第23卷第4期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 4
2003年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2003

亚纯函数的弱斥性不动点与拟正规族*

王 淑 贵
(石河子大学数学系，新疆 石河子 832000)

摘 要：本文研究亚纯函数的弱斥性不动点与拟正规族的关系，得到了以下结果：

设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族，q 是一个非负整数. 如果对任意 $f\in\mathscr{F}$，存在自然数 $k=k(f)>1$，使得 f 的 k 次迭代 f^k 在 D 内最多只有 q 个弱斥性不动点，则 $\mathscr{F}$ 是 D 内阶至多为 $\max\{4,q+2\}$ 的拟正规族.

关键词：亚纯函数；弱斥性不动点；拟正规族.

分类号：AMS(2000) 30D35/CLC number：O174.52

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)04-0673-06

1 引 言

设 f 是复平面 $\mathbf{C}$ 内的整函数或亚纯函数，则由 f 所产生的动力系统将复平面 $\mathbf{C}$ 分成互不相交的两个集合 Fatou 集 $F(f)$ 和 Julia 集 $J(f)$. 大家知道，$J(f)$ 是 f 的斥性周期点集合的闭包.

设 f 是区域 D 内的整函数或亚纯函数，用 f^n 表示 f 的 n 次迭代，即 $f^n=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n}$. 设 k 为一正整数，我们说 f^k 在 D 内有一不动点 Z_0，若 $Z_0\in D$，并且 $f(Z_0),f^2(Z_0),\cdots,f^{k-1}(Z_0)\in D$，$f^k(Z_0)=Z_0$. 设 Z_0 是 f^k 的一个不动点，若 $|(f^k)'(Z_0)|>1$ 或 $(f^k)'(Z_0)=1$，则称 Z_0 为 f^k 的一个弱斥性不动点.

f^k 的一个不动点也称为 f 的一个周期点，若 k 是使 $f^k(Z_0)=Z_0$ 的最小自然数，则称 Z_0 为 f 的一个 k 周期点.

在文献[1]中，杨乐提出了以下问题.

问题 设 $\mathscr{F}$ 是一族整函数，D 是复平面 C 内的一个区域，k 是一个正整数. 如果对任意 $f\in\mathscr{F}$，f 和 f^k 在 D 内都没有不动点，$\mathscr{F}$ 在 D 内是否正规？

在文献[2]中，Essen 与伍胜健彻底解决了这个问题，他们证明了以下定理.

定理 A 设 D 是复平面 C 内的一个区域，$\mathscr{F}$ 是 D 内的一族解析函数. 如果对任意 $f\in\mathscr{F}$，存在自然数 $k=k(f)>1$，使得 f^k 在 D 内无斥性不动点，则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

* **收稿日期**：2001-01-15
作者简介：王淑贵(1957-)，男，教授.

最近，Barg mann 和 Bergweiler 在文献[3]中将定理 A 的假设换成了没有周期点的情形，并且证明了关于拟正规族的一个结论. 拟正规族的定义如下：

设 D 是复平面 C 内的一个区域，$\mathscr{F}$ 是 D 内的一个函数族，如果对 $\mathscr{F}$ 中的任一函数列 $\{f_n\}$，都存在子序列 $\{f_{nk}\}$ 和 D 内的有限点集 E，使得 $\{f_{nk}\}$ 在 $D\setminus E$ 上局部一致收敛，则称 $\mathscr{F}$ 是 D 内的一个拟正规族. 如果例外集 E 的元素个数有一个公共上界，并且其最小的公共上界为 q，则称 F 是 D 内阶为 q 的拟正规族.

一个自然的问题是：对于亚纯函数族，相应的杨乐问题结论如何？

在文献 4 中，我们研究了亚纯函数族的杨乐问题，得到了以下结论.

定理 B 设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族，q 是一个非负整数. 如果对任意 $f\in\mathscr{F}$，存在自然数 $k=k(f)>1$，使得 f^k 在 D 内最多只有 q 个不动点，则 $\mathscr{F}$ 是 D 内阶至多为 $\max\{4,q+3\}$ 的拟正规族.

在本文中，作者继续研究亚纯族的杨乐问题，得到了更好的结果.

定理 1 设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族，q 是一个非负整数. 如果对任意 $f\in\mathscr{F}$，存在自然数 $k=k(f)>1$，使得 f^k 在 D 内最多只有 q 个弱斥性不动点，则 F 是 D 内阶至多为 $\max\{4,q+2\}$ 的拟正规族.

推论 设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族，如果对任意 $f\in\mathscr{F}$，总存在自然数 $k=k(f)>1$，使得 f^k 在 D 内无弱斥性不动点，则 F 是 D 内阶至多为 4 的拟正规族.

2 引 理

设 D 和 D' 是复平面 C 内的两个 Jordan 区域，f 是 D 内的整函数或亚纯函数. 若在 D 内存在一个单连通区域 D_1，使得 D_1 是 $f^{-1}(D')$ 的一个分支，则称 f 在 D 内有一个关于 D' 的岛，记为 $f:D\prec D'$，否则，称 f 在 D 内没有关于 D' 的岛，记为 $f:D\not\prec D'$.

引理 1[5] 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数族，D_1,D_2,D_3 为复平面 $\mathbf{C}$ 内的三个 Jordan 区域并 $\overline{D}_j\cap\overline{D}_S=\varnothing(j\neq s)$. 如果 F 在 D 内不正规，则存在函数列 $\{f_n\}\subset F$ 和某个区域 $D_{j_0}(j_0\in\{1,2,3\})$. 使得对任意 $f\in\{f_n\}$，都有 $f:D\prec D_{j_0}$.

引理 2[2,引理3] 设 f 是区域 D 内的亚纯函数，A 是复平面 $\mathbf{C}$ 内的开圆，并且 $\overline{A}\subset D$，如果 $f:A\prec A$，则 $\overline{A}$ 内必存在 f 的弱斥性不动点.

3 定理的证明

我们先证明，当 $q\leqslant 2$ 时，定理的结论成立.

设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族，并且对任意 $f\in\mathscr{F}$，存在自然数 $k=k(f)>1$，使得 f^k 在 D 内最多只有 $q(\leqslant 2)$ 个弱斥性不动点. 我们要证明：$\mathscr{F}$ 是 D 内阶至多为 4 的拟正规族.

假如我们的结论不真. 则由拟正规族的定义可知：存在函数列 $\{f_n\}\subset\mathscr{F}$ 和 D 内的 5 个点 Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5，使得 $\{f_n\}$ 在 $Z_j(j=1,2,3,4,5)$ 的任何邻域内都不正规.

特别地，取充分小的 $\epsilon>0$，使 $D_j=\{Z;|Z-Z_j|<\epsilon\}\subset\overline{D}_j\subset D(j=1,2,3,4,5)$，并且 $\overline{D}_j\cap\overline{D}_s$

$=\varnothing(j\neq s)$，则$\{f_n\}$在D_1,D_2,D_3,D_4,D_5内都不正规.

易知，对上述$\{f_n\}$和D_1,D_2,D_3,D_4,D_5，下面四种情形必有一种发生.

情形1 存在某个$f\in\{f_n\}$和D_1,D_2,D_3,D_4,D_5中的三个区域(不妨设为D_1,D_2,D_3)，使得$f:D_1\prec D_1,D_2\prec D_2,D_3\prec D_3$.

情形2 存在$\{f_n\}$的某个子列(f_n)和D_1,D_2,D_3,D_4,D_5中的某两个区域(不妨设为D_1，D_2)，使得对任意$f\in(f_n)$，都有$f:D_1\prec D_1,D_2\prec D_2$，并且$f:D_j\not\prec D_j(j=3,4,5)$.

情形3 存在$\{f_n\}$的某个子列(f_n)和D_1,D_2,D_3,D_4,D_5中的某个区域(不妨设为D_1)，使得对任意$f\in(f_n)$，都有$f:D_1\prec D_1$，并且$f:D_j\not\prec D_j(j=2,3,4,5)$.

情形4 存在$\{f_n\}$的某个子列(f_n)，使得对任意$f\in(f_n)$，都有$f:D_j\not\prec D_j(j=1,2,3,4,5)$.

1.设情形1发生.则由引理2知，在$\overline{D}_1,\overline{D}_2,\overline{D}_3$内都有$f$在$D$内的弱斥性不动点，从而也有$f^k$在$D$内的弱斥性不动点$(k=2,3,\cdots)$.

2.设情形2发生.对D_1，不妨设下面三种情形同时发生(易证存在三个区域D_{j1},D_{j2},D_{j3}，使$f:D_1\prec D_{j1},D_1\prec D_{j2},D_1\prec D_{j3}$同时发生)

$$f:\ D_1\prec D_1,\tag{2.1}$$

$$f:\ D_1\prec D_2,\tag{2.2}$$

$$f:\ D_1\prec D_3.\tag{2.3}$$

对D_3，若$f:D_3\prec D_1$发生，则由(2.1)与(2.3)有$f:D_3\prec D_1\prec D_1\prec D_3$，由此可推得$f^2:D_3\prec D_3$及$f^3:D_3\prec D_3$.于是有：$f^{2k}=(f^2)\circ(f^2)\circ\cdots\circ(f^2):D_3\prec D_3$，$f^{2k+1}=(f^3)\circ(f^2)\circ\cdots\circ(f^2):D_3\prec D_3$.即有$f^k:D_3\prec D_3(k=2,3,\cdots)$.由引理2可知，在$\overline{D}_3$内有$f^k$在$D$内的弱斥性不动点$(k=2,3,\cdots)$.

由$f:D_1\prec D_1,D_2\prec D_2$又可知，在$\overline{D}_1,\overline{D}_2$内都有$f^k$在$D$内的弱斥性不动点$(k=2,3,\cdots)$.

于是，在$\overline{D}_1,\overline{D}_2,\overline{D}_3$内都有$f^k$在$D$内的弱斥性不动点$(k=2,3,\cdots)$.

设$f:D_3\not\prec D_1$.注意到$f:D_3\not\prec D_3$，则下面三种情形必同时发生

$$f:\ D_3\prec D_2,\tag{2.4}$$

$$f:\ D_3\prec D_4,\tag{2.5}$$

$$f:\ D_3\prec D_5.\tag{2.6}$$

对D_2，若$f:D_2\prec D_3$发生，注意到$f:D_2\prec D_2$，由(2.4)我们有$f:D_3\prec D_2\prec D_2\prec D_3$.于是，在$\overline{D}_1,\overline{D}_2,\overline{D}_3$内都有$f^k$在$D$内的弱斥性不动点$(k=2,3,\cdots)$.

设$f:D_2\not\prec D_3$，则$f:D_2\prec D_4$与$f:D_2\prec D_5$中至少有一个发生.不妨我们有

$$f:D_2\prec D_4.\tag{2.7}$$

对D_1，若$f:D_4\prec D_2$发生，注意到$f:D_2\prec D_2$，由(2.7)我们有$f:D_4\prec D_2\prec D_2\prec D_4$.于是，在$\overline{D}_1,\overline{D}_2,\overline{D}_4$内都有$f^k$在$D$内的弱斥性不动点$(k=2,3,\cdots)$.

设$f:D_4\not\prec D_2$，注意到$f:D_4\not\prec D_4$，则必定有$f:D_4\prec D_3$发生.注意到(2.4)，(2.5)，(2.7)都发生，我们有$f^2:D_3\prec D_3$及$f^3:D_3\prec D_3$.于是，在$\overline{D}_1,\overline{D}_2,\overline{D}_3$内都有$f^k$在$D$内的弱斥性不动点$(k=2,3,\cdots)$.

3.设情形3发生.对D_1，不妨设下面三种情形同时发生

$$f:\ D_1\prec D_1,\tag{3.1}$$

$$f:\ D_1 \prec D_2, \tag{3.2}$$
$$f:\ D_1 \prec D_3. \tag{3.3}$$

对 D_2,由于 $f:D_2 \not\prec D_2$,易知下面四种情形至少有一种发生

$$f:\ D_2 \prec D_1,\ D_2 \prec D_3,\ D_2 \prec D_4, \tag{3.4}$$
$$f:\ D_2 \prec D_1,\ D_2 \prec D_3,\ D_2 \prec D_5, \tag{3.5}$$
$$f:\ D_2 \prec D_1,\ D_2 \prec D_4,\ D_2 \prec D_5, \tag{3.6}$$
$$f:\ D_2 \prec D_3,\ D_2 \prec D_4,\ D_2 \prec D_5. \tag{3.7}$$

对 D_3,由于 $f:D_3 \not\prec D_3$,易知下面四种情形至少有一种发生

$$f:\ D_3 \prec D_1,\ D_3 \prec D_2,\ D_3 \prec D_4, \tag{3.8}$$
$$f:\ D_3 \prec D_1,\ D_3 \prec D_2,\ D_3 \prec D_5, \tag{3.9}$$
$$f:\ D_3 \prec D_1,\ D_3 \prec D_4,\ D_3 \prec D_5, \tag{3.10}$$
$$f:\ D_3 \prec D_2,\ D_3 \prec D_4,\ D_3 \prec D_5. \tag{3.11}$$

若(3.4),(3.5),(3.6)中的一种情形与(3.8),(3.9),(3.10)中的一种情形同时发生,则 $f:D_2 \prec D_1$ 与 $f:D_3 \prec D_1$ 同时发生. 于是,由(3.1),(3.2),(3.3)可推知,$f:D_2 \prec D_1 \prec D_1 \prec D_2$ 与 $f:D_3 \prec D_1 \prec D_1 \prec D_3$ 同时发生. 这时,在 $\overline{D}_1,\overline{D}_2,\overline{D}_3$ 内都有 f^k 在 D 内的弱斥性不动点($k=2,3,\cdots$).

若(3.4),(3.5),(3.6)中的一种情形与(3.11)同时发生,不妨设(3.4)与(3.11)同时发生,则由(3.1),(3.2),(3.3)可知:$f^2:D_2 \prec D_2, D_3 \prec D_3$ 及 $f^3:D_2 \prec D_2, D_3 \prec D_3$ 同时发生. 于是,在 $\overline{D}_1,\overline{D}_2,\overline{D}_3$ 内都有 f^k 在 D 内的弱斥性不动点($k=2,3,\cdots$).

若(3.8),(3.9),(3.10)中的一种情形与(3.7)同时发生,不妨设(3.8)与(3.7)同时发生,同样地可以推知,在 $\overline{D}_1,\overline{D}_2,\overline{D}_3$ 内都有 f^k 在 D 内的弱斥性不动点($k=2,3,\cdots$).

若(3.7)与(3.11)同时发生,则由(3.1),(3.2),(3.3)可知,$f^2:D_2 \prec D_2, D_3 \prec D_3$ 与 $f^3:D_2 \prec D_2, D_3 \prec D_3$ 同时发生. 于是,在 $\overline{D}_1,\overline{D}_2,\overline{D}_3$ 内都有 f^k 在 D 内的弱斥性不动点($k=2,3,\cdots$).

4. 设情形 4 发生.

4.1. 在 D_1,D_2,D_3,D_4,D_5 中任选两个记为 A 与 B,其余三个分别记为 C_1,C_2,C_3.

对 $\{f_n\}$,C_j 及 A,B,C_j 应用引理 1(注意到 $f:C_j \not\prec C_j$)可知:存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_n^{(1)}\}$,使得

$$f:\ C_j \prec A\ (\forall\ f \in \{f_n^{(1)}\}) \quad 或 \quad f:\ C_j \prec B\ (\forall\ f \in \{f_n^{(1)}\}).$$

由此可知,存在 $j_1,j_2 \in \{1,2,3\}$,$j_1 \neq j_2$,使得

$$f:\ C_{j_1} \prec A,\ C_{j_2} \prec A\ (\forall\ f \in \{f_n^{(1)}\}) \quad 或 \quad f:\ C_{j_1} \prec B,\ C_{j_2} \prec B\ (\forall\ f \in \{f_n^{(1)}\}).$$

不失一般性,不妨设下述情形发生(其他情形可以类似地证明)

$$f:\ C_1 \prec A,\ C_2 \prec A\ (\forall\ f \in \{f_n^{(1)}\}). \tag{4.1}$$

对 $\{f_n^{(1)}\}$,A 及 A,C_1,C_2 应用引理 1(注意到 $f:A \not\prec A$)可知:存在子列 $\{f_n^{(2)}\} \subset \{f_n^{(1)}\}$,使得

$$f:\ A \prec C_1 (\forall\ f \in \{f_n^{(2)}\}) \quad 或 \quad f:\ A \prec C_2 (\forall\ f \in \{f_n^{(2)}\}).$$

注意到 $\{f_n^{(2)}\} \subset \{f_n^{(1)}\}$,由(4.1)可知,下面两种情形必有一种发生

$$f:\ A \prec C_1 \prec A\ (\forall\ f \in \{f_n^{(2)}\}), \tag{4.2}$$
$$f:\ A \prec C_2 \prec A\ (\forall\ f \in \{f_n^{(2)}\}). \tag{4.3}$$

对 $\{f_n^{(2)}\}$,A 及 A,B,C_3 应用引理 1(注意到 $f:A \not\prec A$)可知:存在子列 $\{f_n^{(3)}\} \subset \{f_n^{(2)}\}$,使得

$$f: A \prec B\ (\forall f \in \{f_n^{(3)}\}) \quad 或 \quad f: A \prec C_3 (\forall f \in \{f_n^{(3)}\}).$$

对$\{f_n^{(3)}\}$,$B(C_3)$及$B(C_3)$,C_1,C_2应用引理1(注意到$f:B \not\prec B$及$f:C_3 \not\prec C_3$可知:存在子列$\{f_n^{(4)}\} \subset \{f_n^{(3)}\}$,使得

$$f: A \prec B(C_3) \prec C_1 \prec A\ (\forall f \in \{f_n^{(4)}\}) \quad 或 \quad f: A \prec B(C_3) \prec C_2 \prec A\ (\forall f \in \{f_n^{(4)}\}).$$

注意到$\{f_n^{(4)}\} \subset \{f_n^{(3)}\} \subset \{f_n^{(2)}\} \subset \{f_n^{(1)}\}$,易知下面四种情形必有一种发生

$$f: A \prec B \prec C_1 \prec A\ (\forall f \in \{f_n^{(4)}\}), \tag{4.4}$$

$$f: A \prec B \prec C_2 \prec A\ (\forall f \in \{f_n^{(4)}\}), \tag{4.5}$$

$$f: A \prec C_3 \prec C_1 \prec A\ (\forall f \in \{f_n^{(4)}\}), \tag{4.6}$$

$$f: A \prec C_3 \prec C_2 \prec A\ (\forall f \in \{f_n^{(4)}\}). \tag{4.7}$$

记$(f_n) = \{f_n^{(4)}\}$,则对任意$f \in (f_n)$,不论(4.2),(4.3)中的哪一种情形(4.4),(4.5),(4.6),(4.7)中的哪一种情形同时发生,一定有$f^2: A \prec A$及$f^3: A \prec A$.

由引理2可知,在$\overline{A}$内有f^k在D内的弱斥性不动点($k=2,3,\cdots$)

4.2.令$A'=C_1$,$B'=B$,$C_1'=A$,$C_2'=C_2$,$C_3'=C_3$.重复4.1的推理过程可知,存在子列$\{f_n^{(1)}\} \subset (f_n)$和$A'$,$B'$中的某个区域(不妨设为$A'$),使得对任意$f \in \{f_n^{(1)}\}$,在$\overline{A}'$内有$f^k$在$D$内的弱斥性不动点($k=2,3,$).

4.3.令$A''=C_2'$,$B''=B'$,$C_1''=C_1'$,$C_2''=A'$,$C_3''=C_3'$.重复4.1的推理过程可知,存在子列$\{f_n^{(2)}\} \subset (f_n^{(1)})$和$A''$,$B''$中的某个区域(不妨设为$A''$),使得对任意$f \in \{f_n^{(2)}\}$,在$\overline{A}''$内有$f^k$在$D$内的弱斥性不动点($k=2,3,$).

于是,存在$f \in \{f_n^{(2)}\} \subset \mathscr{F}$,使得在$\overline{A}$,$\overline{A}'$,$\overline{A}''$内都有$f^k$在$D$内的弱斥性不动点($k=2,3,\cdots$).

综上所述,不论哪一种情形发生,都存在$f \in \mathscr{F}$,使得f^k在D内至少存在3个弱斥性不动点($k=2,3,\cdots$).与$q \leqslant 2$矛盾!

这就证明了,当$q \leqslant 2$时,定理1的结论成立.

当$q>2$时,倘若定理1的结论不真,则由拟正规族的定义可知,存在函数列,$\{f_n\} \in \mathscr{F}$和$q+3$个开圆$D_j \subset \overline{D}_j \subset D (j=1,2,\cdots,q+3)$,$\overline{D}_j \cap \overline{D}_s = \varnothing (j \neq s)$使得$\{f_n\}$在$D_1, D_2, \cdots, D_{q+3}$内都不正规.在$D_1, D_2, \cdots, D_{q+3}$中取出5个区域$D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$,由上述推理可知,存在$f \in \mathscr{F}$和3个区域(不妨设为$D_1, D_2, D_3$),使得在$\overline{D}_1, \overline{D}_2, \overline{D}_3$内都有$f^k$在$D$内的弱斥性不动点($k=2,3,\cdots$).再对$D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$作类似的推理又可以得到类似的结论.这样经过有限次推理可知,存在$f \in \mathscr{F}$,使得f^k在D内存在$q+1$个弱斥性不动点.与定理1的条件矛盾!所以,当$q>2$时,定理1的结论也成立.

参考文献:

[1] YANG L. *Some recent results and problems in the theory of value-distribution in procedings of the symposium on value distribution theory in several complex vari-ables* [J]. Univ. of Notre Dame Press, Notre Dame Math. Lect., 1992, **12**: 157-171.

[2] ESSEN M, WU S. *Repulsive fixpoint of analytic functions with application to complex dynamics* [J]. J. London Math. Soc., 2000, **62**(2): 139-148.

[3] BARGMANN D, BERGWEILER W. *Periodic Points and Normal Families* [M]. Proc. Ams, to appear.

[4] 王淑贵,伍胜建. 亚纯函数的不动点与拟正规族 [J]. 数学学报, 2002, **45**(3): 545-550.
WANG Shu-gui, WU Shengjian. *Fixpoints of meromorphic functions and quasinormal families* [J]. Acta Math. Sinica, 2002, **45**(3): 545-550.

[5] HAYMAN W. *Meromorphic Function* [M]. Clarendon Press, Oxford, 1964.

Weakly Repulsive Fix-Points of Meromorphic Functions and Quasinormal Families

WANG Shu-gui

(Dept. of Math., Shihezi University, Xinjiang 83200, China)

Abstract: We study the relationship between the weakly repulsive fixpoints of meromorphic functions and quasinormal families. Let F be a family of meromorphic functions in a domain in D and let $q \geqslant 0$ be an integer. We obtain that if for each $f \in \mathscr{F}$ there is an integer $k = k(f) > 1$ such that the k-th iteration f^k of f has q weakly repulsive fixpoints in D, then $\mathscr{F}$ is a quasinormal family with order at most max $\{4, q+2\}$.

Key words: meromorphic function; weakly repulsive fixpoint; quasinormal family.