第23卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 23 No. 3
2003年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 2003

R^s 空间中的 Lagrange 插值*

冯仁忠[1]，　梁学章[2]，　徐淳宁[3]

(1. 大连理工大学数学科学研究所，辽宁 大连 116024；2. 吉林大学数学研究所，吉林 长春 130012；
3. 吉林大学通信工程学院，吉林 长春 130012)

摘　要：本文给出了构造空间 π_n^s 中 Lagrange 插值适定结点组的添加超平面法以及构造沿无重复 分量代数超曲面插值适定结点组的添加超平面法，从而弄清楚了这两种适定结点组间的几何结构.

关键词：Lagrange 插值；适定结点组；沿超曲面插值.

分类号：AMS(2000) 41A, 30E/CLC number：O174.41，O174.5

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2003)03-0503-07

1 引　言

关于二元 n 次多项式空间中的 Lagrange 插值适定性问题的研究首先应该提到的是梁学章在文[1]中曾将插值的适定性问题转化为一个几何问题，从而可以应用代数几何的方法给出 π_n^2(次数不超过 n 的所有二元多项式空间)的插值适定结点组. 梁在该文中给出了构造 π_n^2 的插值适定结点组的添加一次、二次不可约代数曲线法且在[2]中给出了基于这些点组计算二元 Lagrange 插值多项式的方法. 文[3]还就这几种点组求出其 Vandermonde 行列式，由此进一步证实了其适定性. 1998 年，梁学章和吕春梅在[4]中利用代数曲线理论进一步讨论了二元 Lagrange 插值适定结点组的构造问题且证明了 C^2 中二元插值与沿无重复分量代数曲线上的插值之间的关系. 关于多元插值的研究工作除了以上提到之外，还有 Chung 和 Yao[5]，De Boor 的和 Ron[6]，Gasca 和 Maeztu[7,8]，吕春梅[9]等人也做了一系列有意义的工作. 多元 Lagrange 插值适定结点组的几何特性研究仍是一个很难但又非常有意义的工作，因为它直接关系到有插值格式的构造. 本文在[10]的基础上，将其结果推广到高维空间中. 在文中，我们先给出了构造多项式空间 π_n^s(π_n^s 表示所有 s 变元次数不超过 n 的全体多项式构成的空间)中的 Lagrange 插值适定结点组的添加超曲面法并给出了在无重复分量代数超曲面上满足零插值条件的多项式的分解形式，进一步给出了在代数集上满足零插值条件式的分解形式及构造沿无重复分量代数超曲面插值的适定结点组的添加超平面法，最后给出了 3 维空间中单位球面上

* 收稿日期：2001-04-03
作者简介：冯仁忠(1967-)，男，博士，副教授.

n 次插值适定结点组的构造实例.

首先,我们给出空间 π_n^s 中的 Lagrange 插值适定结点组和沿无重复分量代数超曲面插值的适定结点组的概念.

定义 1.1 设 $Q_1,\cdots,Q_m,m=\binom{n}{n+s}$ 是 R^s 中的 m 个互不相同的点.如果对于 R 中的任一数集 $\{f_i\in R|i=1,\cdots,m\}$,均存在满足下列条件的唯一多项式 $p(X)(X=(x_1,\cdots,x_s))\in\pi_n^s$

$$p(Q_i)=f_i,\quad i=1,\cdots,m, \tag{1}$$

那么我们称点组 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 是 π_n^s 的一个插值适定结点组.

定义 1.2 设 n 为非负整数,$q(X)=0$ 是 $R^s(s>2)$ 中的 k 次无重复分量的代数超曲面,$\mathfrak{R}=\{Q_i\}_{i=1}^{m'}$ 是其上的 m' 个互不相同的点,其中

$$m'=\begin{cases}\binom{s}{n+s}, & \text{当 } n<k \text{ 时},\\ \binom{s}{n+s}-\binom{s}{n+s-k}, & \text{当 } n\geqslant k \text{ 时}.\end{cases}$$

若对任意给定的一组数 $f_1,\cdots,f_{m'}$ 均有满足插值条件

$$p(Q_i)=f_i,i=1,\cdots,m'$$

的多项式 $p(X)\in\pi_n^s$ 存在,则称 $\mathfrak{R}$ 为沿 k 次无重复分量代数超曲面 $q(X)=0$ 插值的 n 次适定结点组,并简记为 $\mathfrak{R}\in I_n^s(q)$($I_n^s(q)$ 表示代数超曲面 $q(X)=0$ 上的所有 n 次插值适定结点组集合).

2 多项式空间 π_n^s 中的 Lagrange 插值适定结点组的构造

关于多项式空间 π_n^s 中的 Lagrange 插值适定结点组的构造,我们有下列添加超曲面法:

定理 2.1(添加超曲面法) 设 $\mathfrak{U}=\{Q_1,\cdots,Q_{d_n}\},d_n=\binom{s}{n+s}$ 是 π_n^s 的一 n 次插值适定结点组.作一条 k 次无重复分量的代数超曲面 $q(X)=0$,使其不通过 $\mathfrak{U}$ 中的任何点.又设 $\mathfrak{R}=\{Q_{d_{n+1}},\cdots,Q_{d_{n+m'}},d_{n+m'}=\binom{n+k+s}{s}$ 为代数超曲面 $q(X)=0$ 上的一 $n+k$ 次插值适定结点组,则 $\mathfrak{R}\cup\mathfrak{U}$ 构成 π_{n+k}^s 的一 $n+k$ 次插值适定结点组.

证明 任意给定一组数 $\{f_i,i=1,\cdots,d_{n+m'}\}$.由于 $\mathfrak{R}$ 是 k 次代数超曲面 $q(X)=0$ 上的 $n+k$ 次插值适定结点组,故存在多项式 $p_s(X)\in\pi_{n+k}^s$,满足插值条件

$$p_s(Q_i)=f_i,\quad i=d_{n+1},\cdots,d_{n+m'}.$$

根据给定条件,k 次无重复分量的代数超曲面 $q(X)=0$ 不通过 $\mathfrak{U}$ 中任何点,故 $q(Q_i)\neq0,i=1,\cdots,d_n$.根据定理的假定 $\mathfrak{U}$ 是 π_n^s 的 n 次插值适定结点组,因而存在唯一多项式 $r(X)\in\pi_n^s$ 满足插值条件

$$r(Q_i)=\frac{f_i-p_s(Q_i)}{q(Q_i)},\quad i=1,\cdots,d_n.$$

于是我们可构造出一多项式 $p(X)=p_s(X)+q(X)r(X)\in\pi_{n+k}^s$,满足插值条件

$$p(Q_i)=f_i,\quad i=1,\cdots,d_{n+m'}.$$

因 $d_{n+m'}=\binom{n+k+s}{s}$ 正好等于 π^s_{n+k}的维数且$\{f_i\}_{i=1}^{d_{n+m'}}$是任取的，所以 $\mathfrak{R}\cup\mathfrak{U}$ 是 π^s_{n+k}的 $n+k$ 次插值适定结点组.

关于在无重复分量代数超曲面上满足零插值条件的多项式具有下列定理给出的分解.

定理 2.2 设 n 为非负整数，k 为自然数

$$m=\begin{cases}\binom{n+s}{s}, & \text{当 } n<k \text{ 时},\\ \binom{n+s}{s}-\binom{n+s-k}{s}, & \text{当 } n\geqslant k \text{ 时}.\end{cases}$$

$q(X)=0$ 为 R^s 中无重复分量的 k 次代数超曲面. $Q_1,\cdots,Q_m$ 为该超曲面上的 m 个互不相同的点，则 $\{Q_i\}_{i=1}^m$构成沿代数超曲面 $q(X)=0$ 插值的 n 次适定结点组的充要条件是：对任何满足插值条件

$$p(Q_i)=0,\quad i=1,\cdots,m \tag{2}$$

的多项式 $p(X)\in\pi^s_n$，均有次数$\leqslant n-k$ 的多项式 $r(X)$，使得

$$p(X)=q(X)r(X). \tag{3}$$

证明 当 $n<k$ 时，定理显然成立. 下面仅就 $n\geqslant k$ 情形来证明.

必要性. 在 k 次超曲面 $q(X)=0$ 之外选一点组 $\alpha=\{Q_{m+1},\cdots,Q_{d_n}\}$，$d_n=\binom{n+s}{s}$，使其构成空间 π^s_{n-k}的一个适定结点组. 于是由定理 2.1 可知 $\alpha\cup\{Q_1,\cdots,Q_m\}$构成 π^s_n 的一个适定结点组. 对应一个满足插值条件(2)的 $p(X)\in\pi^s_n$，我们可以仿照定理 2.1 的证明构造一个形如

$$\bar{p}(X)=q(X)r(X)$$

的多项式，其中 $r(X)\in\pi^s_{n-k}$，使得

$$\bar{p}(Q_i)=0,\ i=1,2,\cdots,m,\quad \bar{p}(Q_i)=p(Q_i),\ i=m+1,\cdots,d_n.$$

从以上看出 $\bar{p}(X)$与 $p(X)$满足相同的插值条件，由插值的唯一性可知

$$p(X)=\bar{p}(X)=q(X)r(X).$$

充分性. 假设(2)，(3)成立. 我们在 k 次超曲面 $q(X)=0$ 之外，任选空间 π^s_{n-k}的一个适定结点组 $\delta=\{Q_{m+1},\cdots,Q_{d_n}\}$，$d_n=\binom{n+s}{s}$，则对任何满足插值条件

$$p(Q_i)=0,\quad i=1,\cdots,d_n$$

的 $p(X)\in\pi^s_n$，均有 $p(X)=q(X)r(X)$. 由于 $q(Q_i)\leqslant 0$，$i=m+1,\cdots,d_n$，故 $r(Q_i)=0$，$i=m+1,\cdots,d_n$. 点组 $\delta=\{Q_{m+1},\cdots,Q_{d_n}\}$是 π^s_{n-k}的适定结点组，于是有 $r(X)\equiv 0$，从而 $p(X)\equiv 0$. 这便说明$\{Q_1,\cdots,Q_{d_n}\}$是 π^s_n 的适定结点组. 现在我们任给 R 中一数组$\{f_i\}_{i=1}^{d_n}$，那么必存在一多项式 $p(X)\in\pi^s_n$，满足插值条件

$$p(Q_i)=f_i,\quad i=1,\cdots,d_n.$$

这便蕴含着$\{Q_i\}_{i=1}^m$是沿超曲面 $q(X)=0$ 插值的 n 次适定结点组.

推论 2.3 设$\{Q_i\}_{i=1}^m$，$m=\binom{n+s}{s}-\binom{n+s-k}{s}$为 k 次无重复分量代数超曲面 $q(X)=0$ 上的点组. $\mathfrak{R}=\{Q_{m+1},\cdots,Q_{d_n}\}$，$d_n=\binom{n+s}{s}$是位于 $q(X)=0$ 之外空间 π^s_{n-k}的一适定结点组. 若$\{Q_1,\cdots,Q_{d_n}\}$能够成为空间 π^s_n 的一适定结点组，那么$\{Q_i\}_{i=1}^m$必是沿 $q(X)=0$ 的一 n 次插值适

定结点组.

证明 设 $p(X)\in\pi_n^s$ 且满足条件

$$p(Q_i)=0,\quad i=1,\cdots,m.$$

由于 $\{Q_i\}_{i=m+1}^{d_n}$ 在 $q(X)=0$ 之外,故 $q(Q_i)\leqslant 0, i=m+1,\cdots,d_n$. 对于插值条件 $\{\frac{p(Q-i)}{q(Q_i)}\}_{i=m+1}^{d_n}$,在适定点组 $\mathfrak{R}$ 下,存在唯一多项式 $r(X)\in\pi_{n-k}^s$,满足插值条件 $r(Q_i)=\frac{p(Q_i)}{q(Q_i)}, i=m+1,\cdots,d_n$. 现构造多项式

$$\bar{p}(X)=q(X)r(X).$$

显然 $\bar{p}(X)\in\pi_n^s$ 且满足条件

$$\bar{p}(Q_i)=0,\ i=1,\cdots,m,\quad \bar{p}(Q_i)=p(Q_i),\ i=m+1,\cdots,d_n.$$

从以上可以看出 $\bar{p}(X)$ 与 $p(X)$ 满足相同的插值条件. 若点组 $\{Q_i,\cdots,Q_{d_n}\}$ 是空间 π_n^s 的插值适定结点组,那么由插值的唯一性可得 $p(X)=\bar{p}(X)=q(X)r(X)$. 于是由定理 2.2 可知 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 是 $q(X)=0$ 上的 n 次插值适定结点组.

3 无重复分量代数超曲面及代数集上的插值适定结点组的构造

我们用 $S(f)$ 表示代数方程 $f=0$ 所确定的 R^s 中的代数超曲面. 若 F 为一多项式集,则用 $S(F)$ 表示 F 确定的代数集,即使 F 中多项式皆取值为零的点集. 用 $S(g,f)$ 表示代数超曲面 $S(f)$ 与代数超曲面 $S(g)$ 的交线,即他们的公共点.

首先我们给出如下代数集上的 n 次插值适定结点组的概念:

定义 3.1 设 $q(X)=0$ 是 R^s 中 k 次无重复分量的代数超曲面,$h(X)=0$ 是 R^s 中一次超平面,$\{Q_i\}_{i=1}^m, m=\binom{n+s-1}{s-1}-\binom{n+s-1-k}{s-1}$ 是 $S(q,h)$ 中的点组. 对于任意给定的一组数 $\{f_i\}_{i=1}^m$,如果总存在满足下列插值条件的多项式 $p(X)\in\pi_n^s$

$$p(Q_i)=f_i,\quad i=1,\cdots,m,$$

则我们称点组 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 是沿代数集 $S(q,h)$ 插值的 n 次适定结点组.

关于在代数集 $S(q,h)$ 上满足零插值条件的多项式具有下述定理给出的分解.

定理 3.2 设 $m=\binom{s-1}{n+s-1}-\binom{s-1}{n+s-1-k}$,$\{Q_i\}_{i=1}^m$ 是代数集 $S(q,h)$ 上的点组,那么 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 成为代数集上的 n 次插值适定结点组的充要条件是对所有满足条件

$$p(Q_i)=0,\quad i=1,\cdots,m \tag{4}$$

的多项式 $p(X)\in\pi_n^s$,均有如下分解

$$p(X)=\alpha(X)q(X)+\beta(X)h(X), \tag{5}$$

其中 $\deg\alpha(X)\leqslant n-k, \deg\beta(X)\leqslant n-1$.

证明 *必要性*. 设 $X=(x_1,\cdots,x_s)\in R^s, Q_i=(x_1^i,\cdots,x_s^i)\in S(q,h), LT(h)=x_s(LT(f)$ 表示按字典序非零多项式 f 的领项). 那么表达式 $h=0$ 可表示为 $x_s=l(x_1,\cdots,x_{s-1})$ 且 $x_s^i=l(x_1^i,\cdots,x_{s-1}^i)$. 设用 $h(X)$ 除 $q(X)$ 所得余式为 $r(X)=q(X)-t(X)h(X)$(按字典序). 令 $\{Q_i\}'=(x_1^i,\cdots,x_{s-1}^i)$. 如果 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 是 $S(q,h)$ 上的 n 次插值适定结点组,那么我们可以证明 $\{Q_i'\}_{i=1}^m$

是沿 $r(X)=0$ 插值的 n 次适定结点组，即 $\{Q_i'\}_{i=1}^m \in I_n^{(s-1)}(r)$. 任给 $Q_i \in S(q,h)$，那么

$$r(Q_i') = (q-th)(Q_i') = q(Q_i) - t(Q_i)h(Q_i) = 0. \tag{6}$$

(6)说明 $\{Q_i'\}_{i=1}^m$ 是 $r=0$ 上的一个点组. m 正好等于 $I_n^{(s-1)}(r)$ 的维数. 任给一组数 $\{f_i\}_{i=1}^m$，由于 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 是 $S(q,h)$ 上的 n 次插值适定结点组，故存在多项式 $\bar{p}(X)\in\pi_n^s$，满足

$$\bar{p}(Q_i) = f_i,\quad i=1,\cdots,m.$$

设用 $h(X)$ 除 $\bar{p}(X)$ 所得余式为 $B(X)$，即

$$\bar{p}(X) = A(X)h(X) + B(X),$$

其中 $A(X)\in\pi_{n-1}^s, B(X)\in\pi_n^{s-1}$. 很显然 $B(X)$ 满足插值条件

$$B(Q_i') = \bar{p}(Q_i) = f-i,\quad i=1,\cdots,m.$$

这说明了 $\{Q_i'\}_{i=1}^m\in I_n^{(s-1)}(r)$. 接下来，证明满足条件(4)的多项式 $p(X)$ 具有(5)的形式. 我们也用 $h(X)$ 除 $p(X)$ 得

$$p(X) = \bar{t}(X)h(X) + c(X), \tag{7}$$

其中 $\bar{t}(X)\in\pi_{n-1}^s, c(X)\in\pi_n^{(s-1)}$. 因 $p(X)$ 满足条件(4)，故有 $c(Q_i')=0, i=1,\cdots,m$. 而 $\{Q_i'\}_{i=1}^m \in I_n^{(s-1)}(r)$，于是由定理 2.2

$$c(X) = D(X)r(X) = D(X)(q(X) - t(X)h(X)).$$

代入(7)，有

$$\begin{aligned} p(X) &= \bar{t}(X)h(X) + D(X)q(X) - D(X)t(X)h(X) \\ &= (\bar{t}(X) - D(X)t(X))h(X) + D(X)q(X). \end{aligned}$$

令 $\beta(X)=\bar{t}(X)-D(X)t(X), \alpha(X)=D(X)$. 那么我们有

$$p(X) = \beta(X)h(X) + \alpha(X)q(X).$$

必要性得证.

充分性. 任取 $\mathfrak{R}_{n-1}\in I_{n-1}^s(q)$ 且要求 $\mathfrak{R}_{n-1}\cup S(q,h)=\varnothing$，则任何满足插值条件

$$p(Q_i) = 0,\quad Q_i \in \mathfrak{R}_{n-1} \cup \{Q_i\}_{i=1}^m$$

的多项式 $p(X)\in\pi_n^s$ 均有

$$p(X) = \alpha(X)q(X) + \beta(X)h(X).$$

因 $q(Q_i)=0, h(Q_i)\neq 0, \forall\, Q_i\in\mathfrak{R}_{n-1}$，故有 $\beta(Q_i)=0, Q_i\in\mathfrak{R}_{n-1}$. 又由于 $\deg\beta(X)\leqslant n-1, \mathfrak{R}_{n-1}\in I_{n-1}^s(q)$，所以由定理 2.2 有 $\beta(X)$ 代入(8)中，有

$$p(X) = (\alpha(X) + \gamma(X)h(X))q(X),$$

这便说明点组 $\mathfrak{R}_{n-1}\cup\{Q_i\}_{i=1}^m\in I_n^s(q)$. 于是任给一组数 $\{f_i\}_{i=1}^{d_n}, d_n=\binom{n+s}{s}-\binom{n+s-k}{s}$，存在一多项式 $\bar{p}(X)\in\pi_n^s$，满足插值条件

$$\bar{p}(Q_i) = f_i,\ Q_i \in \mathfrak{R}_{n-1} \cup \{Q_i\}_{i=1}^m,$$

这便蕴含着 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 是代数集 $S(q,h)$ 上的 n 次插值适定结点组.

利用定理 3.2 及其充分性证明方法，我们可得到下列构造代数超曲面上的 n 次插值适定结点组的方法-添加超平面法.

推论 3.3（添加超平面法） 假设 $q(X)=0$ 是 R^s 中的 k 次无重复分量代数超曲面，$\mathfrak{R}_n\in I_n^s(q)$. 一次代数超平面 $h(X)=0$ 与 $q(X)=0$ 相交但不通过 $\mathfrak{R}_n$. 在 $S(q,h)$ 上取它的一个 $n+$

1 次插值适定结点组 $\{Q_i\}_{i=1}^m, m = \frac{s}{n+1}\binom{n+s}{s} - \frac{s}{n+s+1-k}\binom{n+s-k}{s}$，则

$$\Re_n \cup \{Q_i\}_{i=1}^m \in I_{n+1}^s(q).$$

这个推论的证明略.

3 维空间中的单位球面上的 n 次插值适定结点组的构造实例

设 $Q(X)=x^2+y^2+z^2-1=0$ 表示 3 维空间中的单位球面. 下面我们在 n 为奇数和偶数两种情况下给出其上的 n 次插值适定结点组.

(1) 假设 n 是奇数. 令 $\theta_i=\frac{i\pi}{n}, i=1,\cdots,n$. 单位向量 $N=(\cos\theta_i, 0, -\sin\theta_i)$ 作为经过原点的平面 h_i 的法向量. 代数集 $S(Q,h_i)$

$$\begin{cases} x\cos\theta_i - z\sin\theta_i = 0, \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

可参数化为

$$\begin{cases} x = \sin\theta_i\sin\varphi_j, \\ y = \cos\varphi_j, \\ z = \cos\theta_i\sin\varphi_j. \end{cases}$$

令 $\varphi_j = \frac{j}{2i+3}2\pi, j=1,\cdots,2i+1$. 在 $S(Q,h_i)$ 上取一点集 $\Phi_i = \{a_j^i = (\sin\theta_i\sin\varphi_j, \cos\varphi_j, \cos\theta_i\sin\varphi_j), j=1,\cdots,2i+1\}$. 由[10]中的定理 2 可知 Φ_i 构成代数集 $S(Q,h_i)$ 上的 i 次插值适定结点组. 我们知道单位球面上一点 $\{(1,0,0)\}$ 构成了球面上的零次插值适定结点组. 在代数集 $S(Q,h_i)$ 上所取的任何两个点集 Φ_i 和 $\Phi_j (i\neq j)$ 不相交并且点集 Φ_i 中的点的个数恰好等于每次添加所需点数 $2i+1$. 由推论 3.3，我们不难得出点集 $\Phi_1\cup\Phi_2\cup\cdots\Phi_n\cup\{(1,0,0)\}$ 构成了单位球面上的 n 次插值适定结点组.

(2) 若 n 是偶数. 令 $\theta_i=\frac{i\pi}{n+1}, i=1,\cdots,n$. 单位向量 $N=(\cos\theta_i, 0, -\sin\theta_i)$ 作为经过原点的平面 h_i 的法向量. 代数集 $S(Q,h_i)$

$$\begin{cases} x\cos\theta_i - z\sin\theta_i = 0, \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

可参数化为

$$\begin{cases} x = \sin\theta_i\sin\varphi_j, \\ y = \cos\varphi_j, \\ z = \cos\theta_i\sin\varphi_j. \end{cases}$$

令 $\varphi_j=\frac{j}{2i+3}2\pi, j=1,\cdots,2i+1$. 在 $S(Q,h_i)$ 上取点集 $\Phi_i=\{a_j^i=(\sin\theta_i\sin\varphi_j, \cos\varphi_j, \cos\theta_i\sin\varphi_j), j=1,\cdots,2i+1\}$. 于是由以上分析可得点集 $\Phi_1\cup\Phi_2\cup\cdots\Phi_n\cup\{(1,0,0)\}$ 也构成了 3 维空间中单位球面上的一 n 次插值适定结点组.

参考文献：

[1] LIANG Xue-zhang. *Properly posed nodes for bivariate interpolation and the superposed interpolation* [J]. Bulletin of Jilin University, 1979, 1: 27—32.

[2] 王仁宏,梁学章. 多元函数逼近 [M]. 北京:科学出版社, 1988.
WANG Ren-hong, LIANG Xue-zhang. *Approximation by Multivariate Functions* [M]. Beijing: Science Press, 1988. (In Chinese)
[3] CHUI C K, LAI M J. *Vandermonde Determinant and Lagrange Interpolation in* R^s[M]. in Nonlinear and Convex Analysis, B. L. Lin(ed.), Marcel Dekker, New York, 1987, 23—36.
[4] LIANG X Z, LÜ C M. *Properly Posed Set of Nodes for Bivariate Lagrange Interpolation* [M]. Approximation Theory IX, Vol. 1, Computational Aspect, Vanderbilt University Press, 1998, 180—196.
[5] CHUNG K C, YAO T H. *On lattices admitting unique Lagrange interpolation* [J]. SIAM J. Numer. Anal., 1977, **14**: 735—743.
[6] DE BOOR C, RON A. *The least solution for the polynomial interpolation problem* [J]. Math. Z., 1992, **210**: 347—378.
[7] GASCA M, MAEZTU J I. *On Lagrange and Hermite interpolation in* R^k[J]. Numer. Math., 1982, **39**: 1—14.
[8] GASCA M. *Multivariate Polynomial Interpolation* [M]. Computation of Curves and Surfaces, Kluwer, 1990, 215—236.
[9] 吕春梅. 多元多项式插值 [D]. 吉林大学博士学位论文, 1997, 17—29.
LÜ Chun-mei. *Multivariate Polynomial Interpolation* [D]. Ph. D. Dissertation, Jilin University, 1997, 17—29. (in Chinese)
[10] LIANG Xue-zhang, FENG Ren-zhong, CUI Li-hong. *On Lagrange interpolation on Sphere* [J]. J. Northeastern. Math., 2000, **16**(2): 243—252.

Lagrange Interpolation in R^s

FENG Ren-zhong[1], LIANG Xue-zhang[2], XU Chun-ning[3]
(1. Inst. of Math. Sci., Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China;
2. Inst. of Math., Jilin University, Changchun 130012, China;
3. School of Communication, Jilin University, Changchun 130012, China)

Abstract: In the paper, we give a hypersurface-superposition process and a hyperplane-superposition process to construct a properly posed set of nodes for Lagrange interpolation in space π_n^s and a properly posed set of nodes for Lagrange interpolation along a hypersurface without multiple factors, respectively, and then find out the geometric structure between the two kinds of properly posed sets of nodes.

Key words: lagrange interpolation; properly posed set of nodes; interpolation along hypersurface.