第23卷第3期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 3
2003年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2003

广义系统的特征结构配置*

赵 植 武
(大连大学数学系,辽宁 大连 116622)

摘 要:通过使用输出反馈配置闭环系统的特征值与特征向量,本文讨论了广义控制系统.

关键词:广义系统;矩阵束;特征结构配置.
分类号:AMS(2000) 93A99/CLC number: O231
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2003)03-0553-04

1 引 言

考虑如下的广义控制系统

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $E,A\in R^{n\times n}$,$B\in R^{n\times m}$,$C\in R^{l\times n}$ 均为常阵. 而 $x\in R^n$,$u\in R^m$,$y\in R^l$ 分别是状态向量、控制向量和输出向量. 并设系统(1)是正则的,即 $\det(sE-A)$ 不恒为零.

对系统(1)使用输出反馈

$$u = Ky, \tag{2}$$

得到闭环系统

$$E\dot{x} = (A + BKC)x, \tag{3}$$

其中 K 是 $m\times l$ 阶常阵. 显然,闭环系统(3)的特征结构与反馈矩阵 K 的选取有关. 我们希望闭环系统(3)具有预先给定的特征值和特征向量,而且表示为原参数形式. 目前这方面的研究结果还局限于使用状态反馈[1-4].

2 准备知识

引理[5] 假定 $M\in R^{n\times m}$,$P\in R^{n\times r}$,$Q\in R^{t\times m}$ 为常阵,则

$$\max_{F\in R^{r\times t}} \operatorname{rank}(M + PFQ) = \min\left\{\operatorname{rank}[M\ P],\operatorname{rank}\begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix}\right\}.$$

---

* 收稿日期:2001-05-14
作者简介:赵植武(1954-),教授.

定理 1 假定 $M\in R^{n\times m}, P\in R^{n\times r}, Q\in R^{t\times m}$ 为常阵，则

$$\min_{F\in R^{r\times t}} \operatorname{rank}(M+PFQ)=\operatorname{rank}[M\ P]+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}M\\Q\end{bmatrix}-\operatorname{rank}\begin{bmatrix}M & P\\Q & 0\end{bmatrix}.$$

证明 因为 $F\in R^{r\times t}$ 是任意的，所以不失一般性，设 P 列满秩，Q 行满秩. 于是存在可逆矩阵 $T_1\in R^{n\times n}, R_1\in R^{m\times m}$ 使得 $T_1P=\begin{bmatrix}I_r\\0\end{bmatrix}$, $QR_1=[I_t\ 0]$. 记 $T_1MR_1=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}$. 得

$$T_1[M\ P]\begin{bmatrix}R_1 & 0\\0 & I_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12} & I_r\\M_{21} & M_{22} & 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}T_1 & 0\\0 & I_t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M\\Q\end{bmatrix}R_1=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\M_{21} & M_{22}\\I_t & 0\end{bmatrix}.$$

由此易得

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}[M\ P]=r+\operatorname{rank}[M_{21}\ M_{22}],\\&\operatorname{rank}\begin{bmatrix}M\\Q\end{bmatrix}=t+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}M_{12}\\M_{22}\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{4}$$

并且

$$T_1(M+PFQ)R_1=\begin{bmatrix}M_{11}+F & M_{12}\\M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}.\tag{5}$$

记 $p=\operatorname{rank}[M_{22}]$，存在可逆矩阵 $T_2\in R^{(n-r)\times(n-r)}, R_2\in R^{(m-t)\times(m-t)}$ 使得 $T_2M_{22}R_2=\begin{bmatrix}I_p & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$. 对式(5)右端变换得

$$\begin{bmatrix}I_r & 0\\0 & T_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{11}+F & M_{12}\\M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_t & 0\\0 & R_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{11}+F & M_{12}^{(1)} & M_{12}^{(2)}\\M_{21}^{(1)} & I_p & 0\\M_{21}^{(2)} & 0 & 0\end{bmatrix}.\tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned}&T_2[M_{21}\ M_{22}]\begin{bmatrix}I_t & 0\\0 & R_2\end{bmatrix}=[T_2M_{21}\ T_2M_{22}R_2]=\begin{bmatrix}M_{21}^{(1)} & I_p & 0\\M_{21}^{(2)} & 0 & 0\end{bmatrix},\\&\begin{bmatrix}I_r & 0\\0 & T_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{12}\\M_{22}\end{bmatrix}R_2=\begin{bmatrix}M_{12}R_2\\T_2M_{22}R_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_{12}^{(1)} & M_{12}^{(2)}\\I_p & 0\\0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{7}$$

由式(7)得

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}\begin{bmatrix}M_{12}\\M_{22}\end{bmatrix}=p+\operatorname{rank}[M_{12}^{(2)}],\\&\operatorname{rank}[M_{21}\ M_{22}]=p+\operatorname{rank}[M_{21}^{(2)}].\end{aligned}\tag{8}$$

进一步，对式(6)右端变得

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}I_r & -M_{12}^{(1)} & 0\\0 & I_p & 0\\0 & 0 & I_{n-r-p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{11}+F & M_{12}^{(1)} & M_{12}^{(2)}\\M_{21}^{(1)} & I_p & 0\\M_{21}^{(2)} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_t & 0 & 0\\-M_{21}^{(1)} & I_p & 0\\0 & 0 & I_{m-t-p}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}M_{11}-M_{12}^{(1)}M_{21}^{(1)}+F & 0 & M_{12}^{(2)}\\0 & I_p & 0\\M_{21}^{(2)} & 0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{9}$$

由式(5)，(6)，(9)得

$$\min_F \operatorname{rank}(M+PFQ)=\min_F \operatorname{rank}\begin{bmatrix} M_{11}-M_{12}^{(1)}M_{21}^{(1)}+F & 0 & M_{12}^{(2)} \\ 0 & I_p & 0 \\ M_{21}^{(2)} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$=p+\operatorname{rank}[M_{12}^{(2)}]+\operatorname{rank}[M_{21}^{(2)}],$$

再由(8)式得

$$\min_F \operatorname{rank}(M+PFQ)=p+\operatorname{rank}[M_{12}^{(2)}]+\operatorname{rank}[M_{21}^{(2)}]$$
$$=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{bmatrix}+\operatorname{rank}[M_{21}\ M_{22}]-p. \tag{10}$$

另一方面 $\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & P \\ Q & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_1MR_1 & T_1P \\ QR_1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & I_r \\ M_{21} & M_{22} & 0 \\ I_t & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 由式(4)得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} M & P \\ Q & 0 \end{bmatrix}=r+t+\operatorname{rank}[M_{22}]=r+t+p$$
$$=\operatorname{rank}[M\ P]-\operatorname{rank}[M_{21}\ M_{22}]+\operatorname{rank}\begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix}-\operatorname{rank}\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{bmatrix}+p.$$

代入(10)即得所证.

定理 2 假定 $M\in R^{n\times m}, P\in R^{n\times r}, Q\in R^{t\times m}$ 为常阵,设

$$r_{\max}=\max_{F\in R^{r\times t}}\operatorname{rank}(M+PFQ),\ r_{\min}=\operatorname{rank}(M+PFQ).$$

则对于任意正整数 $r_0\in[r_{\min},r_{\max}]$,存在 $F_0\in R^{r\times t}$ 使得 $r_0=\operatorname{rank}[M+PF_0Q]$.

证明 设 $P=[p_1\ p_2\ \cdots\ p_r]$, $C^T=[q_1^T\ q_2^T\ \cdots\ q_t^T]$. 其中,$p_i, q_j$ 分别是 p 的第 i 列和 C 的第 j 行. $F=(f_{ij})_{r\times t}$. 于是 $M+PFQ=M+\sum_{1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant t}p_if_{ij}q_j$. 由于 $F\in R^{r\times t}$,是任意的,不妨设 $r_{\min}=\operatorname{rank}[M]$,并设 $F_0=(f_{ij}^{(0)})_{r\times t}\in R^{r\times t}$ 使得 $r_{\max}=\operatorname{rank}[M+PF_0Q]$. 令 $U=\{(i,j)\mid 1\leqslant i\leqslant r, 1\leqslant j\leqslant t\}$. 对于 U 的任意子集 V,记 $M_V=M+\sum_{(i,j)\in V}p_if_{ij}^{(0)}q_j$. 对于任意一个 $f_{ij}^{(0)}$,$\operatorname{rank}[M_V+p_if_{ij}^{(0)}q_j]$ 的值至多比 $\operatorname{rank}[M_V]$ 的增加 1. 而 $M_\varnothing=M, M_U=M+PF_0Q$. 因此,矩阵束序列 $\{M_V\}_{V\in U}$ 的秩能够到达 $r_{\min}$ 与 $r_{\max}$ 之间的任意正整数. □

3 特征结构配置

现在考虑系统(1)使用输出反馈(2)得到闭环系统(3)的特征结构配置问题,即系统(1)经输出反馈(2)得到闭环系统(3)具有指定的特征值 s_0. 由闭环系统(3)易见,问题归结为矩阵束 $s_0E-(A+BKC)$ 的秩.

定理 3 设广义系统(1)是 R-能控和 R-能观的[6]. 如果 s_0 是系统(1)预先给定的待配置的特征值,则

$$\min_{K\in R^{m\times l}}\operatorname{rank}(s_0E-(A+BKC))=n-r \tag{11}$$

的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} s_0E-A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}=n+r \tag{12}$$

证明 由于广义系统(1)是 R-能控和 R-能观,有

$$\operatorname{rank}[s_0E-A\ B]=\operatorname{rank}[s_0E^T-A^T\ C^T]=n$$

再依定理 1 有

$$\begin{aligned}&\min_K \operatorname{rank}[s_0E-A-BKC]\\&=\operatorname{rank}[s_0E-A\ B]+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}s_0E-A\\C\end{bmatrix}-\operatorname{rank}\begin{bmatrix}s_0E-A & B\\C & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

易见,(11)与(12)式有一个成立,则另一个也成立. □

由定理 2 和定理 3 容易证明

定理 4 设广义系统(1)是 R-能控和 R-能观的,令

$$r_{\max}=\max_{K\in R^{m\times l}}\operatorname{rank}(s_0E-A-BKC),\tag{13}$$

$$r_{\min}=\min_{K\in R^{m\times l}}\operatorname{rank}(s_0E-A-BKC),\tag{14}$$

如果 $r_{\min}<n$,则系统(1)具有特征值 s_0,并且对应的线性无关特征向量的个数可以在 $n-r_{\max}$ 与 $n-r_{\min}$ 之间任意配置.

定理 4 回答了系统(1)是否具有预先给定的待配置的特征值 s_0,并且对于任何非负整数 r_0,$n-r_{\max}\leqslant r_0\leqslant n-r_{\min}$,存在反馈矩阵 $K_0\in R^{m\times l}$ 及对应的输出反馈(2),使得闭环系统(3)对应的线性无关特征向量的个数为 r_0. 进一步,依据引理及定理 3,(13)与(14)式可以用系统(1)的原参数表示,从而实现了任意配置特征值和对应线性无关特征向量的个数.

参考文献:

[1] FAHMY M M, O'REILLY J. *Matrix pencil of closed-loop descriptor systems: Infinite eigenvalue assignment* [J]. Internat J. Control, 1989, **49**(4): 1421—1431.

[2] FAHMY M M, O'REILLY J. *Parametric eigenstructure assignment for continuous-time descriptor systems* [J]. Internat. Control, 1989, **49**(1): 129—143.

[3] GEORGIOU C, Krikelis N J. *Eigenstructure assignment for descriptor systems via state variable feedback* [J]. Internat J Systems Sci., 1992, **23**(1): 99—108.

[4] ZAGALAK P, KUCERA V. *Eigenstrcture in linear descriptor systems* [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1995, **40**(1): 144—147.

[5] XIE X K. *A New Matrix in Control Theory* [M]. Proceeding of the IEEE CDC. USA, 1985, 539—541.

[6] DAI J. *Singular Control Systems* [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

Eigenstructure Assignment for Singular Systems

ZHAO Zhi-wu

(Dept. of Math., Dalian University, Liaoning 116622, China)

Abstract: In this paper deals with singular systems. The eigenvalue and eigenvectors for closed-loop systems are assigned by the output feedback.

Key words: singular systems; matrix pencil; eigenstructural assignment.