第23卷第3期 2003年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 23 No. 3 Aug. 2003

Szász型算子线性组合的同时逼近*

郭顺生， 齐秋兰
(河北师范大学数学与信息科学学院，河北 石家庄 050016)

摘 要：本文利用$\omega_{\varphi^{\lambda}}^{2r}(f,t)$代替$\omega_{\varphi^{\lambda}}^{r}(f,t)$给出了Szász-Kantorovich算子线性组合同时逼近的估计.

关键词：Szász型算子；线性组合；同时逼近；光滑模.
分类号：AMS(2000) 41A25,41A36/CLC number：O174.41
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2003)03-0497-06

1 引 言

Szász-Kantorovich算子如下定义：

$$S_n^*(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\mathrm{d}tS_{n,k}(x),\ S_{n,k}(x)=e^{-nx}(nx)^k/k!,$$

其线性组合算子[1]：

$$S_{n,r}^*(f,x)=\sum_{i=0}^{r-1}C_i(n)S_{n_i}^*(f,x),$$

其中$n_i,C_i(n)$满足

$$\text{(a) } n=n_0<\cdots<n_{r-1}\leqslant Kn;\quad \text{(b) } \sum_{i=0}^{r-1}|C_i(n)|\leqslant C;$$
$$\text{(c) } \sum_{i=0}^{r-1}C_i(n)=1;\quad \text{(d) } \sum_{i=0}^{r-1}C_i(n)n_i^{-\rho}=0,\rho=1,\cdots,r-1. \tag{1.1}$$

$C_B[0,+\infty)$是$[0,+\infty)$上的连续有界函数集合，广义的连续模及K-泛函定义如下：

$$\omega_{\varphi^{\lambda}}^{r}(f,t)=\sup_{0<h\leqslant t}\ \sup_{x\pm\frac{rh}{2}\varphi^{\lambda}(x)\in[0,+\infty)}|\Delta_{h\varphi^{\lambda}}^{r}(x)f(x)|,$$

$$K_{\varphi^{\lambda}}(f,t^r)=\inf_{g^{(r-1)}\in A.C._{loc}}\{\|f-g\|+t^r\|\varphi^{\lambda}g^{(r)}\|\},$$

其中

* 收稿日期：2001-01-11
基金项目：河北省自然科学基金(101090)和河北师范大学博士基金(103256)资助项目.
作者简介：郭顺生(1939-)，男，教授，博导.

$$\Delta_h f(x) = f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2}),$$
$$\Delta_h^r f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{r-1} f(x)),$$
$$\varphi^2(x) = x, \|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

连续模与K-泛函有如下等价关系：

$$\omega_{\varphi^\lambda}^r(f,t) \sim K_{\varphi^\lambda}(f,t^r).$$

当$f^{(s)} \in C_B[0,\infty), n \in N, s \in N_0$时，

$$S_n^{*(s)}(f,x) = n^{s+1}\sum_{k=0}^{\infty} S_{n,k}(x)\int_0^{\frac{1}{n}}\cdots\int_0^{\frac{1}{n}}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f^{(s)}(t+\sum_{j=1}^{s}u_j)\mathrm{d}t\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_s.$$

为了方便，引入新算子：设$g \in C_B[0,\infty)$，

$$S_{n,s}^*(g,x) = n^{s+1}\sum_{k=0}^{\infty} S_{n,k}(x)\int_0^{\frac{1}{n}}\cdots\int_0^{\frac{1}{n}}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t+\sum_{j=1}^{s}u_j)\mathrm{d}t\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_s.$$

于是，当$f^{(s)} \in C_B[0,\infty)$时，$S_n^{*(s)}(f,x) = S_{n,s}^*(f^{(s)},x)$.

对于$f \in C_B[0,\infty)$，定义$S_{n,s}^*$的线性组合：$S_{n,r,s}^*(f,x) = \sum_{i=0}^{r-1} C_i(n) S_{n_i,s}^*(f,x)$，其中$C_i(n)$满足(1.1).

在[1]第九章中，Ditzian 和 Totik 证明了：

$$\| S_{n,r}^* f - f \| = O(n^{-\frac{\alpha}{2}}) \Leftrightarrow \omega_\varphi^{2r}(f,t) = O(t^\alpha),\ \alpha < 2r. \tag{1.2}$$

在[2]中Ditzian引进了$\omega_{\varphi^\lambda}^2(f,t)$得到了关于Bernstein算子正定理的有趣结果并统一了用$\omega^2(f,t)$和$\omega_\varphi^2(f,t)$得到的结果. 在[3]中我们利用$\omega_{\varphi^\lambda}^r(f,t)$讨论了Szász型算子线性组合的逼近，得到了：当$f^{(s)} \in C_B[0,\infty), 0 < \alpha - s < r$时，以下命题等价：

$$|(S_{n,r}^*(f,x) - f(x))^{(s)}| = O\left((n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{\alpha-s}\right), \tag{1.3}$$

$$\omega_{\varphi^\lambda}^r(f^{(s)},t) = O(t^{\alpha-s}), \tag{1.4}$$

其中$\delta_n(x) = \max\{\varphi(x), \frac{1}{\sqrt{n}}\}, \varphi(x) = \sqrt{x}$. 此结果推广了[4]的结果. 可以看到，当$s=0$，$\lambda=1$时，(1.2)的结果优于[3]，但是，这种差别是由问题本身决定的。当$\lambda=0$时，[3]中的$\omega_\varphi^r(f,t)$不可能由(1.2)中的$\omega_\varphi^{2r}(f,t)$代替。本文将就算子$S_{n,r}^*$讨论同时逼近并且考虑对哪些λ和α，[3]中的$\omega_{\varphi^\lambda}^r(f,t)$，可由$\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)$代替. 本文的主要结果是：

定理1 设$f^{(s)} \in C_B[0,+\infty), s \in N_0, r \in N, 0 < \alpha - s < \frac{2r}{2-\lambda}, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，有

$$|S_{n,r}^{*(s)}(f,x) - f^{(s)}(x)| = O\left((n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{\alpha-s}\right) \Leftrightarrow \omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f^{(s)},t) = O(t^{\alpha-s}). \tag{1.4}$$

注1 当$\lambda=1, s=0$，(1.2)是(1.4)的特殊情况.

文中的C代表不依赖n与x的常数，不同地方可能数值不同.

2 引　理

引理2.1 设$f^{(s)}(x) \in C_B[0,\infty)$（$[0,+\infty)$上的连续有界函数集合），$r \geqslant 2, f^{(2r-1)}(x)$

$\in A.C._{loc}$，当 $r\lambda - m - s > 0$ 时，则

$$|\varphi^{2r\lambda-2m-2s}(x)f^{(2r-m-s)}(x)| \leqslant C(\psi^{2r(\lambda-1)}(x)\|f\| + \|\varphi^{2r\lambda}f^{(2r)}\|),$$

其中 $\psi(x) = \max\{\varphi(x),1\}$.

引理 2.2 设 $R_{2r}(f,t,x) = \int_x^t (t-u)^{2r-1}f^{(2r)}(u)\mathrm{d}u, r \in N, x \in E_n = [\frac{1}{n}, +\infty)$，有

$$|S_{n,r,s}^{*}(R_{2r}(f,\cdot,x),x)| \leqslant Cn^{-r}\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)\|\varphi^{2r\lambda}f^{(2r)}\|.$$

引理 2.3 设 $0 < \alpha - s < \min\{\frac{2r}{2-\lambda}, 2r\}, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，若 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f^{(s)},t) = O(t^{\alpha-s})$，则

$$\omega^i(f^{(s)},t) = O(t^{(\alpha-s)(1-\frac{\lambda}{2})}), r \leqslant i \leqslant 2r.$$

引理 2.4[3] 设 $0 < t < \frac{1}{16r}, rt < x, 0 < \beta < 2r$，则

$$\int\cdots\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \varphi^{-\beta}(x+u_1+\cdots+u_{2r})\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{2r} \leqslant Ct^{2r}\varphi^{-\beta}(x).$$

引理 2.5 设 $r \in N, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, 0 < \alpha - s < 2r$，则

$$|\varphi^{2r\lambda}(x)S_{n,s}^{*(2r)}(f,x)| \leqslant Cn^r\delta_n^{-2r+2r\lambda}(x)\|f\|, \tag{2.1}$$

$$|\varphi^{2r\lambda}(x)S_{n,s}^{*(2r)}(f,x)| \leqslant C\|\varphi^{2r\lambda}f^{(2r)}\|. \tag{2.2}$$

3 正逆定理

定理 2 设 $f^{(s)}(x) \in C_B[0,\infty), r \in N, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, J = \max\{i \mid r\lambda - 2r + i \leqslant 0, i \leqslant 2r-1\}$，则

$$|S_{n,r}^{*(s)}(f,x) - f^{(s)}(x)| \leqslant C\Big(\sum_{i=r}^{J}\omega^i(f^{(s)},(n^{-r}\varphi^{2(i-r)}(x))^{\frac{1}{i}})\Big) +$$

$$C\Big(\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f^{(s)},n^{-\frac{1}{2}}\varphi^{1-\lambda}(x)) + n^{-r}\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)\|f^{(s)}\|\Big). \tag{3.1}$$

证明 情况 1. $x \in E_n = [\frac{1}{n},\infty)$. 根据 $K_{\varphi^\lambda}(f,t^r)$ 的定义及关系 $\omega_{\varphi^\lambda}^r(f,t) \sim K_{\varphi^\lambda}(f,t^r)$，我们可选择 $g = g_{n,x,\lambda}$ 满足

$$\|f^{(s)} - g\| + (n^{-\frac{1}{2}}\varphi^{1-\lambda}(x))^{2r}\|\varphi^{2r\lambda}g^{(2r)}\| \leqslant C\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f^{(s)},n^{-\frac{1}{2}}\varphi^{1-\lambda}(x)). \tag{3.2}$$

由于

$$|S_{n,r}^{*(s)}(f,x) - f^{(s)}(x)| \leqslant C\|f^{(s)} - g\| + |S_{n,r,s}^{*}(g,x) - g(x)|,$$

下面我们估计第二部分. 记 $R_{n,i}(x) = S_{n,r,s}^{*}((t-x)^i,x), \vec{\Delta}_h f(x) = f(x+h) - f(x), \vec{\Delta}_h^r f(x) = \vec{\Delta}_h(\vec{\Delta}_h^{r-1}f(x))$,

$$\vec{\omega}^r(f,t) = \sup_{0<h\leqslant t}\sup_{x+rh\in[0,+\infty)}|\vec{\Delta}_h^r f(x)|.$$

由[1]p26 知：$\omega^r(f,t) \sim \vec{\omega}^r(f,t)$.

若 $T_{n,i,j_1,\cdots,j_{k-1}}((t-x)^{j_k},x) = C_{i,j_1,\cdots,j_k}|R_{n,i}(x)|^{\frac{j_k}{i}}\mathrm{sgn}R_{n,i}(x), (i < j_1 < \cdots < j_k \leqslant J)$，定义算子

$$T_{n,i,j_1,\cdots,j_k}(g,x) = -\frac{C_{i,j_1,\cdots,j_k}}{j_k!}\mathrm{sgn}R_{n,i}(x)\vec{\Delta}_{|R_{n,i}(x)|^{\frac{1}{i}}}^{j_k}g(x),$$

其中 $C_{i,j_1,\cdots,j_k,j}$ 是依赖 $i,j_1,\cdots,j_k,j$ 而与 n,x 无关的常数. 令

$$A_{n,s}(g,x)=S^*_{n,r,s}(g,x)+\sum_{i=r}^{J}\Big\{T_{n,i}(g,x)+\sum_{r\leqslant i<j_1<\cdots<j_k\leqslant J}T_{n,i,j_1,\cdots,j_k}(g,x)\Big\},$$

其中第二个和式是对所有满足 $r\leqslant i<j_1<\cdots<j_k\leqslant J$ 的 $j_1,\cdots,j_k$ 求的. 经计算

$$\|A_{n,s}\|\leqslant M+\sum_{i=r}^{J}\Big\{\frac{2^i}{i!}+\sum_{r\leqslant i<j_1<\cdots<j_k\leqslant J}|C_{i,j_1,\cdots,j_k}|\frac{2^{j_k}}{j_k!}\Big\}\leqslant C. \tag{3.3}$$

当 $x\in E_n$ 时, $\varphi^{-1}(x)\leqslant\sqrt{n}$, $J+1\leqslant j\leqslant 2r$, 利用[4]引理 2.3 可得

$$|A_{n,s}((t-x)^j,x)|\leqslant C|R_{n,i}(x)|^{\frac{j}{i}}\leqslant Cn^{-r}\varphi^{2(j-r)}(x). \tag{3.4}$$

结合[1](9.5.5)及 $A_{n,s}(g,x)$ 的定义知:

$$A_{n,s}(g,x)-g(x)=\sum_{j=J+1}^{2r-1}\frac{1}{j!}A_{n,s}((t-x)^j,x)g^{(j)}(x)+A_{n,s}(R_{2r}(g,\cdot,x),x)$$
$$:=I_1+I_2. \tag{3.5}$$

首先估计 I_1. 利用(3.4)和引理 2.1, 并注意到 $r=1$ 时, 仅有 I_2, 当 $r\lambda-2r+j>0$ 时,

$$|I_1|\leqslant C|n^{-r}\varphi^{2(j-r)}(x)g^{(j)}(x)|\leqslant Cn^{-r}\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)(\psi^{2r(\lambda-1)}(x)\|g\|+\|\varphi^{2r\lambda}g^{(2r)}\|). \tag{3.6}$$

类似引理 2.2 的证明知

$$|T_{n,i,j_1,\cdots,j_k}(R_{2r}(g,\cdot,x),x)|\leqslant Cn^{-r}\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)\|\varphi^{2r\lambda}g^{(2r)}\|.$$

利用引理 2.2 可得

$$|I_2|\leqslant Cn^{-r}\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)\|\varphi^{2r\lambda}g^{(2r)}\|. \tag{3.7}$$

综合(3.5)-(3.7)及 $A_{n,s}(g,x)$的定义,

$$\begin{aligned}
&|S^*_{n,r,s}(g,x)-g(x)|\\
&\leqslant|A_{n,s}(g,x)-g(x)|+\Big|\sum_{i=r}^{J}\Big\{T_{n,i}(g,x)+\sum_{r\leqslant i<j_1<\cdots<j_k\leqslant J}T_{n,i,j_1,\cdots,j_k}(g,x)\Big\}\Big|\\
&\leqslant C\Big(\sum_{i=r}^{J}\omega^i(g,(n^{-r}\varphi^{2(i-r)}(x))^{\frac{1}{i}})\Big)+n^{-r}\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)(\psi^{2r(\lambda-1)}(x)\|g\|+\|\varphi^{2r\lambda}g^{(2r)}\|)\\
&\leqslant C\Big(\|f^{(s)}-g\|+\sum_{i=r}^{J}\omega^i(f^{(s)},(n^{-r}\varphi^{2(i-r)}(x))^{\frac{1}{i}})\Big)+\\
&\quad n^{-r}\varphi^{2r(1-\lambda)}(x)(\psi^{2r(\lambda-1)}(x)\|f^{(s)}\|+\|\varphi^{2r\lambda}g^{(2r)}\|).
\end{aligned}$$

再由(3.2),(3.1)可证得定理 2 成立.

情况 2. $x\in E_n^c=[0,\frac{1}{n})$. 对固定的 x 选择 $g\equiv g_{n,x}$ 使得

$$\|f^{(s)}-g\|+n^{-r}\|g^{(r)}\|\leqslant C\omega^r(f^{(s)},\frac{1}{n}).$$

由于 $|S^*_{n,r,s}((t-x)^r,x)|\leqslant Cn^{-r}$, $S^*_{n,r,s}((\cdot-x)^i,x)=0$, $0<i\leqslant r-1$, 所以

$$\begin{aligned}
|S^{*(s)}_{n,r}(f,x)-f^{(s)}(x)|&\leqslant C\|f^{(s)}-g\|+|S^*_{n,r,s}(g,x)-g(x)|\\
&\leqslant C(\|f^{(s)}-g\|+n^{-r}\|g^{(r)}\|)\leqslant C\omega^r(f^{(s)},n^{-1}).
\end{aligned}$$

综上所述, 定理 2 证得.

定理 1 的证明　“(1.4)$\Rightarrow$(1.3)”. 当 $0\leqslant\lambda\leqslant1$, $0<\alpha-s<\frac{2r}{2-\lambda}$时，根据定理 2 及引理 2.3,

$$|S_{n,r}^{*(s)}(f,x)-f^{(s)}(x)|\leqslant C\Big(\sum_{i=r}^{J}(n^{-r}\delta_n^{2(i-r)}(x))^{\frac{(\alpha-s)(1-\lambda/2)}{i}}+(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{\alpha-s}+n^{-r}\Big). \tag{3.8}$$

由于 $r\leqslant i\leqslant J$, $r\lambda-2r+i\leqslant0$, 且 $\delta_n^{-1}(x)\leqslant\sqrt{n}$, 故

$$(n^{-r}\delta_n^{2(i-r)}(x))^{\frac{(\alpha-s)(1-\lambda/2)}{i}}=(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{\alpha-s}(n^{1/2}\delta_n(x))^{-(\alpha-s)\frac{2r-r\lambda-i}{i}}\leqslant(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{\alpha-s}.$$

注意到 $n^{-r}<(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{\alpha-s}$, 所以“(1.4)$\Rightarrow$(1.3)”成立.

注 2　当 $\alpha>\frac{2r}{2-\lambda}$时，(1.4)不能推出(1.3). 令

$$f^{(s)}(t)=\begin{cases}t^r, t\in[0,1],\\ 0, t\in(1,\infty),\end{cases}\qquad f^{(s)}\in C_B^{(2r+1)}[0,\infty),$$

经计算得 $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f^{(s)},t)=0$. 取 $x=1/n$, $S_{n,r}^{*(s)}(f,x)-f^{(s)}(x)=S_{n,r,s}^{*}((t-x)^r,x)\sim\frac{1}{n^r}$, 但是,

$$(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{\alpha-s}\sim n^{-(\alpha-s)(1-\lambda/2)}.$$

当 $\alpha-s>\frac{2r}{2-\lambda}$时，$(\alpha-s)(1-\lambda/2)>r$, 这样就产生了矛盾，所以(1.4)不能推出(1.3).

“(1.3)$\Rightarrow$(1.4)”. 令 $\gamma_{n,\lambda}(x)=n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x)$, 则

$$\gamma_{n,\lambda}(x\pm kt\varphi^\lambda(x))\leqslant\gamma_{n,\lambda}(2x)\leqslant2\gamma_{n,\lambda}(x)\quad(k\leqslant r).$$

故若 $S_{n,r}^{*(s)}(f,x)-f^{(s)}(x)=O(\gamma_{n,\lambda}^{\alpha-s}(x))$, 对于满足 $n>2r$ 的 n, 应有

$$\begin{aligned}|\Delta_{t\varphi^\lambda(x)}^{2r}f^{(s)}(x)|&\leqslant|\Delta_{t\varphi^\lambda(x)}^{2r}(S_{n,r,s}^{*}(f^{(s)},x)-f^{(s)}(x))|+|\Delta_{t\varphi^\lambda(x)}^{2r}S_{n,r,s}^{*}(f^{(s)},x)|\\&\leqslant C\gamma_{n,\lambda}^{\alpha-s}(x)+\sum_{i=0}^{r-1}|C_i(n)|\int\cdots\int_{-\frac{t\varphi^\lambda(x)}{2}}^{\frac{t\varphi^\lambda(x)}{2}}|S_{n_i,s}^{*(2r)}(f^{(s)}-g,x+\sum_{j=1}^{2r}u_j)|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{2r}+\\&\quad\sum_{i=0}^{r-1}|C_i(n)|\int\cdots\int_{-\frac{t\varphi^\lambda(x)}{2}}^{\frac{t\varphi^\lambda(x)}{2}}|S_{n_i,s}^{*(2r)}(g,x+\sum_{j=1}^{2r}u_j)|\mathrm{d}u_1\cdots du_{2r}\\&:=C\gamma_{n,\lambda}^{\alpha-s}(x)+J_1+J_2.\end{aligned}\tag{3.9}$$

由引理 2.4 及引理 2.5 知

$$J_1\leqslant Ct^{2r}\gamma_{n,\lambda}^{-2r}(x)\,\|f^{(s)}-g\|,\tag{3.10}$$

$$J_2\leqslant Ct^{2r}\,\|\varphi^{2r\lambda}g^{(2r)}\|.\tag{3.11}$$

利用(3.10), (3.11), 选择适当的 g, 可得到

$$|\Delta_{t\varphi^\lambda(x)}^{2r}f^{(s)}(x)|\leqslant C(\gamma_{n,\lambda}^{\alpha-s}(x)+t^{2r}\gamma_{n,\lambda}^{-2r}(x)\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f^{(s)},\gamma_{n,\lambda}(x))).$$

对于满足：$0<\delta<\frac{1}{16r}$的 δ 及满足 $x\geqslant rt\varphi^\lambda(x)$的 x, 选择 n, 使得 $\gamma_{n,\lambda}(x)\leqslant\delta<2\gamma_{n,\lambda}(x)$, 则

$$|\Delta_{t\varphi^\lambda(x)}^{2r}f^{(s)}(x)|\leqslant C\left(\delta^{\alpha-s}+\left(\frac{t}{\delta}\right)^{2r}\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f^{(s)},\delta)\right).$$

故

$$\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f^{(s)},t)\leqslant C\left(\delta^{\alpha-s}+\left(\frac{t}{\delta}\right)^{2r}\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f^{(s)},\delta)\right),$$

由 Berens-Lorentz 引理可得到定理 1.

参考文献：

[1] DITZIAN Z, TOTIK V. *Moduli of Smoothness* [M]. Springer-Verlag, New York, 1987.

[2] DITZIAN Z. *Direct estimate for Bernstein polynomials*[J]. J. Approx. Theory, 1994, **79**: 165—186.

[3] 郭顺生,齐秋兰. Szász 型算子同时逼近的点态估计 [J]. 应用数学学报, 1998, **21**(3): 363-370.
GUO Shun-sheng, QI Qiu-lan. *Pointwise estimates for Szász-type operators* [J]. Acta. Math. Appl. Sinica, 1998, **21**(3): 363—370. (in Chinese)

[4] 李秉政. Szász 型算子同时逼近的点态结果 [J]. 应用数学学报, 1995, **18**(3): 394—403.
LI Bing-zheng. *The pointwise results about simultaneous approximation by means of Szász-type operators* [J]. Acta. Math. Appl. Sinica, 1995, **18**(3): 394—403. (in Chinese)

[5] DITZIAN Z. *Rate of approximation of linear processes* [J]. Acta. Sci. Math., 1985, **48**: 103-128.

Simultaneous Approximation of the Szász-Type Operators

GUO Shun-sheng, QI Qiu-lan

(College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China)

Abstract: In this paper, we consider the linear combinations of Szász-Kantorovich operators and give the characterization in terms of the modulus of smoothness $\omega_{\varphi^\lambda}^{2r}(f,t)$ instead of $\omega_{\varphi^\lambda}^{r}(f,t)$ by means of the pointwise simultaneous approximation.

Key words: Szász-Type operator; linear combination; simultaneous approximation; modulus of smoothness.