

Halin 图的点着色算法*

肖立， 娄定俊

(中山大学计算机科学系, 广东 广州 510275)

摘要:本文解决了 Halin 图的点色数问题, 并给出了一个可在线性时间内对 Halin 图进行点着色的算法.

关键词:Halin 图; 奇轮; 偶轮; 扇.

分类号:AMS(2000) 05C15/CLC O157.5

文献标识码:A

文章编号:1000-341X(2003)03-0535-06

在平面上嵌入一棵树 T , T 的每个内部顶点的度数至少为 3 并且 T 至少有一个内部顶点. 作一个圈 C 连接 T 的所有叶顶点, T 的所有叶顶点组成 C 上的所有顶点. 这样得到的平面图称为 Halin 图^[1]. 树 T 称为 Halin 图的特征树. 圈 C 称为 Halin 图的伴随圈.

Halin 图是作为极小 3-连通平面图被引入的^[1]. 文[2]证明了 Halin 图是 Hamilton 连通的. 通常的 NP 完全问题在 Halin 图上可能不是 NP 完全的, 文[3]就是一个例子, 它在线性时间内解决了 Halin 图上的旅行售货员问题. 但在 Halin 图上并不是所有 NP 完全的问题都有多项式时间的解法, 例如文[4]提到的有关子图同构和超图同构的问题在 Halin 图上仍然是 NP 完全的. 文[5-9]较为完整的解决了 Halin 图的各类着色问题. 本文将进一步给出一个可在线性时间内对 Halin 图顶点着色的算法.

下面引入几个本文中使用的概念和符号. 只有一个内部顶点的 Halin 图是轮. 伴随圈上有奇数个点的轮是奇轮, 伴随圈上有偶数个点的轮是偶轮. 在非轮 Halin 图中, 由一个其孩子结点全为叶结点的内部结点和它的所有孩子结点所组成的顶点导出子图称为扇. 非轮 Halin 图中一定存在扇^[3].

所有本文中未定义的符号和术语均引自[10].

定理 1^[6] 奇轮的色数是 4, 除奇轮外的 Halin 图的色数是 3.

定理 2 存在线性时间算法对 Halin 图进行点着色.

证明 以下分层着色算法一定可以对除奇轮外的 Halin 图 3 着色.

因为, 内部顶点的度数不小于 3. 所以, Halin 图一定有一个内部顶点与两个叶子顶点组成三角形. 即, Halin 图的色数一定不小于 3.

若 Halin 图是偶轮或奇轮, 则采用上图的着色方法. 即, 先按逆时针顺序对伴随圈上的点

* 收稿日期: 2000-01-12

进行着色,再对根结点着色.上述的着色方法同时证明了奇轮是4色的,偶轮是3色的.若Halin图不是轮,则采用下面的分层着色算法.

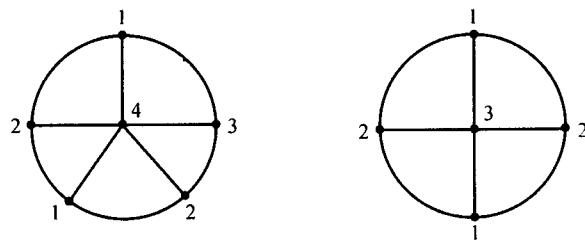


图 1

分层着色算法是这样的:

首先,对Halin图特征树的各层结点(包括叶结点)进行着色,方法是:以特征树的一个中心为树根,奇数层结点着1色,偶数层结点着2色.(令特征树的根结点 r 为第1层).这样,伴随圈 C 上的点的颜色就出现3种情况:全为1色、全为2色、有1色又有2色.

接着,对伴随圈 C 上的结点进行处理,方法如下:

1. 当伴随圈 C 上的结点不为同一种颜色时:则 C 上必然有相邻的两个点是不同色的.从两点中任一结点出发,经过圈 C 上的其它点回到另一点,在此过程中若发现有相邻两点是同一颜色的,则把后一点的色改为3.这种方法是可行的,因为任何圈都可以3着色.

2. 当伴随圈 C 上的结点全为1色时:则从某一扇的最右叶子结点在圈上的右邻点出发(这样做的目的是为了方便后续的颜色调整),逆时针经过圈 C 上的其它点到该点的左邻点,在此过程中若发现有相邻两点是同一颜色的,则把后一点的色改为3;当圈 C 上有偶数个结点时这种方法是可行的,因为有偶数个结点的圈是可2色的.当圈 C 上有奇数个结点时,做完上述处理后,起点和终点仍然同是色1.这时我们采用颜色调整的方法:先找到终点所处的那个扇(例如是 T),根据 T 最外圈3个结点以及它们的外邻点的颜色对 T 的结点颜色做出如下调整.(通过上述处理后,这时 T 的最左叶结点的颜色必为1或3,因为圈 C 上只曾出现过1,3两色).

情况一(T 的最左叶结点的颜色为3)

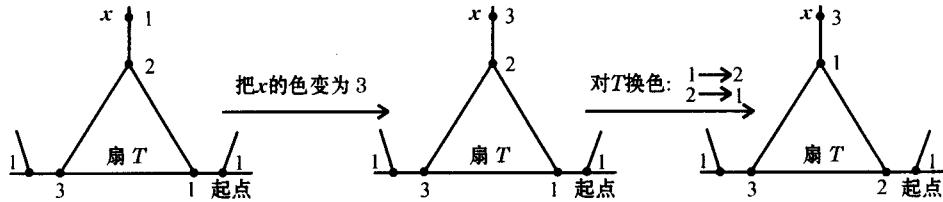


图 2

说明:因为与 x 邻接的点的颜色全是2,所以将 x 变为色3是可以的.并且分支内部颜色交换是不影响相邻点不同色这一关系的.

情况二(T 的最左叶结点的颜色为1)

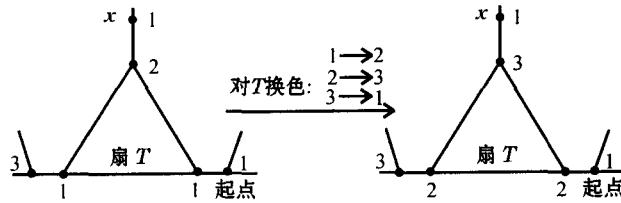


图 3

3. 当伴随圈 C 上的结点全为 2 色时, 处理方法同上, 只是颜色调整的具体方法不同. (通过上述处理后, 这时 T 的最左叶结点的颜色为 2 或 3) 如下图所示.

情况一 (T 的最左叶结点的颜色为 3)

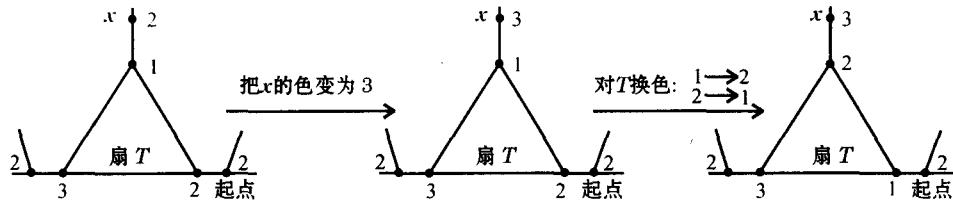


图 4

说明: 因为与 x 邻接的点的颜色全是 1, 所以将 x 变为色 3 是可以的.

情况二 (T 的最左叶结点的颜色为 2)

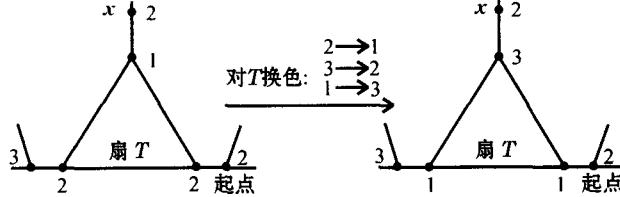


图 5

通过上述的方法可见, 分层着色法一定可以对除奇轮外的 Halin 图 3 着色. 所以定理得到证明. \square

算法所采用的数据结构

Halin 图的存储结构:

将 Halin 图存储在一个数组中, 数组中的一个元素表示 Halin 图中的一个结点以及与该结点相关的信息, 数组的第一个元素为 Halin 图特征树的根结点. 数组下标表示结点.

数组元素结构如下:

V[i]:	Parent	Is_Leaf	L_Neb	R_Neb	Child
	整型	布尔型	整型	整型	指针型

标识符说明: Parent 父结点

Is_Leaf 是否为叶结点

- L_Neb** 叶结点的左邻居
R_Neb 叶结点的右邻居
Child 内部结点的子结点集链表的头指针, 子结点按平面嵌入的逆时针方向排列, 即 Child 链的第一个结点是最左孩子结点.

例如下图的存储表示:

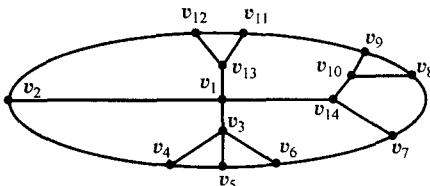


图 6

V: i	Parent	Is_Leaf	L_Neb	R_Neb	Child
1	0	F	0	0	$\rightarrow 2, 3, 14, 13$
2	1	T	12	4	NULL
3	1	F	0	0	$\rightarrow 4, 5, 6$
4	3	T	2	5	NULL
5	3	T	4	6	NULL
6	3	T	5	7	NULL
7	14	T	7	9	NULL
8	10	T	7	9	NULL
9	10	T	8	11	NULL
10	14	F	0	0	$\rightarrow 8, 9$
11	13	T	9	12	NULL
12	13	T	11	2	NULL
13	1	F	0	0	$\rightarrow 11, 12$
14	1	F	0	0	$\rightarrow 7, 10$

注: 数字 '0' 表示该项内容不存在.

将会使用到的其它数据结构:(Pascal 语言描述)

```

Type
  QueuePointer = ^ QueueNode;
  QueueNode = Record
    Num      : Integer;
    Next     : QueuePointer;
  End;
Var
  Q       : QueuePointer; {队列 Q}
  Color   : Array[1.. V] Of Integer; {Color[i]表示第 i 结点的颜色, V 是总结点数}

```

算法描述:

1. 若 Halin 图只有一个内部结点,则是轮. 否则跳到 2 继续执行.
 - 1.1 若 Halin 图的结点数是偶数(奇轮): 从任意一点开始逆时针对伴随圈 C 上的点着色, 第一点着色 3, 以后轮流着色 1 和色 2, 最后根结点着色 4. (执行到此, 算法结束)
 - 1.2 若 Halin 图的结点数是奇数(偶轮): 从任意一叶结点开始逆时针对伴随圈 C 上的点着色, 轮流着色 1 和色 2, 最后根结点着色 3. (执行到此, 算法结束)
 2. 宽度优先遍历 Halin 图的生成树, 并对结点着色, 结点层数是奇数着 1 色, 结点层数是偶数着 2 色, 具体操作如下:
 - 2.1 根结点着 1 色, 并将根结点的孩子结点都放入空的队列 Q 中;
 - 2.2 While (Q isn't empty) do Begin {当队列不空时做}

取队列 Q 的头结点 h;
 如果 h 的父亲着色 1, 则 h 着色 2; 如果 h 的父亲着色 2, 则 h 着色 1;
 如果 h 有孩子结点, 则将 h 的孩子结点都加入队列 Q 的尾;
 将 h 从队列 Q 中去掉;

End;
 3. 对伴随圈 C 上的结点进行处理, 使 C 上没有相邻两点是同色的, 具体操作如下:
 - 3.1 如果圈 C 上的结点不为同一色, 则找到不同色的相邻两点; 从两点中任一结点出发, 经过圈 C 上的其它点回到另一点, 在此过程中若发现有相邻两点是同一颜色的, 则把后一点的色改为 3. (执行到此, 算法结束)
 - 3.2 如果圈 C 上的结点是同一色, 则在圈 C 上取相邻两点, 两点中左边那点是某个扇的最右叶结点; 从两点中右边结点出发, 逆时针经过圈 C 上的其它点回到另一点, 在此过程中若发现有相邻两点是同一颜色的, 则把后一点的色改为 3.
 - 3.3 若此时起点和终点的颜色不同, 则算法到此结束; 若起点和终点颜色同是色 1 时: 先找到终点处于哪个扇(例如是 T), 根据 T 最外围 3 个结点以及它们的外邻点的颜色对 T 的结点颜色做出调整. 若 T 的最左叶结点的颜色为 3, 则把 T 的顶结点的父结点的颜色变为 3, 再把 T 中结点的颜色 1, 2 互换; 若 T 的最左叶结点的颜色为 1, 则把 T 中结点的颜色 1 变成 2, 2 变成 3, 3 变成 1.
 色 2 时: 先找到终点处于哪个扇(例如是 T), 根据 T 最外围 3 个结点以及它们的外邻点的颜色对 T 的结点颜色做出调整. 若 T 的最左叶结点的颜色为 3, 则把 T 的顶结点的父结点的颜色变为 3, 再把 T 中结点的颜色 1, 2 互换; 若 T 的最左叶结点的颜色为 2, 则把 T 中结点的颜色 1 变成 3, 2 变成 1, 3 变成 2.
- 到此, 算法结束.

算法时间复杂度的分析 该算法的时间主要消耗在对生成树的分层着色和处理圈 C 上. 分层着色时是宽度优先搜索 Halin 图, 每个结点被处理三次(插入队列一次, 访问父结点一次, 着色一次). 所以分层着色的时间复杂度是 $O(3n)$ 的. 处理圈 C 时, 对圈 C 扫描两遍(判断圈 C 是否同色扫一遍, 插入色 3 时扫一遍), 经过 C 上每个结点两次, 再加上寻找需要调整的扇和遍

历该扇并换色,所处理的结点数是小于或等于 $3n$ 的.所以,处理圈C的时间复杂度为 $O(3n)$.综合以上两部分,整个算法的时间复杂度为 $O(6n)$,即线性时间内,也就是 $O(n)$ 的.

参考文献:

- [1] HALIN R. *Studies on minimally n-connected graphs* [J]. Combinatorial Mathematics and its Applications, Academic Press, London, 1971, 129–136.
- [2] 娄定俊. Halin 图中的 Hamilton 路径 [J]. 应用数学, 1995, 8: 158—160.
LOU Ding-jun. *Hamiltonian paths in Halin graphs* [J]. Math. Appl., 1995, 8: 158—160. (in Chinese)
- [3] CORNUEJOLS G, NADDEF D, PULLEYBLANK W R. *Halin graphs and the travelling salesman problem* [J]. Mathematical Programming, 1983, 26: 287—294.
- [4] HORTON S B, PARKER R G. *On Halin subgraphs and supergraphs* [J]. Discrete Applied Mathematics, 1995, 56: 19—35.
- [5] 吕新忠,张忠辅. 内点度不小于4最大度为6的 Halin 图的边面全色数 [J]. 纯数学与应用数学(增2), 1993, 88—91.
LU Xin-zhong, ZHANG Zhong-fu. *The edge-face chromatic number of Halin graphs with inner vertices of degrees between 4 and 6* [J]. Pure Appl. Math. (Special Issue 2), 1993, 88—91. (in Chinese)
- [6] LI H X, ZHANG Z F, ZHANG J X. *On the colouring of Halin graphs* [J]. J. Shanghai Inst. of Railway Tech., 1994, 15(1): 19—24.
- [7] 张忠辅,韩金仓,刘林忠. 关于 Halin 图的完备色数 [J]. 兰州铁道学院学报, 1994, 13(1): 84—88.
ZHANG Zhong-fu, HAN Jin-cang, LIU Lin-zhong. *The complete chromatic number of Halin graphs* [J]. J. Lanzhou Railway Inst., 1994, 13(1): 84—88. (in Chinese)
- [8] 张建勋,王宁生,张忠辅. Halin 图的边面全色数 [J]. 科学通报, 1996, 41(21): 2010.
ZHANG Jian-xun, WANG Ning-sheng, ZHANG Zhong-fu. *The edge-face chromatic number of Halin graphs* [J]. Chinese Science Bulletin, 1996, 41(21): 2010. (in Chinese)
- [9] ZHANG Zhong-fu, LIU Lin-zhong, WANG Jian-fang et al. *A note on the total chromatic number of Halin graphs with maximum degree 4* [J]. Appl. Math. Lett., 1998, 11(5): 23—27. (in Chinese)
- [10] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Applications* [M]. London, Macmillan Press, 1976.

An Algorithm for Colouring of Halin Graphs

XIAO Li, LOU Ding-jun

(Dept. of Comp. Sci., Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: In this paper, we determine the vertex chromatic number of Halin graphs, and then give a linear time algorithm for colouring of Halin graphs.

Key words: Halin graph; odd wheel; even wheel; fan.