第23卷第3期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 3
2003年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2003

外平面图的 $L(2,1)$-标号*

王 新 红
(山东大学数学与系统科学学院，山东 济南 250100)

摘 要：外平面图是没有子图为 K_4 或 $K_{2,3}$ 的剖分的图. 设 G 为一个外平面图. 本文证明了 G 的 $L(2,1)$ 标号数 $\lambda(G) \leqslant \Delta(G) + 9$.

关键词：外平面图；$L(2,1)$ 标号.
分类号：AMS(2000) 05C15/CLC number：O157.5
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)03-0541-07

1 引 言

本文仅考虑简单有限无向图. 设 G 为一个图，用 $V(G)$，$E(G)$，$|G|$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 的顶点集合，边集合，顶点数和最大度. $N_G^k(v)$ 表示 G 中与顶点 v 距离为 k 的顶点集合. v 的邻集 $N_G^1(v)$ 简记为 $N_G(v)$. 设 W 是 $V(G)$ 的一个子集合，$G[W]$ 表示由 W 导出的子图. 未标明的符号和术语均参考文献[5].

定义 1[1] 设 Z 为非负整数集合，$f:V(G) \to Z$ 为一个映射. 若对任意的 $x,y \in V(G)$，满足当 $d_G(x,y) = 1$ 时，有 $|f(x) - f(y)| \geqslant 2$；当 $d_G(x,y) = 2$ 时，有 $|f(x) - f(y)| \geqslant 1$，则称 f 为 G 的一个 $L(2,1)$- 标号. 设 $k \in Z$，称具有 $\max\{f(v) | v \in V(G)\} = k$ 的 $L(2,1)$- 标号为图 G 的一个 $k - L(2,1)$- 标号. 使得 G 有一个 $k - L(2,1)$- 标号的最小 k 值称为图 G 的 $L(2,1)$- 标号数，记为 $\lambda(G)$.

Griggs 和 Yeh[2]，Yeh[4] 确定了 $\lambda(P_n)$，$\lambda(C_n)$ 和 $\lambda(W_n)$ 的具体数值，其中 P_n 是 n 顶点路，C_n 是 n 顶点圈，W_n 是 C_n 加上一个与 C_n 中所有顶点都相邻的顶点得到的 n- 轮. 对 n- 立方图 Q_n，Jonas[3] 证明了 $n + 3 \leqslant \lambda(Q_n)$. Griggs 和 Yeh[2] 又证明了当 $n \geqslant 5$ 时，$\lambda(Q_n) \leqslant 2n + 1$. 对最大度为 Δ 的树 T，Griggs 和 Yeh[2] 证明 $\lambda(T)$ 为 $\Delta + 1$ 或者 $\Delta + 2$. 他们还证明了一般图的 $L(2,1)$- 问题是 NP- 完备的. [2] 中还证明了，对最大度为 $\Delta \geqslant 1$ 的图 G，$\lambda(G) \leqslant \Delta^2 + 2\Delta$. 当 G 为 3- 连通图时，上界改进为 $\lambda(G) \leqslant \Delta^2 + 2\Delta - 3$，当 G 为直径为 2 的图时，上界改进为 $\lambda(G) \leqslant \Delta^2$. Griggs 和 Yeh[2] 还猜想对任何图总有 $\lambda(G) \leqslant \Delta^2$. Gerard J. Chang 和 DavidKuo[1] 又把一般图的 $L(2,1)$- 标号数的上界改进为 $\lambda(G) \leqslant \Delta^2 + \Delta$，但离证明 Griggs 和 Yeh[2] 的猜想 $\lambda(G) \leqslant \Delta^2$ 还有很大的差距.

* 收稿日期：2001-08-30
作者简介：王新红 (1977-)，女，博士.

要证明 Griggs 和 Yeh[2] 的猜想：对一般图 G，$\lambda(G)\leqslant\Delta^2$ 比较困难，我们猜想平面图的 $L(2,1)$- 标号数的上界可能为 Δ 的线性函数. 而本文考虑一类特殊平面图 —— 外平面图的 $L(2,1)$- 标号问题.

定义 2[6] 外平面图是没有子图为 K_4 或 $K_{2,3}$ 的剖分的图.

本文得到外平面图 G 的 $L(2,1)$- 标号数的上界为 $\lambda(G)\leqslant\Delta+9$，并给出外平面图的一个 $L(2,1)$- 标号算法.

2 外平面图的性质

设 v 为图 G 的任意一个给定的顶点，若 $u\in N_G^k(v)$，则称 u 为 G 关于 v 的第 k 层顶点. 称 k 为 u 的层数.

引理 1 设 v 为图 G 的任意一个给定的顶点. 对 $v_1,v_2,v_3\in N_G^k(v)(1\leqslant k\leqslant|V(G)|)$，一定存在 $u\in N_G^j(v)(0\leqslant j\leqslant k-1)$，使得 u 到 v_1,v_2,v_3 分别有一条路，它们经过的内部顶点的层数都小于 k，而且它们是内部不相交的.

证明 对 k 用归纳法. 当 $k=1$ 时，v 到 v_1,v_2,v_3 分别有一条长为 1 的路，它们没有内部顶点，显然它们是内部不相交的，即当 $k=1$ 时结论成立. 假设当 $k=i$ 时结论成立. 当 $k=i+1$ 时，v 到 v_1,v_2,v_3 分别有一条长为 $i+1$ 的内部顶点的层数都小于 $i+1$ 的路，设它们分别为 p_1,p_2,p_3，则对 $1\leqslant m\leqslant 3$ 且 $0\leqslant j\leqslant k$，有 $|p_m\cap N_j(v)|=1$，记 $p_m\cap N_i(v)=u_m$. 分三种情况讨论：

(1) 当 $u_1=u_2=u_3=u$ 时，$u\in N_G^i(v)$，$i=k-1$，且 u 到 v_1,v_2,v_3 分别有一条长为 1 的路，显然它们是内部不相交的；

(2) 当 u_1,u_2,u_3 中仅有两个相同时，不妨设 $u_1=u_2=u$，而 $u_3\neq u$. 对 $u,u_3\in N_G^i(v)$ 由归纳法假设，存在 $u^*\in N_G^j(v)$，$(0\leqslant j\leqslant i-1)$，使得 u^* 到 u 和 u_3 分别有一条内部顶点的层数都小于 i 的路 $p(u^*,u)$，$p(u^*,u_3)$，且它们是内部不相交的. 令 $p(u,v_1)=(u,v_1)$，$p(u,v_2)=(u,v_2)$，$p(u,v_3)=p(u,u^*)\cup p(u^*,u_3)\cup(u,v_3)$，其中 $p(u,u^*)$ 是沿 $p(u^*,u)$ 的反方向的路. 则 $p(u,v_1)$，$p(u,v_2)$，$p(u,v_3)$ 分别是 $u\in N_G^i(v)$ 到 v_1,v_2,v_3 的路，它们经过的内部顶点的层数都小于 $i+1$，而且它们是内部不相交的；

(3) 当 u_1,u_2,u_3 互不相同时，因为 $u_1,u_2,u_3\in N_G^i(v)$，由归纳法假设知，存在 $u\in N_G^j(v)$，$(0\leqslant j\leqslant i-1)$，使得 u 到 u_1,u_2,u_3 分别有一条路 $p(u,u_1)$，$p(u,u_2)$，$p(u,u_3)$，它们经过的内部顶点的层数都小于 i，且它们是内部不相交的. 令 $p(u,v_i)=p(u,u_i)\cup(u_i,v_i)(1\leqslant i\leqslant 3)$，则 $p(u,v_1)$，$p(u,v_2)$，$p(u,v_3)$ 分别是 $u\in N_G^j(v)(0\leqslant j\leqslant i-1)$ 到 v_1,v_2,v_3 的路，它们内部顶点的层数都小于 $i+1$ 而且它们是内部不相交的.

因此当 $k=i+1$ 时结论也成立. 由归纳法原理知引理结论成立.

引理 1 说明对 G 关于任意顶点 v 的 3 个不同的同层顶点，总存在比它们层数更低的顶点到它们分别有一条只经过低层顶点的路，且这些路是内部互不相交的.

若 4 个顶点两两之间都有一条内部互不相交的路，则构成 K_4 的剖分. 若 2 个顶点之间有 3 条内部互不相交的且每条至少有一个内部顶点的路，则构成 $K_{2,3}$ 的剖分.

定理 1 设 G 为外平面图，v 为图 G 的任意给定的顶点. 若 $u\in N_G^j(v)$，则当 $0\leqslant k\leqslant j-$

2 时，有 $N_G^k(v) \cap N_G(u) = \varnothing$；当 $k = j - 1$ 时，有 $1 \leqslant |N_G^k(v) \cap N_G(u)| \leqslant 2$. 当 $k = j$ 时，有 $|N_G^k(v) \cap N_G(u)| \leqslant 2$.

证明 因为 $u \in N_G^j(v)$，所以它不可能与第 $k \leqslant j - 2$ 层顶点相邻，否则，由定义，u 的层数最大为 $j - 1$. 因此，当 $0 \leqslant k \leqslant j - 2$ 时，有 $N_G^k(v) \cap N_G(u) = \varnothing$；由于 $u \in N_G^j(v)$，故一定存在 $N_G(v)$ 中的顶点与 u 相邻. 因此，有

$$|N_G^{j-1}(v) \cap N_G(u)| \geqslant 1.$$

下面只需证当 $j - 1 \leqslant k \leqslant j$ 时，有 $|N_G^k(v) \cap N_G(u)| \leqslant 2$. 假设 $|N_G^k(v) \cap N_G(u)| \geqslant 3$，则至少有 3 个互不相同的 k 层顶点 v_1, v_2, v_3 与 u 相邻. 而由引理 1，存在 $u^* \in N_G^l(v)(0 \leqslant l \leqslant k - 1)$，使得 u^* 到 v_1, v_2, v_3 分别有一条路，它们经过的内部顶点的层数都小于 k，而且它们是内部互不相交的. 那么由 u^* 到 u 有 3 条内部互不相交的路，而且分别经过内部顶点 v_1, v_2, v_3，则图 G 含 $K_{2,3}$ 的剖分为子图. 这与图 G 为外平面图矛盾. 因此，当 $j - 1 \leqslant k \leqslant j$ 时，有

$$|N_G^k(v) \cap N_G(u)| \leqslant 2.$$

由定理 1 知，当给定任意一个顶点 v 后，外平面图 G 中每个关于 v 的 j 层顶点至多与 2 个和它同层的顶点相邻，同时至多与比它低 1 层的 $j - 1$ 层的 2 个顶点相邻，而与更低层的小于 $j - 1$ 层的顶点不会相邻.

推论 1 设 G 为外平面图，v 为图 G 的任意给定的顶点. 则由 $N_G^k(v)(k \leqslant |V(G)|)$ 导出的子图 $G[N_G^k(v)]$ 中每个顶点的度数最大为 2.

证明 因为 $N_G^k(v)$ 中每个顶点至多与 2 个和它同层的顶点相邻，结论显然成立.

定理 2 设 G 为外平面图，v 为图 G 的任意给定的顶点. 则由 $N_G^k(v)(k \leqslant |V(G)|)$ 导出的子图 $G[N_G^k(v)]$ 中不含圈.

证明 （反证法）假设 $G[N_G^k(v)]$ 中含圈 C_n，则 C_n 上至少有 3 个顶点 v_1, v_2, v_3. 那么 $v_1, v_2, v_3 \in N_G^k(v)$，且 v_1, v_2, v_3 之间有三条内部互不相交的只经过第 k 层顶点的路. 而由引理 1，存在 $u \in N_G^j(v)(0 \leqslant j \leqslant k - 1)$，使得 u 到 v_1, v_2, v_3 分别有一条路，它们经过的内部顶点的层数都小于 k，而且它们是内部不相交的. 因此，u, v_1, v_2, v_3 这 4 个顶点之间分别有一条内部互不相交的路，构成了 K_4 的剖分. 图 G 就含 K_4 的剖分为子图，这与图 G 为外平面图矛盾.

由推论 1 和定理 2 可得外平面图中同层顶点之间的关系：

定理 3 设 G 为外平面图，v 为图 G 的任意给定的顶点. 则由 $N_G^k(v)(k \leqslant |V(G)|)$ 导出的子图 $G[N_G^k(v)]$ 是一些顶点互不相交路的并.

定理 4 设 G 为外平面图，v 为图 G 的任意给定的顶点. 设 u_1, u_2 是 $G[N_G^k(v)]$ 中同一条路 p 上的两个顶点. 若有一个 $k - 1$ 层顶点 u 与 u_1, u_2 都相邻，则路 p 上介于 u_1, u_2 之间的所有顶点在 $N_G^{k-1}(v)$ 中有且只有一个邻点 u.

证明 设 w 为路 p 上介于 u_1, u_2 之间的任意一个顶点. 若存在 $u^* \in N_G^{k-1}(v) \backslash \{u\}$ 与 w 相邻，则由引理 1，存在 $j \leqslant k - 1$ 层顶点 u_3，使得 u_3 到 u 和 u^* 分别有一条只经过比 $k - 1$ 更低层顶点的内部互不相交路 $p(u_3, u)$ 和 $p(u_3, u^*)$，此时 $k - 1$ 层顶点 u 和 k 层顶点 w 之间有三条内部互不相交的路，分别是 u 沿 $p(u_3, u)$ 的反方向经过 u_3，然后沿 $p(u_3, u^*)$ 经过 u^*，再沿边 (u^*, w) 到达 w 的路；u 沿边 (u, u_1) 经过 u_1，再沿路 $p(u_1, w)$ 到达 w 的路；u 沿边 (u, u_2) 经过 u_2，再沿路 $p(u_2, w)$ 到达 w 的路. 这构成了 $k_{2,3}$ 的剖分，与 G 为外平面图矛盾. 因此 $N_G^{k-1}(v) \backslash \{u\}$ 中

不能有与w相邻的顶点.而由定理1,$N_G^{k-1}(v)$中又一定有一个顶点与w相邻,则一定是顶点u.即w在N_G^{k-1}中有且只有一个邻点u.由w选取的任意性,定理结论成立.

由定理4知,第k层的每条路上的顶点可以分成若干段,每段上的所有顶点都有一个共同的$k-1$层邻点.而在每段上的只有端点才可能有两个$k-1$层邻点,中间点只能有一个$k-1$层邻点.由定理1知,当给定任意一个顶点v后,外平面图G中每个关于v的k层顶点至多与$k-1$层的2个顶点相邻.此结论可以推广到第k层即$G[N_G^k(v)]$中任意的一条路:

定理5 设G为外平面图,v为图G的任意给定的顶点.设p是$G[N_G^k(v)]$中任意的一条路,则在$N_G^{k-1}(v)$中最多有2个顶点与p中的顶点相邻.

证明 若p中只含一个顶点,则由定理1知结论成立.当p中含2个以上顶点时,假设在$N_G^{k-1}(v)$中有3个顶点v_1,v_2,v_3与p中的顶点相邻.因为$v_1,v_2,v_3\in N_G^{k-1}(v)$,由引理1,存在$u\in N_G^j(v)(0\leqslant j\leqslant k-2)$,使得$u$到$v_1,v_2,v_3$分别有一条路$p(u,v_1)$,$p(u,v_2)$,$p(u,v_3)$,它们经过的内部顶点的层数都小于$k-1$,而且是内部互不相交的.由定理1知,$v_1,v_2,v_3$不能同时与$p$中一个顶点相邻,那么只能是:(1)$v_1,v_2,v_3$分别与$p$中3个顶点$u_1,u_2,u_3$相邻;或者(2)$v_1,v_2,v_3$中2个顶点,不妨设为$v_1,v_2$,与$p$中顶点$u_1$相邻,另一个顶点$v_3$与$p$中顶点$u_2$相邻.当为情形(1)时,$j\leqslant k-2$层顶点$u$和$k$层顶点$u_2$之间有三条内部互不相交的路,它们分别为:由顶点$u$沿$p(u,v_1)$经过$v_1$,再沿边$(v_1,u_1)$经过$u_1$,然后从$u_1$沿路$p$到顶点$u_2$;由顶点$u$沿$p(u,v_2)$经过$v_2$,再沿边$(v_2,u_2)$到顶点$u_2$;由顶点$u$沿$p(u,v_3)$经过$v_3$,再沿边$(v_3,u_3)$经过$u_3$,然后从$u_3$沿路$p$到顶点$u_2$.此时,图$G$含$K_{2,3}$的剖分为子图.当为情形(2)时,$j\leqslant k-2$层顶点$u$和$k$层顶点$u_1$之间有三条内部互不相交的路,它们分别由顶点$u$沿$p(u,v_1)$经过$v_1$,再沿边$(v_1,u_1)$到顶点$u_1$;由顶点$u$沿$p(u,v_2)$经过$v_2$,再沿边$(v_2,u_1)$到顶点$u_1$;由顶点$u$沿$p(u,v_3)$经过$v_3$,再沿边$(v_3,u_2)$经过$u_2$,然后从$u_2$沿路$p$到顶点$u_1$.此时,图$G$也含$K_{2,3}$的剖分为子图.不论出现情形(1)还是(2),这都与图G为外平面图矛盾.因此,在$N_G^{k-1}(v)$中最多有2个顶点与p中的顶点相邻.

由定理4和定理5知,第k层的每条路上的顶点可以分成而且最多只能分成2段,每段上的所有顶点都有一个共同的$k-1$层邻点.而在每段上,只有端点才可能有两个$k-1$层邻点,中间点只能有一个$k-1$层邻点.

定理6 设G为外平面图,v为图G的任意给定的顶点.设p是$G[N_G^k(v)]$中任意的一条路,并且在$N_G^{k-1}(v)$中有2个顶点u_1,u_2与p中的顶点相邻.则u_1,u_2相邻或者分别为$G[N_G^{k-1}(v)]$中两条路的端点.

证明 $G[N_G^{k-1}(v)]$中任意两点u_1,u_2之间的邻接关系可以分为四种:(1)u_1,u_2为相邻顶点;(2)u_1,u_2不相邻,但在同一条路上;(3)u_1,u_2分别为两条路的一个端点;(4)u_1,u_2其中一个不妨设u_1为一条路p_1的中间顶点,而u_2为另一条路p_2的任意顶点.而当顶点u_1,u_2与$G[N_G^k(v)]$中的一条路p的顶点相邻时,我们证明不会出现情形(2)和(4).假若出现情形(2),因为u_1,u_2为同一条路上不相邻的两个顶点,那么这条路上u_1,u_2之间至少还有一个顶点,设为u_3.显然u_1,u_3和u_3,u_2之间分别有一条只经过第$k-1$层顶点的内部互不相交路.而由引理1,存在$j\leqslant k-2$层顶点u到顶点u_1,u_2,u_3分别有仅经过小于$k-1$层中间顶点的内部互不相交的三条路.而u_1,u_2又与第k层路p上的顶点相邻,所以u_1,u_2之间还有一条仅以第k层的路p上某些顶点为内部顶点的一条路.则这时u,u_1,u_2,u_3这四个顶点两两之间都有一条内部互不

相交的路，构成了 K_4 的剖分. 与图 G 为外平面图矛盾. 假若出现情形(4)，设路 p_1 的两个端点分别为 u_3,u_4. 由引理 1，存在 $j\leqslant k-2$ 层顶点 u 到顶点 u_2,u_3,u_4 分别有仅经过小于 $k-1$ 层中间顶点的内部互不相交的三条路 $p(u,u_2),p(u,u_3),p(u,u_4)$. 那么在顶点 u 和 u_1 之间有 3 条内部互不相交的路，分别为：顶点 u 沿路 $p(u,u_2)$ 经过 u_2，再到与 u_2 相邻的第 k 层的路 p 上的顶点，然后沿着路 p 到达与 u_1 相邻的顶点，再到 u_1 的路；顶点 u 沿路 $p(u,u_3)$ 经过 u_3，再由 u_3 沿着路 p_1 到 u_1 的路；顶点 u 沿路 $p(u,u_4)$ 经过 u_4，再由 u_4 沿着路 p_1 到 u_1 的路，则构成了 $K_{2,3}$ 的剖分. 也与图 G 为外平面图矛盾. 因此只可能出现情形(1) 和(3)，即 u_1,u_2 相邻或者分别为 $G[N_G^{k-1}(v)]$ 中两条路的一个端点.

定理 7　设 G 为外平面图，v 为图 G 的任意给定的顶点. 设 p 是 $G[N_G^k(v)]$ 中任意的一条路，并且在 $N_G^{k-1}(v)$ 中有 2 个顶点 u_1,u_2 与 u 相邻. 则在 $N_G^{k-2}(v)$ 中至多有 2 个顶点与 u_1,u_2 相邻.

证明　否则，假设有 3 个 $N_G^{k-2}(v)$ 中顶点 u_{p1},u_{p2},u_{p3} 与 u_1,u_2 相邻. 由定理 1，不论 u_1 还是 u_2 都不能与所有的 u_{p1},u_{p2},u_{p3} 都相邻，则 u_1,u_2 中必有 1 个，不妨设为 u_1，与其中的 2 个 u_{p1}，u_{p2} 相邻，而 u_2 必至少与剩下的那个顶点 u_{p3} 相邻. 由引理 1，存在 $u^*\in N_G^j(v)(0\leqslant j\leqslant k-3)$，使得 u^* 到 u_{p1},u_{p2},u_{p3} 分别有一条路，它们经过的内部顶点的层数都小于 $k-3$，而且它们是内部互不相交的. 那么由 u^* 到 u_1 有 3 条内部互不相交的路，其中一条是 u^* 沿着到 u_{p1} 的路再经过边(u_{p1},u_1) 到达 u_1，另一条是 u^* 沿着到 u_{p2} 的路再经过边(u_{p2},u_1) 到达 u_1，还有一条是 u^* 沿着到 u_{p3} 的路再经过边$(u_{p3},u_2)(u_2,u)$ 和(u,u_1) 到达 u_1，因此图 G 含 $K_{2,3}$ 的部分为子图. 这与图 G 为外平面图矛盾.

类似的，我们还可以得出：

定理 7′　设 G 为外平面图，v 为图 G 的任意给定的顶点. 设 p 是 $G[N_G^k(v)]$ 中任意的一条路，并且在 $N_G^{k-1}(v)$ 中有 2 个顶点 u_1,u_2 与 p 中的顶点相邻. 则在 $N_G^{k-2}(v)$ 中至多有 2 个顶点与 u_1,u_2 相邻.

定理 8　设 G 为外平面图，v 为图 G 的任意给定的顶点. 设 u 是 $G[N_G^k(v)]$ 中任意的一个顶点，并且在 $N_G^{k+1}(v)$ 中有 2 个顶点 u_1,u_2 与 u 相邻. 那么 u_1,u_2 不能同时与在 $N_G^k(v)$ 中的异于 u 的顶点相邻.

证明　否则，假设 u_1,u_2 还同时与在 $N_G^k(v)$ 中的异于 u 的顶点 w 相邻，则 u 和 w 之间有 3 条内部不相交的路，分别为 u 经过边(u,u_1)，(u_1,w) 到达 w 的路，u 经过边(u,u_2)，(u_2,w) 到达 w 的路，和一条 u 仅经过层数小于 k 的内部顶点到达 w 的路. 因此图 G 含 $K_{2,3}$ 的剖分为子图. 这与图 G 为外平面图矛盾.

定理 9　设 G 为外平面图，v 为图 G 的任意给定的顶点. 设 u 是 $G[N_G^k(v)]$ 中任意的一个顶点，则 u 在 $G[N_G^{k+1}(v)]$ 中最多有两个邻点分别与 $N_G^k(v)$ 中的异于 u 的两个顶点相邻.

证明　由定理 8，u 在 $G[N_G^{k+1}(v)]$ 中的每个邻点除与 u 相邻外，最多再与 $N_G^k(v)$ 中的异于 u 的 1 个顶点相邻. 假设 u 在 $G[N_G^{k+1}(v)]$ 有 3 个邻点 u_1,u_2,u_3 分别与 $N_G^k(v)$ 中的异于 u 的 3 个顶点 w_1,w_2,w_3 相邻. 由引理 1，存在 $u^*\in N_G^j(v)(0\leqslant j\leqslant k-1)$，使得 u^* 到 w_1,w_2,w_3 分 别有一条路，它们经过的内部顶点的层数都小于 k，而且它们是内部互不相交的. 那么由 u^* 到 u 有 3 条内部互不相交的路，分别为 u^* 经过到 w_1 的只有层数都小于 k 的内部顶点的路，再

经过边(w_1,u_1),(u_1,u)到达u的路;u^*经过到w_2的只有层数都小于k的内部顶点的路,再经过边(w_2,u_2),(u_2,u)到达u的路;u^*经过到w_3的只有层数都小于k的内部顶点的路,再经过边(w_3,u_3),(u_3,u)到达u的路;此时图G含$K_{2,3}$的剖分为子图.这与图G为外平面图矛盾.因此u在$G[N_G^{k+1}(v)]$中最多有两个邻点分别与$N_G^k(v)$中的异于u的两个顶点相邻.

3 外平面图的$L(2,1)$-标号

本节根据上一节中对外平面图性质的研究,给出针对外平面图的一种标号算法,然后给出外平面图的$L(2,1)$-标号数的一个上界.

定理 10 对最大度为Δ的外平面图G有$\lambda(G)\leqslant\Delta+9$.

证明 考虑对外平面图G的顶点集$V(G)$如下的标号方案:任取$v\in V(G)$,给v标号0.然后依次给v的每个邻点用能够使用的(使得对此顶点标号后,已标号顶点的导出子图的标号仍为正常$L(2,1)-$标号)最小数标号.一般的,当对所有G关于v的小于$k(k\leqslant|V(G)|)$层的顶点都标上号后,给G关于v的所有第k层顶点一个排序,使得$G[N_G^k(v)]$中在同一条路上相邻的顶点的序号相邻.按照序号由小到大取出G关于v的一个第k层顶点u,然后依次给u的每个未标号邻点用能够使用的最小数标号.直到对G关于v的每个第k层顶点的所有未标号邻点(即G关于v的所有第$k+1$层顶点)都标上号.然后再给G关于v的所有第$k+1$层顶点一个排序,对这些顶点排序后给每个顶点的所有邻点标号.一直下去,直到所有$V(G)$中的顶点都得到标号为止.

下面证明仅用$[0,\Delta(G)+9]$中的数就可以对G的顶点集$V(G)$进行正常$L(2,1)$-标号.

因为v的标号为0.又v的每个邻点至多与$N_G(v)$中的两个顶点相邻,而与$N_G(v)$中的其他顶点距离为2,故当对v的某个未标号邻点u进行标号时,最多有$2+2\times3+1\times(\Delta-3)=\Delta+5$个数不能使用,则一定存在一个小于等于$\Delta(G)+5$的非负整数可以给$u$一个正常$L(2,1)-$标号.即当对$G$关于$v$的一个第0层顶点$v$的未标号邻点$u$进行标号时,用$[0,\Delta(G)+9]$中的数一定可以对$u$进行正常$L(2,1)$-标号.

一般的,当对G关于v的一个第k层顶点w的未标号邻点u(u一定是G关于v的一个第$k+1$层顶点)进行标号时,则已经对所有小于等于k层的顶点以及G关于v的第k层顶点中序号比w小的顶点的所有邻点,还可能有w的部分$k+1$层邻点进行了正常的$L(2,1)$-标号,并且假设用到的最大数不超过$\Delta(G)+9$.即已用$[0,\Delta(G)+9]$中的数对u以前的顶点的导出子图进行了正常$L(2,1)$-标号.由定理1和定理9,w在$G[N_G^{k+1}(v)]$中最多有两个邻点分别与$N_G^k(v)$中的异于w的两个顶点相邻,而其他w在$G[N_G^{k+1}(v)]$中的邻点在$N_G^k(v)$中仅和w相邻.(1)若w的未标号邻点u在$N_G^k(v)$中仅和w相邻:由定理1,u在$N^{k+1}(v)$中最多有两个邻点u_l,u_r,故与u相邻的已标号顶点最多有3个.再由定理5,u在$N_G^{k+1}(v)$中的两个邻点u_l,u_r中最多有1个在$N_G^k(v)$中的异于w的邻点(否则u_l,u,u_r所在的$N_G^{k+1}(v)$中的路就在$N_G^k(v)$中有2个以上邻点).同理,u_l,u_r中最多有1个的邻点不是w的邻点.与u距离为2的已标号顶点最多有$(\Delta(G)-2)+1+1=\Delta(G)$个.故当对$u$进行标号时,最多有$3\times3+1\times\Delta(G)=\Delta(G)+9$个$[0,\Delta(G)+9]$中的数不能使用.(2)若$w$的未标号邻点$u$在$N_G^k(v)$中除和$w$相邻外,还和另一个顶点$w'$相邻.则由算法,此时$w'$的所有$N_G^{k+1}(v)$中的邻点都还未被标号.由

定理1，u 在 $N_G^{k+1}(v)$ 中最有两个邻点 u_l,u_r. 而由定理5，u 在 $N_G^{k+1}(v)$ 中的两个邻点 u_l,u_r 在 $N_G^k(v)$ 中不能有异于 w 和 w' 的邻点. 而由定理4，u_l,u_r 又不能都和 w 相邻(否则，u 在 $N_G^k(v)$ 中就只能和 w 相邻). 因此，u_l,u_r 必有一个，不妨设为 u_l，是 w 的邻点，另一个，不妨设为 u_r，是 w' 的邻点. 那么，u_r 一定还未被标号. 故与 u 相邻的已标号顶点最多有3个：w,w' 和 u_l. 由定理6，w 和 w' 或者相邻，或者分别为 $G[N_G^k(v)]$ 中两条路的端点，则 w' 在 $N_G^k(v)$ 中最多有1个异于 w 的邻点. 由定理7，w 和 w' 在 $N_G^{k-1}(v)$ 中最多有2个邻点 w_{p1},w_{p2}，若它们都是 w 的邻点，则 w' 在 $N_G^{k-1}(v)$ 中只有1个邻点，若 w 在 $N_G^{k-1}(v)$ 中只有1个邻点 w_{p1}，则 w' 在 $N_G^{k-1}(v)$ 中最多只有1个异于 w_{p1} 的邻点 w_{p2}. 故与 u 距离为2的已标号顶点最多有 $(\Delta(G)-2)+1+1=\Delta(G)$ 个，分别为：w 在 $N_G^{k+1}(v)$ 中的异于 u 和 u_l 的邻点，w' 在 $N_{Gk}(v)$ 中的异于 w 的邻点，w' 在 $N_G^{k-1}(v)$ 中的异于 w 在 $N_G^{k-1}(v)$ 中邻点 w_{p1} 的邻点 w_{p2}. 故当对 u 进行标号时，最多有 $3\times 3+1\times(G)=\Delta(G)+9$ 个 $[0,\Delta(G)+9]$ 中的数不能使用. 综合(1)和(2)，一定存在 $[0,\Delta(G)+9]$ 中的一个数可以给 u 一个正常 $L(2,1)$- 标号.

由归纳法原理，用 $[0,\Delta(G)+9]$ 中的数一定可以对所有 $V(G)$ 中的顶点进行正常 $L(2,1)$- 标号. 因此有 $\lambda(G)\leqslant\Delta+9$.

参考文献：

[1] CHANG G J, KUO D. *The L(2,1)-labeling problem on graphs*[J]. SIAM J. Discrete Math., 1996, **9**(2): 309－316.

[2] GRIGGS J R, YEH R K. *Labeling graphs with a condition at distance* 2 [J]. SIAM J. Discrete Math., 1992, **5**(4): 586－595.

[3] JONAS K. *Graph Coloring Analogues with a Condition at Distance Two: L(2,1)-Labeling and List λ-Labeling* [D]. Ph. D. Thesis, Dept. of Math., University of South Carolina, Columbia, SC, 1993.

[4] YEH R K. *Labeling Graphs with a Condition at Distance Two* [D]. Ph. D. Thesis. Dept. of Math., University of South Carolina, Columbia, Sc, 1990.

[5] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Application* [M]. Macmillan, London, 1976.

[6] HARARY F. *Graph Theory* [M]. Addison-Wesley, 1969.

The $L(2,1)$-Labeling of Outerplane Graphs

WANG Xin-hong

(Dept. of Math., Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract: It is proved that an outerplane graph contains no subdivision of K_4 or $K_{2,3}$. Let G be an outerplane graph. We show that the $L(2,1)$-labeling number $\lambda(G)\leqslant\Delta(G)+9$, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of vertices in G.

Key words: outerplane graph; $L(2,1)$-labeling.