}^{t_2} B(t_2,s)y_n(s)\mathrm{d}s\right| \\
&= \left|\int_{0}^{\infty}(B(t_1,t_1-s)y_n(t_1-s)-B(t_2,t_2-s)yn(t_2-s))\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant 2M_3\varepsilon+\left|\int_{0}^{v}(B(t_1,t_1-s)y_n(t_1-s)-B(t_2,t_2-s)y_n(t_2-s))\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant 2M_3\varepsilon+\left|\int_{t_1-v}^{t_2-v} B(t_1,s)y_n(s)\mathrm{d}s\right|+\left|\int_{t_2-v}^{t_1}(B(t_1,s)-B(t_2,s)y_n(s)\mathrm{d}s)\right|+ \\
&\quad \left|\int_{1}^{t_2} B(t_2,s)y_n(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant 2M_3\varepsilon+2M_4\delta+M_3(v+\delta)\varepsilon,
\end{aligned}$$

其中 $M_4=\sup\{|B(t,t-s)|:(t,s)\in R\times[-\delta,0]\}<\infty$,故$\{\int_{-\infty}^{t} B(t,s)y_n(s)\mathrm{d}s\}$ 为等度连续,从而$\{y_n(t)\}$ 在$[-T,\infty]$ 上等度连续. 故存在子列$\{y_n^{(1)}(t)\}$ 在$[-T,\infty)$ 紧集上一到致收敛于 $P^*(t)$,且由

$$\begin{aligned}
y_n^{(1)}(t)-\int_{-\infty}^{t} B(t,s)y_n^{(1)}(s)\mathrm{d}s &= y_n^{(1)}(0)-\int_{-\infty}^{0} B(0,s)y_n^{(1)}(s)\mathrm{d}s+\int_{0}^{t} A(s)y_n^{(1)}(s)\mathrm{d}s+ \\
&\int_{0}^{t}[\int_{-\infty}^{r} C(r,s)y_n^{(1)}(s)\mathrm{d}s+g(r,y_n^{(1)}(r)+f(r)]\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

由(H1)及(H2)对上式取极限知 $P^*(t)$ 在$[-T,\infty]$ 上满足(1),同理存在$\{y_n^{(n)}(t)\}$ 的子列$\{y_n^{(2)}(t)\}$ 在$[-2T,\infty)$ 紧集上一致收敛,依此下去,依对角线法则$\{y_n^{(n)}(t)\}$ 在 R 紧集上一致收敛于 $p(t)$,且 $p(t)$ 在 R 上满足方程(1).

(Ⅱ)方程(1) 在 R 上的有界解唯一

设方程(1) 在 R 上有有界解 $x_1(t),x_2(t)$. 令

$$u(t)=x_1(t)-x_2(t),m=\sup_{t\in R}|x_1(t)-x_2(t)|,$$

由

$$\begin{aligned}
x_i(t)=\int_{-\infty}^{t} X(t)X^{-1}(r)[\int_{-\infty}^{r} C(r,s)x_i(s)\mathrm{d}s+g(r,x_i(r))+ \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\int_{-\infty}^{r} B(r,s)x_i(s)\mathrm{d}s)]\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

若 $m>0$,则对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $t_1\in R$ 使:$m-\varepsilon<|u(t_1)|$,与定理 1 类似可得

$$|u(t_1)|\leqslant\int_{-\infty}^{1}\exp(\int_{r}^{t_1} b(s)\mathrm{d}s)\left(\frac{b(r)}{K}\right)\mathrm{d}r+mM.$$

故有 $\left(\frac{1}{K}+M\right)m \geqslant m-\varepsilon$,从而有$\frac{1}{K}\geqslant 1$,矛盾. 即(1) 有定义于$R$上的唯一有界解 $p(t)$.

(Ⅱ) 由于 $p(t+T)$ 也是(1) 的有界解,由唯一性知(1) 有唯一 T 周期解.

定理 4 若(H1),(H4) 及(H5) 成立,此外

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|x|\leqslant n}|g(t,x)| = b(0\leqslant b\leqslant \frac{a}{\beta})(1-\frac{1}{K}-M),$$

对 $t\in R$ 一致成立,其中 a,K,M 为假设所给,β 为引理所给,则(1) 至少有一 T 周期解.

证明 令 C 表 R 到 R^n 的有界连续函数组成的线性空间,$B=\{u(t)\in C|u(t+T)|=u(t)\}$,对 $\forall\, u\in B$ 定义范数 $\|u\| = \sup\limits_{0\leqslant 1\leqslant t}|u(t)|$,则 B 按上述范数构成一 Banach 空间. $\forall\, u(t)\in B$,由定理 3 知方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)-\int_{-\infty}^{t}B(t,s)x(s)\mathrm{d}s) = A(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\mathrm{d}s+g(t,u(t))+f(t)$$

有唯一 T 周期解 $x_u(t)$(相当于定理 3 的 $g(t,x)\equiv 0$),定义 $B\to B$ 的算子如下

$$F(u(t)) = x_u(t),\quad \forall\, u\in B.$$

记 $D_n=\{u|u\in B,\|u\|\leqslant n|\}$,其中 n 为自然数,则存在 N 使 $FD_N\subseteq D_N$.

反之对任意 n 存在 $u_n\in B$ 使 $\|F(u_n)\|>n$ 由于

$$x_{u_n}(t) = \int_{-\infty}^{t}X(t)X^{-1}(r)[\int_{-\infty}^{r}C(r,s)x_{u_n}(s)\mathrm{d}s+g(r,u_n(r))+f(r)+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_{-\infty}^{r}B(r,s)x_{u_n}(s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}r,$$

与定理 1 证明类似可得

$$\frac{1}{n}\|x_{u_n}(t)\| \leqslant \frac{1}{n}\|(\frac{1}{K}+M)\| + \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{r}^{t}b(s)\mathrm{d}s)g(r,un(r)\mathrm{d}r) + \frac{1}{n}M_0\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{r}^{t}b(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}r,$$

由引理 3 及 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sup\limits_{|x|\leqslant n}|g(t,x)| = 0$ 对 $t\in R$ 一致成立. 故对任意 $\varepsilon>0$ 及 $0<r<\frac{a}{\beta}\left(1-\frac{1}{K}-M\right)$ 存在 N 当 $n>N$ 时

$$\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{r}^{t}b(s)\mathrm{d}s)g(r,u_n(r)\mathrm{d}r<\frac{\beta}{a}r,\quad \frac{1}{n}M_0\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{-\infty}^{t}b(s)\mathrm{d}s)\mathrm{d}r<\varepsilon,$$

故由(4) 当 $n>N$ 时

$$\frac{1}{n}\|F(u_n(t))\| = \frac{1}{n}\|x_{u_n}(t)\| \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{K}-M}\frac{\beta}{a}r+\frac{1}{1-\frac{1}{K}-M}\varepsilon,$$

从而有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\|F(u_n(t))\| \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{K}-M}\frac{\beta}{a}r<1.$$

与对任意 n:$\frac{1}{n}\|F(u_n(t))\|>1$ 矛盾,故存在 N 使 $FD_N\subseteq D_N$.

F 在 D_N 中连续.

设 $F(u_i(t)) = x_{u_i}(t)\ (i=1,2)$,由

$$x_{u_i}(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t)X^{-1}(r)\Big[\int_{-\infty}^{t}C(r,s)x_{u_i}(s)\mathrm{d}s+g(r,u_i(r))+f(r)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_{-\infty}^{r}B(r,s)x_{u_i}(s)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}r,$$

易知

$$\|x_{u_1}(t)-x_{u_2}(t)\|\leqslant\frac{1}{1-\frac{1}{K}-M}\int_{-\infty}^{t}\exp\Big(\int_{r}^{t}b(s)\mathrm{d}s\Big)|g(r,u_1(r))-g(r,u_2(r))|\mathrm{d}r.$$

由 $g(t,x)$ 的连续性与周期性知:$g(t,x)$ 在 $R\times\{x\in R^n|\ |x|<\delta\}$ 上一致连续. 故对任意 $\epsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时有

$$\|x_{u_1}(t)-x_{u_2}(t)\|\leqslant\frac{1}{1-\frac{1}{K}-M}\frac{\beta}{a}\epsilon,$$

即 F 在 D_N 中连续.

FD_N 是 B 中的紧子集.

由 $FD_N\subseteq D_N$ 故 $\{F(u(t))|u\in D_N\}$ 在 B 中一致有界, 与定理3的证明完全类似有 $\{x_u(t)|u\in D_N\}$ 为等度连续, 由 Ascoli-Arzela 定理知:FD_N是 B 中的紧子集.

综让所述,$F:D_N\to D_N$为全连续算子, 故由 Schauder 定理知 F 在 D_N 中至少有一个不动点, 即(1) 至少有一个 T 周期解.

注　文[1] 中($B(t,s)\equiv0$) 要求 $b=0$.

3 举　例

考虑如下方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x(t)-\int_{-\infty}^{t}B(t,s)x(s)\mathrm{d}s\Big)$$
$$=-|\sin t|x(t)+\int_{-\infty}^{t}\exp(-2(t-s)|\sin t|x(s)\mathrm{d}s+b\cos t|x(t)|+\sin 2t,\qquad(5)$$

则有

$$M_0=\sup_{t\in R}|\sin 2t|=1,M_1=\sup_{t\in R}|A(t)|=1,a=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi},b(t)=-|\sin t|.$$

若 $B(t,s)$ 满足:$B(t+2\pi,s+2\pi)=B(t,s)$,$\int_{-\infty}^{t}|B(t,s)|\mathrm{d}s$ 连续, $M=\sup_{t\in R}\int_{-\infty}^{t}|B(t,s)|\mathrm{d}s<\infty$ 且存在 $K>0$:$\frac{1}{K}+M<1$ 使 $0\leqslant b\leqslant\frac{1}{\pi}(1-\frac{1}{K}-M)$ 且

$$-|\sin t|+K\Big[\frac{1}{2}|\sin t|+\int_{-\infty}^{t}|B(t,s)|\mathrm{d}s\Big]\leqslant0$$

(这样的 $B(t,s)$ 一定存在, 如 $B(t,s)=e^{-5(1-s)}|\sin t|$ 即满足要求), 故(5) 有 2π 周期解, 而即使 $B(t,s)\equiv0$, 若 $b\neq0$,[1] 中定理条件无法满足, 得不出 2π 周期解存在性.

参考文献：

[1] 王全义. 具有无限时滞的积分微分方程的周期解的存在性、唯一性与稳定性 [J]. 应用数学学报，1998，**21**(2)：312－318.
WANG Quan-yi. *The existence and uniqueness and stability of periodic solution of integrodifferential equations with infinite delay* [J]. Acta. Math. Appl. Sinica，1998，**21**(2)：312－318. (in Chinese)

[2] 黄启昌. 具无限时滞的泛函微分方程的周期解的存在性 [J]. 中国科学(A 辑)，1984，**10**：881—889.
HUANG Qi-chang. *The existence of periodic solution of functional differential equations with infinite delay* [J]. Sci. Sinica，Ser. A，1984，**10**：881－889. (in Chinese)

[3] 贺明科. 一类中立型高维周期微分系统的周期解 [J]. 数学学报，1999，**42**(2)：271—280.
HE Ming-ke. *Periodic solution to a class of neutral higher dimensional periodic differential system* [J]. Acta. Math. Sinica，1999，**42**(2)：271－280. (in Chinese)

[4] BURTON T. *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations* [M]. Orlando，FL：Academic Press Inc.，1985.

The Existence，Uniqueness and Stability of Periodic Solution on a Neutral Integro-Differential Equation with Infinite Delay

YANG Xi-tao

(Institute of Mathematics and Software，Xiangtan Institute of Technology，Hunan 411201，China)

Abstract：We prove the uniform boundedness，uniform stability of solution and unique existence of periodic solution on a neutral integro-differential equation with infinite delay，extend and improve the corresponding result made by Wang quan-yi on“the Existence，uniqueness and stability of periodic Solution on a integro-differential equation with infinite delay”.

Key words：uniformly stability；uniformly boundedness；periodic solution；delay.