第23卷第4期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 4
2003年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2003

群胚上的Dirac结构及泊松约化*

钟德寿[1] 贺龙光[2]

(1. 中国青年政治学院经济系，北京 100089；2. 首都师范大学数学系，北京 100037)

摘　要：本文详细讨论了李双代数胚中的Dirac结构、群胚上的Dirac结构. 利用Dirac结构的特征对的概念，给出了作用不变Dirac结构，拉回Dirac结构等概念的新的刻画. 最后利用Dirac结构的有关性质，讨论了泊松齐性空间和泊松群胚作用的约化.

关键词：泊松群胚；泊松作用；李双代数胚；泊松齐性空间.

分类号：AMS(2000) 17B66,22A22,53C15/CLC number：O186.16

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2003)04-0691-13

1 引　言

Dirac结构是由Courant, T. J. 和Weinstein, A. 引进. 在文献[1]中给出了Dirac流形的概念. 一个流形P上的光滑Dirac子丛是$TP\oplus T^*P$的光滑子丛L，满足在对称内积下是极大迷向和L的截面在Courant定义的括号下是闭的条件. 带有Dirac子丛的光滑流形我们称其为Dirac流形. 流形的Dirac结构理论包含了预辛结构、泊松结构、叶层结构理论，为泊松几何的约化理论提供了有力工具. 刘张炬、A. Weinstein和徐平将Dirac结构理论发展到李双代数胚上(见[2],[3],[4])，为研究群胚作用的约化理论起到了关键的作用.

本文的§2，利用Dirac结构特征对的概念，在定理2.1之下将各种形式的李双代数胚中的Dirac结构统一起来，使得Dirac结构的概念更直观. 本文的§3，讨论了群胚上的不变的Dirac结构. 利用Dirac结构的特征对，给出了关于泊松李群作用下的泊松齐性空间的定理的新证明，并将这种新的方法推广到群胚上. 本文的§4，利用前面的概念和方法，讨论了泊松齐性空间和不具备泊松齐性空间这样好性态的泊松群胚作用的约化问题.

2 李双代数胚中的Dirac结构

在李双代数胚(A,A^*)中，自然存在着一个非退化、双线性的对称内积和一个反对称内积如下：

* 收稿日期：2001-04-11
作者简介：钟德寿(1963-)，博士，副教授.

$$\langle X+\xi,Y+\eta\rangle_{\pm}=\frac{1}{2}(\langle\xi,Y\rangle\pm\langle X,\eta\rangle),$$

其中$\langle,\rangle$表示对偶丛截面之间的配对运算，$X,Y\in\Gamma(A)$，$\xi,\eta\in\Gamma(A^*)$. 在$\Gamma(A\oplus A^*)$中定义括号运算为

$$[X+\xi,Y+\eta]=([X,Y]+L_\xi Y-L_\eta X-d_*\langle X+\xi,Y+\eta\rangle_-)+ \\ ([\xi,\eta]+L_X\eta-L_Y\xi+d\langle X+\xi,Y+\eta\rangle_-), \qquad (*)$$

当A^*中的括号$[\xi,\eta]$对任意的$\xi,\eta\in\Gamma(A^*)$都是零，这种情况就退化到Courant最初定义的括号运算. 其实，TP和T^*P带有零括号是一个李双代数胚，在Courant定义的括号运算下$TP\oplus T^*P$带有锚映射$\rho=id+0$就构成了刘张炬意义下的Courant代数胚或李双代数胚的Double.

在Courant代数胚$(E,\rho,[\cdot,\cdot],(\cdot,\cdot))$中的Dirac子丛是$E$的一个子丛，它关于对称内积$(\cdot,\cdot)$是极大迷向的，关于括号运算$[\cdot,\cdot]$是闭的. L是E的Dirac子丛，则$(L,\rho|L,[\cdot,\cdot])$是通常意义下的李代数胚.

在[2]中刘张炬利用Dirac结构的特征对刻画Dirac结构，使得泊松约化更几何化、更直观. 在这里我们利用这种思想去刻画李双代数胚中Dirac结构.

设(A,A^*)是李双代数胚，一个光滑分布$D\subseteq A$和一个双向量场$\Omega\in\Gamma(\wedge^2A)$构成的对$(D,\Omega)$，对应$A\oplus A^*$中的一个极大迷向子丛如下：

$$L=\{X+\Omega^\#\xi+\xi|\forall X\in D,\xi\in D^\perp\}=D+\mathrm{graph}(\Omega^\#|_{D^\perp}).$$

其中，$D^\perp\subseteq A^*$是分布D的余法分布，$D=L\cap A$被称为L的特征分布，这样的对(D,Ω)被称为L的特征对.

定理 2.1[2]　在李双代数胚(A,A^*)中，$L\subset A\oplus A^*$是一个对应于特征对(D,Ω)的极大迷向子丛. 那么，L是一个Dirac子丛当且仅当下列条件满足：

(1) D是一个可积分布；

(2) Ω满足Maurer-Cartan类型的方程，即

$$d_*\Omega+\frac{1}{2}[\Omega,\Omega]\equiv 0(\mathrm{mod}D);$$

(3) $D^\perp$关于直和括号$[\cdot,\cdot]+[\cdot,\cdot]_\Omega$是封闭的，即

$$[\xi,\eta]+[\xi,\eta]_\Omega\in\Gamma(D^\perp),\forall\xi,\eta\in\Gamma(D^\perp),$$

其中$[\cdot,\cdot]_\Omega$的定义如下：

$$[\xi,\eta]_\Omega=L_{\Omega\xi}\eta-L_{\Omega\eta}\xi-d\langle\Omega\xi,\eta\rangle,\forall\xi,\eta\in\Gamma(A^*).$$

在上述定理中，如果$\Omega=0$，那么$L=D\oplus D^\perp$，定理的第二条自然满足，我们得到下列推论：

推论 2.2　设(A,A^*)是李双代数胚，$D\subseteq A$是A的一个子丛. $L=D\oplus D^\perp\subseteq A\oplus A^*$是Dirac结构当且仅当$D$和$D^\perp$分别是$A$和$A^*$的李子代数胚.

在$L=D\oplus D^\perp$的情况下，L关于反对称内积$\langle\cdot,\cdot\rangle_-$是零. 所以称这样的Dirac结构是零Dirac结构(nullDirac).

当李双代数胚(A,A^*)是三角李双代数胚(A,A^*,Λ)时，$\Gamma(A^*)$中的李括号是由双向量场Λ诱导的记为$[\cdot,\cdot]_\Lambda$，上边缘算子d_*满足$d_*X=[\Lambda,X]$. 并且有下列公式：

$$d_*\Omega+\frac{1}{2}[\Omega,\Omega]=\frac{1}{2}[\Lambda+\Omega,\Lambda+\Omega],[\cdot,\cdot]_\Lambda+[\cdot,\cdot]_\Omega=[\cdot,\cdot]_{\Lambda+\Omega}.$$

上面的定理就变为如下形式：

推论 2.3 设(A,A^*,Λ)是三角李双代数胚，$L\subset A\oplus A^*$是对应于特征对(D,Ω)的极大迷向子丛. 那么，L是Dirac结构当且仅当下列条件满足：

(1) D是可积的；

(2) $[\Lambda+\Omega,\Lambda+\Omega]\equiv 0(\mathrm{mod}D)$；

(3) $\Lambda+\Omega$是D-不变的$(\mathrm{mod}D)$，即$L_X(\Lambda+\Omega)\equiv 0(\mathrm{mod}D)$，$\forall X\in\Gamma(D)$.

特别地，设M是一个泊松流形带有泊松张量π时，(TM,T^*M,π)构成三角李双代数胚，在$TM\oplus T^*M$中如果有一个Dirac结构L，且$D=L\cap TM$是可约化的，即关于D诱导的叶层$\mathscr{F}$，商空间$P=M/\mathscr{F}$是一个流形和投影映射是浸没，有时又称L是可约化的. 那么，由上述推论的第三条$\pi+\Omega$模D是D-不变的，它可以约化成P上的双向量场π_P，而第二条$[\pi+\Omega,\pi+\Omega]\equiv 0(\mathrm{mod}D)$保证它在$P$上是泊松张量. 其实，如果设$\bar{\pi}_P$是$P$上$\pi+\Omega$的约化泊松张量$\pi_P$的提升，则$\Omega=\bar{\pi}_P-\pi(\mathrm{mod}D)$. 那么，$\Omega$恰是[5]中的差异双向量场. 当$\Omega\equiv 0(\mathrm{mod}D)$时，$\Omega\xi\in\Gamma(D)$，$\forall\xi\in\Gamma(D^\perp)$. 这时$L=D\oplus D^\perp$，且$Pr_*\pi=\pi_P$投影映射是泊松映射，这是null Dirac结构的特征.

当M是任意的一个光滑流形，T^*M上带有零括号，则(TM,T^*M)构成自然的李双代数胚. 在$TM\oplus T^*M$中的Dirac结构L对应的特征对是(D,Ω). 定理2.1中的第二条，由于$d_*\Omega=0$，就等价于$[\Omega,\Omega]=0(\mathrm{mod}D)$. 第三条等价于$\Gamma(D^\perp)$关于括号$[\cdot,\cdot]_\Omega$是闭的. 又因为对任意$X\in\Gamma(D)$，$\xi,\eta\in\Gamma(D^\perp)$.

$$\begin{aligned}L_X\Omega(\xi,\eta)&=L_X(\Omega(\xi,\eta))-\Omega(L_X\xi,\eta)-\Omega(\xi,L_X\eta)\\&=\langle X,d\Omega(\xi,\eta)\rangle+\langle L_X\xi,\Omega\eta\rangle-\langle\Omega\xi,L_X\eta\rangle\\&=-\langle X,d\Omega(\xi,\eta)\rangle-\langle X,L_{\Omega\eta}\xi\rangle+\langle X,L_{\Omega\xi}\eta\rangle\\&=\langle X,[\xi,\eta]_\Omega\rangle,\end{aligned}$$

所以，第三条又等价于$L_X\Omega\equiv 0(\mathrm{mod}D)$，即$\Omega$模$D$是$D$-不变的. 如果$D$是可约化的，对应的叶层为$\mathscr{F}$，则在商流形$M/\mathscr{F}$上有泊松结构为$Pr_*\Omega$. 这样我们得到下列推论.

推论 2.4 任何一个光滑流形上的可约化Dirac结构，都一一对应着它的商流形上的泊松结构.

设(A,A^*)是李双代数胚，$\Omega:A^*\to A$是丛映射，L是Ω的图，即

$$L=\{\Omega\xi+\xi|\xi\in A^*\}.$$

这时，$D=0$，$D^\perp=A^*$. 定理2.1的第一条和第三条显然满足. 我们又得到下列推论.

推论 2.5 $L=\{\Omega\xi+\xi|\xi\in A^*\}$是$(A,A^*)$上的Dirac结构当且仅当$\Omega$是反对称的双向量场且满足Maurer-Cartan类型的方程：

$$d_*\Omega+\frac{1}{2}[\Omega,\Omega]=0.$$

这正是[3]中的定理6.1. 满足上述Maurer-Cartan类型方程的算式Ω又被称为Hamiltonian算子，当$[\Omega,\Omega]=0$时又称其为强Hamiltonian算子.

3 群胚上的不变Dirac结构

设一个李群 G 作用在一个流形 M 上，我们记这个作用为：

$$\varphi: G \times M \to M, \varphi(g, x) = gx, \forall g \in G, x \in M,$$

设 TM, T^*M 分别是 M 的切丛和余切丛，那么 G 在 M 上的作用可以提升为 G 在 $TM \oplus T^*M$ 的作用，$\forall X \in T_xM, \xi \in T_x^*M$,

$$\Phi: G \times (TM \oplus T^*M) \to TM \oplus T^*M, \Phi(g, X + \xi) = (\varphi_g)_*(X) + (\varphi_{g^{-1}})^*(\xi).$$

$TM \oplus T^*M$ 的一个子丛 L 在 G 的作用下是不变的，如果 $\Phi(L) \subseteq L$. 我们设 L 是关于 $TM \oplus T^*M$ 中非退化、对称的、双线性形式是极大迷向的，它对应的特征对是 (D, Ω). 我们有下列命题.

命题 3.1 $TM \oplus T^*M$ 的一个极大迷向子丛 L 在 G 的作用下是不变的，当且仅当 L 的特征对 (D, Ω) 在 G 的作用下是不变的，其中 Ω 在 G 的作用下不变是在模 D 的意义下不变的.

证明 设 L 在 G 的作用下是不变的，容易证明 $\Phi_g(L)$ 是极大迷向的，所以 $\Phi_g(L) = L, \forall g \in G$. 即

$$\Phi_g(L) = \{(\varphi_g)_*(X) + (\varphi_g)_*(\Omega\xi) + (\varphi_{g^{-1}})^*(\xi) \mid X + \Omega\xi + \xi \in L\} = L.$$

取 $\xi = 0$，就得到 $(\varphi_g)_* X \in D$. 同时，$\{(\varphi_{g^{-1}})^*(\xi) \mid \xi \in D^\perp\} = D^\perp$. 注意到 $\forall \xi \in T_x^*M, \eta \in T_{gx}^*M$,

$$\begin{aligned}
\langle (\varphi_g)_*(\Omega\xi), \eta \rangle &= \langle \Omega\xi, (\varphi_g)^*\eta \rangle \\
&= \Omega(\xi, (\varphi_g)^*\eta) = ((\varphi_g)_*\Omega)((\varphi_{g^{-1}})^*(\xi), \eta) \\
&= \langle ((\varphi_g)_*\Omega)((\varphi_{g^{-1}})^*(\xi)), \eta \rangle,
\end{aligned}$$

所以 $(\varphi_g)_*(\Omega\xi) = ((\varphi_g)_*\Omega)((\varphi_{g^{-1}})^*(\xi))$. 于是 $L = \Phi_g(L) = \{(\varphi_g)_* X + ((\varphi_g)_*\Omega)((\varphi_{g^{-1}})^*(\xi)) + (\varphi_{g^{-1}})^*(\xi)\}$. 由此得到 $(D, (\varphi_g)_*\Omega)$ 也是 L 的特征对. 根据 Dirac 结构特征对的定义，就有 $(\varphi_g)_*\Omega = \Omega(\mathrm{mod} D)$ 和 $(\varphi_g)_*(D) = D$，即 (D, Ω) 在 G 的作用下是不变的. 反之是显然的.

由于 Dirac 结构 L 的特征双向量场 Ω 在它的特征子空间 D 上不唯一确定，所以后面谈到 Ω 不变，如果无特别声明，都是指在模 D 意义下的不变.

推论 3.2 设 M 是一个流形带有一个李群 G 作用，M 的一个 Dirac 子丛 L 带有对应的特征对 (D, Ω) 是 G 作用不变的当且仅当 (D, Ω) 在 G 的作用下是不变的.

命题 3.3 设 G 是一个泊松李群，M 是一个泊松流形，同时也是一个泊松 G-空间. L 是 M 的切李双代数胚中的一个可约化的 Dirac 结构，则 L 是 G 作用下不变的当且仅当 G 作用约化到商泊松流形 $M/\mathscr{F}$ 上时仍是一个泊松作用.

证明 设 G 上的泊松张量为 π_G，M 上的泊松张量为 π，商流形 $P = M/\mathscr{F}$ 上的泊松张量为 π_P，π_P 的提升为 $\bar{\pi}_P$，则差异双向量场 $\Omega = \bar{\pi}_P - \pi(\mathrm{mod} D)$ 和 $D = L \cap TM$ 构成 L 的特征对. 当 L 在 G 的作用下是不变时，由命题 2.1，当且仅当特征对 (D, Ω) 在 G 的作用下不变. 这个作用保持 D 不变，就可以约化作用到商流形上. 由 $\varphi_*(\Omega) = \Omega(\mathrm{mod} D)$，即 $(\varphi_g)_*(\Omega(x)) = \Omega(gx)(\mathrm{mod} D)$，其中 $g \in G, x \in M$. 我们有

$$\begin{aligned}
(\varphi_g)_*(\bar{\pi}_P - \pi)(x) &= (\bar{\pi}_P - \pi)(gx)(\mathrm{mod} D) \\
&= \bar{\pi}_P(gx) - \pi(gx)(\mathrm{mod} D) \\
&= \bar{\pi}_P(gx) - ((\varphi_g)_*\pi(x) + (r_x)_*\pi_G(g))(\mathrm{mod} D) \\
&= \bar{\pi}_P(gx) - (\varphi_g)_*\pi(x) - (r_x)_*\pi_G(g)(\mathrm{mod} D)
\end{aligned}$$

和

$$\bar{\pi}_P(gx) = (\varphi_g)_*\bar{\pi}_P(x) + (r_x)_*\pi_G(g))(\mathrm{mod} D).$$

上式在投影映射 $Pr:M\to P$ 之下，就变成：

$$\pi_P(g[x]) = (\varphi_g)_*\pi_P([x]) + (r_{[x]})_*\pi_G(g).$$

注意到上式中，$r_{[x]}g=g[x]=[gx]=Pr(r_xg)$，这就证明了 G 在商泊松流形上的作用是泊松作用. 另一方面，当 G 的作用能约化到商流形上，就一定有 G 保持 D 不变. 从上面的证明逆推回去，得到 Ω 是 G 作用不变的.

推论 3.4 设 G 是一个泊松李群，G 在 G 上通过左乘诱导了一个泊松作用. 则 G 的切李双代数胚中的一个可约化 Dirac 子丛 L 带有特征对 (h,Ω) 在 G 的左平移作用下是不变的，当且仅当 G 的左平移作用约化到商流形 G/H 上仍是泊松作用.

推论 3.4 中的 H 是可积子丛 h 对应的叶层. 当可约化 Dirac 子丛 L 在 G 的左平移作用下不变时，则 L 一一对应着 $g\oplus g^*$ 中的一个子空间 K，K 是 Dirac 子空间，也是 $g\oplus g^*$ 的李子代数. $k=K\cap g$ 是 g 的李子代数，如果 $\mathscr{K}$ 是 G 的连通李子群，它的李代数是 k. 当 $\mathscr{K}$ 是一个闭子群时，$G/\mathscr{K}$ 是一个好的流形且投影映射是浸没. 这样的 K 我们称其为 $g\oplus g^*$ 的正规 Dirac 结构. 所以，$g\oplus g^*$ 的正规 Dirac 结构一一对应 G 上的左平移不变的可约化的 Dirac 结构，也一一对应着泊松齐性空间 G/K.

为了将这种方法推广到群胚上，建立群胚上的 Dirac 结构和它的切李双代数胚中的 Dirac 结构之间的联系. 我们建立两个李双代数胚的直和丛之间的映射.

设 (A,A^*)，(B,B^*) 分别是两个李双代数胚，且存在着 $\varphi:(A,A^*)\to(B,B^*)$ 的李双代数胚满态射，即 $\varphi:A\to B$ 是李代数胚满态射且是泊松映射（A 和 B 分别带有从它们的对偶李代数胚 A^* 和 B^* 诱导的李一泊松结构）. 我们有 φ 是满映射，则 φ^* 是单映射. 我们注意到 $\varphi^*:B^*\to(\ker\varphi)^\perp$，其中，$(\ker\varphi)^\perp$ 表示映射 φ 的核的零化子空间. 所以 $\varphi^*:B^*\to(\ker\varphi)^\perp$ 是一个双映射，有逆映射 $(\varphi^*)^{-1}:(\ker\varphi)^\perp\to B^*$. 我们建立映射

$$\Phi:=\varphi\oplus(\varphi^*)^{-1}:A\oplus(\ker\varphi)^\perp\to B\oplus B^*.$$

引理 3.5 设 $L\subset B\oplus B^*$ 是极大迷向子丛，$\overline{L}=\Phi^{-1}(L)$ 是 L 的原像丛，则 $\overline{L}$ 也是 $A\oplus A^*$ 的极大迷向子丛.

证明 设 $L=\{x+\xi\mid X\in B,\xi\in B^*\}$，$\overline{L}=\{\overline{X}+\overline{\xi}\mid\overline{X}\in A,\overline{\xi}\in(\ker\varphi)^\perp\}$，其中 $\varphi^*(\xi)=\overline{\xi}$，$\varphi(\overline{X})=X$，$\varphi^*(\eta)=\overline{\eta}$，$\varphi(\overline{Y})=Y$. 则

$$\begin{aligned}\langle\overline{X}+\overline{\xi},\overline{Y}+\overline{\eta}\rangle_+&=\frac{1}{2}(\langle\overline{X};\overline{\eta}\rangle+\langle\overline{\xi};\overline{Y}\rangle)\\&=\frac{1}{2}(\langle\overline{X},\varphi^*\eta\rangle+\langle\varphi^*\xi,\overline{Y}\rangle)\\&=\frac{1}{2}(\langle\varphi(\overline{X}),\eta\rangle,\langle\xi,\varphi(\overline{Y})\rangle)\\&=\frac{1}{2}(\langle\eta,X\rangle+\langle\xi,Y\rangle)=0.\end{aligned}$$

从维数计算

$$\dim\overline{L}=\dim\ker\varphi+\dim L=\dim\ker\varphi+\dim B=\dim\ker\varphi+\dim(\ker\varphi)^\perp=\dim A,$$

所以，$\overline{L}$ 是极大迷向的.

定理 3.6 $\overline{L}$ 是 Dirac 结构当且仅当 L 是 Dirac 结构.

证明 设极大迷向子丛 L 对应的特征对是 (D,Ω)，它在 Φ 映射之下的原像丛 $\overline{L}$ 对应的特

征对是$(\overline{D},\overline{\Omega})$，则$\overline{D}=\overline{L}\cap A=\Phi^{-1}(L)\cap\Phi^{-1}(B)=\Phi^{-1}(L\cap B)=\Phi^{-1}(D)$，即$\Phi(\overline{D})=D$. 由于$\ker\varphi\subset\overline{D}$，则$\overline{D}^{\perp}\subset(\ker\varphi)^{\perp}$. 所以，对任意$\overline{\xi}\in\overline{D}^{\perp}$一定存在唯一的$\xi\in B^{*}$使得$\overline{\xi}=\varphi^{*}(\xi)$. 所以，对任意$\overline{X}+\overline{\Omega}\overline{\xi}+\overline{\xi}\in\overline{L}$，得到

$$\varphi(\overline{X})+\varphi(\overline{\Omega}\,\overline{\xi})+(\varphi^{*})^{-1}(\overline{\xi})\in L.$$

利用类似于命题 3.1 中的$(\varphi_g)_*(\Omega\xi)=((\varphi_g)_*\Omega)((\varphi_{g^{-1}}{}^{*})(\xi))$的证明，我们可以证明$\varphi(\overline{\Omega}\overline{\xi})=(\varphi\overline{\Omega})(\xi)(\mathrm{mod}D)$，即$\varphi\overline{\Omega}=\Omega(\mathrm{mod}D)$.

当L是 Dirac 结构时，由定理 2.1，L的特征对(D,Ω)满足定理的条件. 因为$\varphi:A\to B$是李代数胚态射，$\overline{D}=\overline{L}\cap A$中的任意截面$\overline{X},\overline{Y}$. 都有$\varphi$—分解如下[8]

$$\varphi\circ\overline{X}=\sum u_i(X_i\circ f),\quad \varphi\circ\overline{Y}=\sum v_j(Y_j\circ f),$$

并且有

$$\varphi[\overline{X},\overline{Y}]=\sum u_iv_j([X_i,Y_j]\circ f)+\sum[\overline{X},v_j](Y_j\circ f)-\sum[\overline{Y},u_i](X_i\circ f).$$

成立，其中$X_i,Y_j\in\Gamma(D)$，u_i,v_j是李代数胚A的底流形$\overline{P}$上的函数，f是$\overline{P}$到李代数胚B的底流形P的映射，且有$f\circ Pr=Pr\circ\varphi$和$Tf\circ\overline{a}=a\circ\varphi$，其中$Pr,Tf,\overline{a},a$分别表示从$A,B$的投影映射，$f$的切映射，李代数胚$A,B$的锚映射. 当$D$可积时，有$[X_i,Y_j]\in\Gamma(D)$，那么，$\varphi[\overline{X},\overline{Y}]$仍可表示为$\Gamma(D)$中截面的$\varphi$—分解. 所以$\varphi[\overline{X},\overline{Y}]\in D$，即$[\overline{X},\overline{Y}]\in\Gamma(\overline{D})$. $\overline{D}$是可积的.

关于定理中的第二条，由于$\overline{\Omega}$和Ω是φ相关的$(\mathrm{mod}D)$，我们有$\varphi[\overline{\Omega},\overline{\Omega}]=[\Omega,\Omega](\mathrm{mod}D)$. 利用$\varphi$是李双代数胚态射，$(\varphi^{*})^{-1}$还是$(\ker\varphi)^{\perp}\to B^{*}$的李代数胚态射，这里我们把$(\ker\varphi)^{\perp}$看成是$A^{*}$的一个李子代数胚. 这样，设李代数胚$(\ker\varphi)^{\perp}$和$B^{*}$的锚映射分别是$\overline{a}_*$和$a_*$，我们有$Tf\circ\overline{a}_*=a_*\circ(\varphi^{*})^{-1}$和$Tf\circ\overline{a}_*\circ\varphi^{*}=a_*$. 对任意$\xi\in\Gamma(B^{*})$，$g\in C^{\infty}(P)$，

$$Tf\circ\overline{a}_*\circ\varphi^{*}(\xi)g=a_*(\xi)g\Rightarrow\overline{a}_*\circ(\varphi^{*})(\xi)(g\circ f)=a_*(\xi)g.$$

我们在后面证明$d_*\varphi\overline{\Omega}=\varphi(d_*\overline{\Omega})$，则

$$d_*(\overline{\Omega})+\frac{1}{2}[\overline{\Omega},\overline{\Omega}]\equiv 0(\mathrm{mod}\,\overline{D}).$$

定理的第三条，由于$(\varphi^{*})^{-1}$是一一的，所以$\Gamma((\ker\varphi)^{\perp})$都是由$(\varphi^{*})^{-1}$相关的截面构成. $\Gamma(\overline{D}^{\perp})\subset\Gamma((\ker\varphi)^{\perp})$，对任意的$\overline{\xi},\overline{\eta}\in\Gamma(\overline{D}^{\perp})$，$[\xi,\eta]=[(\varphi^{*})^{-1}\overline{\xi},(\varphi^{*})^{-1}\overline{\eta}]=(\varphi^{*})^{-1}[\overline{\xi},\overline{\eta}]$，和$[\overline{\xi},\overline{\eta}]_{\overline{\Omega}}=L_{\overline{\Omega}\overline{\xi}}\overline{\eta}-L_{\overline{\Omega}\overline{\eta}}\overline{\xi}-d(\overline{\Omega}(\overline{\xi},\overline{\eta}))$，我们在后面证明$[\overline{\xi},\overline{\eta}]_{\overline{\Omega}}=\varphi^{*}[\xi,\eta]_{\Omega}$，所以当$[\xi,\eta]+[\xi,\eta]_{\Omega}\in D^{\perp}$，我们就有$(\varphi^{*})^{-1}([\overline{\xi},\overline{\eta}])+[\overline{\xi},\overline{\eta}]_{\overline{\Omega}})\in D^{\perp}$，即$[\overline{\xi},\overline{\eta}]+[\overline{\xi},\overline{\eta}]_{\overline{\Omega}}\in\overline{D}^{\perp}$. 类似的我们可以证明定理的另一方面.

定理 3.6 中的技术证明

(1) $d_*(\varphi\overline{\Omega})=\varphi(d_*,\overline{\Omega})$;

(2) $[\overline{\xi},\overline{\eta}]_{\overline{\Omega}}=\varphi^{*}[\xi,\eta]_{\Omega}$.

(1) 的证明如下：对任意$\xi,\eta,\gamma\in\Gamma(B^{*})$，

$$\begin{aligned}d_*(\varphi\overline{\Omega})(\xi,\eta,\gamma)=&a_*(\xi)(\varphi\overline{\Omega}(\eta,\gamma))-a_*(\eta)(\varphi\overline{\Omega}(\xi,\gamma))+\\&a_*(\gamma)(\varphi\Omega(\xi,\eta))+\varphi\overline{\Omega}(\xi,[\eta,\gamma])-\varphi\overline{\Omega}(\eta,[\gamma,\xi])+\varphi\overline{\Omega}(\gamma,[\xi,\eta]).\end{aligned}$$

我们只需对两种类型$a_*(\xi)(\varphi\overline{\Omega}(\eta,\gamma))$和$\varphi\overline{\Omega}(\xi,[\eta,\gamma])$证明即可.

$$a_*(\xi)(\varphi\overline{\Omega}(\eta,\gamma))=\overline{a}_*(\varphi^{*}(\xi))(\varphi\overline{\Omega}(\eta,\gamma)\circ f)=\overline{a}_*(\varphi^{*}(\xi))(\overline{\Omega}(\varphi^{*}\eta,\varphi^{*}\gamma)).$$

因为φ是李双代数胚态射，所以，$\varphi^{*}[\eta,\gamma]=[\varphi^{*}\eta,\varphi^{*}\gamma]$和$\varphi\overline{\Omega}(\xi,[\eta,\gamma])=\overline{\Omega}(\varphi^{*}\xi,[\varphi^{*}\eta,\varphi^{*}\gamma])$.

我们有

$$d_*(\varphi\overline{\Omega})(\xi,\eta,\gamma)=d_*\overline{\Omega}(\varphi^*\xi,\varphi^*\eta,\varphi^*\gamma)=\varphi(d_*\overline{\Omega})(\xi,\eta,\gamma),$$

即 $d_*(\varphi\overline{\Omega})=\varphi(d_*\overline{\Omega})$.

(2)的证明如下：我们设 $\varphi^*\xi=\bar{\xi},\varphi^*\eta=\bar{\eta},\bar{v}$和 v 是 φ-相关的，那么

$$\langle\varphi(\overline{\Omega}\,\bar{\xi}),\eta\rangle=\langle\overline{\Omega}\bar{\xi},\varphi^*\eta\rangle=\overline{\Omega}(\bar{\xi},\varphi^*\eta)=\overline{\Omega}(\varphi^*\xi,\varphi^*\eta)=\varphi\overline{\Omega}(\xi,\eta)$$
$$=\langle(\varphi\overline{\Omega})\xi,\eta\rangle,$$

所以，$\varphi(\overline{\Omega}\bar{\xi})=(\varphi\overline{\Omega})\xi=\Omega\xi$，$\overline{\Omega}\bar{\xi}$ 和 $\Omega\xi$ 是 φ-相关的.

$$\begin{aligned}\langle\varphi^*(L_{\Omega\xi}\eta),\bar{v}\rangle&=\langle L_{\Omega\xi}\eta,\varphi(\bar{v})\rangle\circ f=[d\eta(\Omega\xi,\varphi(\bar{v}))+a(\varphi\bar{v})\langle\Omega\xi,\eta\rangle]\circ f\\&=[a(\Omega\xi)\langle\eta,\varphi(\bar{v})\rangle-\langle\eta,[\Omega\xi,\varphi\bar{v}]\rangle]\circ f\\&=a(\varphi(\overline{\Omega}\bar{\xi}))\langle\eta,\varphi(\bar{v})\rangle\circ f-\langle\eta,[\varphi(\overline{\Omega}\bar{\xi}),\varphi\bar{v}]\rangle\circ f\\&=Tf\circ\bar{a}(\overline{\Omega}\bar{\xi})\langle\eta,\varphi(\bar{v})\rangle-\langle\eta,[\varphi(\overline{\Omega}\bar{\xi}),\varphi\bar{v}]\rangle\circ f\\&=\bar{a}(\overline{\Omega}\bar{\xi})\langle\varphi^*\eta,\bar{v}\rangle-\langle\varphi^*\eta,[\overline{\Omega}\bar{\xi},\bar{v}]\rangle\\&=\langle L_{\overline{\Omega}\bar{\xi}}\varphi^*\eta,\bar{v}\rangle,\end{aligned}$$

即 $\varphi^*(L_{\Omega\xi}\eta)=L_{\overline{\Omega}\bar{\xi}}\bar{\eta}$，同理可以证明，$\varphi^*(L_{\Omega\eta}\xi)=L_{\overline{\Omega}\bar{\eta}}\bar{\xi}$. 另外，

$$\begin{aligned}\langle\varphi^*d\Omega(\xi,\eta),\bar{v}\rangle&=\langle d\Omega(\xi,\eta),\varphi\bar{v}\rangle\circ f=a(\varphi\bar{v})(\Omega(\xi,\eta))\circ f\\&=Tf(\bar{a}(\bar{v}))(\varphi\overline{\Omega}(\xi,\eta))=\bar{a}(\bar{v})(\overline{\Omega}(\varphi^*\xi,\varphi^*\eta))\\&=\bar{a}(\bar{v})(\overline{\Omega}(\bar{\xi},\bar{\eta}))=\langle d(\overline{\Omega}(\bar{\xi},\bar{\eta})),\bar{v}\rangle\end{aligned}$$

即 $\varphi^*d\Omega(\xi,\eta)=d\,\overline{\Omega}(\bar{\xi},\bar{\eta})$. 这样我们就得到

$$\varphi^*[\xi,\eta]_\Omega=[\bar{\xi},\bar{\eta}]_{\overline{\Omega}}.$$

上述 Dirac 结构$\overline{L}$被称为拉回 Dirac 结构，因为$\overline{L}$和 L 都是李代数胚，所以，$\Phi:\overline{L}\to L$ 也是李代数胚态射.

我们利用拉回 Dirac 结构的概念，研究群胚上的 Dirac 结构. 设$(G\rightrightarrows P,\alpha,\beta)$是一个泊松群胚，$(TG,T^*G)$是由 G 的泊松张量 π 自然诱导的 $\Gamma(T^*G)$的李括号而形成的三角李双代数胚. (A,A^*)是 G 的切李双代数胚，我们建立李代数胚 T^*G 到李代数胚 A^* 之间的态射 $\varphi:T^*G\to A^*$. 设 $x\in G,\beta(x)=p,\xi\in T_x^*G,v\in A_p$，那么，$<\varphi(\xi),v>=<\xi,l_xv>$. 映射 φ 是一个满射，它的核是$(T^*G)^\perp$. φ 是一个李代数胚态射，而且还是李双代数胚(T^*G,TG)到李双代数胚(A^*,A)的李双代数胚态射. φ 的对偶映射 φ^* 就是由群胚乘法诱导的左平移变换限制到李代数胚 A 和 TG 上. 我们建立映射

$$\Phi=(\varphi^*)^{-1}\oplus\varphi:T^*G\oplus T^*G\to A\oplus A^*.$$

设 $B(G)$表示泊松群胚上的双截面构成的李群，$\kappa\in B(G)$，由 κ 诱导的左平移变换表示为 l_κ，我们有

引理 3.7 上面定义的映射 φ和$(\varphi^*)^{-1}$是 $B(G)$作用下左不变的，即

$$\varphi(l_\kappa^*(\bar{\xi}))=\varphi(\bar{\xi}),(\varphi^*)^{-1}(l_\kappa(v))=(\varphi^*)^{-1}(v)\quad\forall\,v\in T^*G,\bar{\xi}\in T^*G.$$

证明 设 $v\in T_x^*G,\beta(x)=p,y\in G,\beta(y)=\alpha(x),l_\kappa x=yx,\forall\,v'\in A_p,\bar{\xi}\in T_{yx}^*G$,

$$\langle\varphi(l_\kappa^*(\bar{\xi})),v'\rangle=\langle l_\kappa^*(\bar{\xi}),l_xv'\rangle=\langle\bar{\xi},l_\kappa l_xv'\rangle=\langle\bar{\xi},l_{yx}v'\rangle=\langle\varphi(\bar{\xi}),v'\rangle.$$

类似的，我们可以证明$(\varphi^*)^{-1}$是 $B(G)$作用下左不变的. 这样，我们定义的映射 Φ 就是在 $B(G)$下不变的.

命题 3.8 设$\overline{L}\subset TG\oplus T^*G$是一个 Dirac 结构，它是 $A\oplus A^*$ 中一个 Dirac 结构的拉回 Dirac 结构，当且仅当：(1)$\overline{L}$是 $B(G)$－左不变的，(2)$(T^eG)^\perp\subset\overline{L}$.

证明 假设$\overline{L}$是 L 的拉回 Dirac 结构，即$\overline{L}=\Phi^{-1}(L)$. 因为，$\Phi$ 是在 $B(G)$下左不变的，$\Phi(l_\kappa(\overline{L}))=\Phi(\overline{L})=L$. 则$\overline{L}$是 $B(G)$左不变的. 而 $\ker\varphi=(T^eG)^\perp$并且注意到$\overline{L}=\Phi^{-1}(L)$，就会有 $\ker\varphi\subset\overline{L}$即有$(T^eG)^\perp\subset\overline{L}$.

反之，当命题中的(1)，(2)成立时. 由(2)和$\overline{L}$的迷向性可以证明$\overline{L}\subset T^eG\oplus T^*G$，又因为$\overline{L}$是 $B(G)$-左不变的，所以，对于任意的 $\kappa\in B(G)$都有 $l_\kappa\overline{L}=\overline{L}$，$\Phi(\overline{L}|_{\kappa\cdot x})=\Phi(l_\kappa\overline{L}|_x)=\Phi(\overline{L}|_x)$. 因此，$\Phi(\overline{L}|_x)$只依赖基点 $\beta(x)=p$，我们定义 $L=\Phi(\overline{L}|_p)$，则 L 是 $A\oplus A^*$ 的极大迷向子丛，且$\overline{L}=\Phi^{-1}(L)$，由定理 3.6，$L$ 是 $A\oplus A^*$ 的 Dirac 结构.

定理 3.9 设$\overline{L}\subset TG\oplus T^*G$是一个 Dirac 结构，它对应的特征对为$(\overline{D},\overline{\Omega})$，则$\overline{L}$是 $A\oplus A^*$ 中的 Dirac 结构的拉回 Dirac 结构当且仅当

(1) $\overline{\Omega}$是 $B(G)$-左不变的；

(2) $\overline{D}\subset T^eG$ 是 $B(G)$-左不变的，且对所有的$\overline{\xi}\in\Gamma(\overline{D}^\perp)$，有$\overline{\Omega}(\overline{\xi})\in\Gamma(T^eG)$.

证明 当$\overline{L}$是拉回 Dirac 结构时，命题 3.8 的两个条件成立. $\overline{L}$是 $B(G)$-左不变的，$\overline{D}=\overline{L}\cap TG$ 也是 $B(G)$-左不变的. 因为

$$\overline{L}=\{X+\overline{\Omega}(\overline{\xi})+\overline{\xi}\,|\,X\in\overline{D},\overline{\xi}\in\overline{D}^\perp\},$$

对任意的 $\kappa\in B(G)$，我们利用等式 $l_\kappa(\overline{\Omega}\overline{\xi})=(l_\kappa\overline{\Omega})(l^*_{\kappa^{-1}}\overline{\xi})$和 $TG/\overline{D}$，$\overline{D}^\perp$也是 $B(G)$-左不变的，那么

$$l_\kappa\overline{L}=\{l_\kappa X+l_\kappa(\overline{\Omega}\,\overline{\xi})+l^*_{\kappa^{-1}}\overline{\xi}\}.$$

$l_\kappa X\in\overline{D}$，$l^*_{\kappa^{-1}}\overline{\xi}\in\overline{D}^\perp$就会有 $l_\kappa(\overline{\Omega}\overline{\xi})=\overline{\Omega}(l^*_{\kappa^{-1}}\overline{\xi})$，即 $l_\kappa\overline{\Omega}=\overline{\Omega}(\mathrm{mod}\,\overline{D})$. 所以，$\overline{\Omega}$是 $B(G)$-左不变的. 又因为$(T^eG)^\perp\subset\overline{L}$，$\forall\,\overline{\xi}\in(T^eG)^\perp$，$Y+\overline{\Omega}\overline{\eta}+\overline{\eta}\in\overline{L}$，$\overline{\eta}\in\overline{D}^\perp$，我们有

$$\langle Y+\overline{\Omega}\,\overline{\eta}+\overline{\eta},\overline{\xi}\rangle_+=\langle Y+\overline{\Omega}\,\overline{\eta},\overline{\xi}\rangle=0,$$

即 $Y+\overline{\Omega}\overline{\eta}\in T^eG$. 取$\overline{\eta}=0$ 时，$Y\in T^eG$，即$\overline{D}\subset T^eG$. 取 $Y=0$ 时，就有$\overline{\Omega}(\overline{\eta})\in\Gamma(T^eG)$.

反之，当定理的(1)，(2)成立时，$\overline{D}$，$\overline{\Omega}$是 $B(G)$-左不变的，所以，$\overline{L}$是 $B(G)$-左不变的.

对任意的$\overline{\xi}\in\Gamma(\overline{D}^\perp)$，$\overline{\Omega}(\overline{\xi})\in\Gamma(T^eG)$，又知道$\overline{D}\subset T^eG$. 那么，我们有 $\Gamma(\overline{D})+\overline{\Omega}(\Gamma(\overline{D}^\perp))\subset\Gamma(T^eG)$，即 $\rho\overline{L}\subset T^eG$，则$(T^eG)^\perp\subset\rho(\overline{L})^\perp=\overline{L}\cap T^*G\subset\overline{L}$，其中 ρ 表示$\overline{L}\to TG$ 的投影映射. 根据命题 3.8，$\overline{L}$是一个拉回 Dirac 结构.

当 $H:A^*\to A$ 是一个 Hamiltonian 算子(或强 Hamiltonian 算子)时，由推论 2.3 后面的讨论，我们得到 $\pi+\varphi^*H$ 是 G 上的泊松张量. 当 H 是强 Hamiltonian 算子时，则 φ^*H 是一个泊松张量，且与 π 是相容的，即$[\pi,\varphi^*H]=0$.

当$\overline{L}$是可约化的 Dirac 结构，对应于$\overline{D}$的叶层结构设为 $\mathscr{F}$，则 $G/\mathscr{F}$ 是一个泊松流形. 如果，$\overline{L}$是 L 的拉回 Dirac 结构，L 的特征子空间 D 是 A 的李子代数胚，D 的积分是 α-单连通，连通的闭子群胚，则 L 称为正规 Dirac 结构. 那么，我们得到下列推论：

推论 3.10 设$\overline{L}$是 L 的拉回 Dirac 结构，$\overline{L}$是可约化的 Dirac 结构当且仅当 L 是正规 Dirac 结构.

4 泊松齐性空间

一个泊松李群作用在一个泊松流形上是传递的泊松作用，那么，这个泊松流形也称为齐性泊松流形. 我们知道泊松作用并不保持被作用流形的泊松结构. 因此，齐性泊松流形反映的是一种“隐对称性”. 由于泊松群胚在泊松流形上的作用并不是整体的，它的传递性的定义也不是一般意义下的. 任何齐性空间都同构于它的作用群模掉一个迷向子群. 群胚作用的齐性空间也应同构于这个群胚模掉一个宽子群胚[9].

定义 4.1 设$(G\rightrightarrows P,\alpha,\beta)$是一个李群胚，$M$ 是一个流形，也是带有矩映射 $J:M\to P$ 的一个 G-空间，如果存在着 J 的截面 σ 使得 $G\cdot\sigma(P)=M$. 则称 M 是齐性空间，它的迷向子群胚是 $H=\{h\in G|h\cdot\sigma(P)\subset\sigma(P)\}$.

这样的截面在[3]中被称为饱和截面. 在[3]中还给出了下列定理.

定理 4.2 一个 G-空间是齐性空间当且仅当它同构于 G 模掉某个宽子群胚 H，即同构于 G/H.

我们利用 Dirac 结构的特征对的概念给出泊松齐性空间的一个定理. 设 G 是一个泊松群胚带有泊松张量 π_G，(TG,T^*G,π_G)构成三角李双代数胚，Dirac 结构$\overline{L}\subset TG\oplus T^*G$ 是可约化的，并且它对应的特征对是(h,Ω)，h 对应的叶层结构是 $\mathscr{H}$.

定理 4.3 G 在 $G/\mathscr{H}$ 上的作用是约化泊松作用当且仅当$\overline{L}$是一个拉回 Dirac 结构.

证明 当 G 在 $G/\mathscr{H}$ 上的作用是约化泊松作用时，$\mathscr{H}$ 在 G 的作用之下是不变的，也就是 h 是 $B(G)$-左不变的. $h\subset T^*G$ 且 $\mathscr{H}\subset\alpha$-纤维中. 设 $G\to G/\mathscr{H}$ 的投影映射是 Pr，$G/\mathscr{H}$ 上的泊松结构是 π，它在 G 上的提升为$\overline{\pi}$. G 在 $G/\mathscr{H}$ 上的作用是泊松作用，则

$$\pi(g[x])=l_g\pi([x])+r_{[x]}\pi_G(g)-r_{[x]}l_g\pi_G(u),$$

其中，$\beta(g)=J([x])=u$. 那么，对于提升泊松结构$\overline{\pi}$就会有

$$\overline{\pi}(gx)=l_g\overline{\pi}(x)+r_x\pi_G(g)-r_xl_g\pi_G(u)(\mathrm{mod}\ h)$$

和

$$\begin{aligned}(\overline{\pi}-\pi_G)(gx)&=\overline{\pi}(gx)-\pi_G(gx)(\mathrm{mod}\ h)\\&=(l_g\overline{\pi}(x)+r_x\pi_G(g)-r_xl_g\pi_G(u))-\\&\quad(l_g\pi_G(x)+r_x\pi_G(g)-r_xl_g\pi_G(u))(\mathrm{mod}\ h)\\&=l_g\overline{\pi}(x)-l_g\pi_G(x)(\mathrm{mod}\ h)\\&=l_g(\overline{\pi}-\pi_G)(x)(\mathrm{mod}\ h),\end{aligned}$$

即，$\Omega=\overline{\pi}-\pi G(\mathrm{mod}\ h)$是 $B(G)$-左作用不变的. 因为 $J\circ Pr=\alpha$ 和 $r_{[x]}g=g[x]=[gx]=Pr(gx)=Prr_x(g)$. 对任意的 $\varphi\in C^\infty(G/\mathscr{H})$，$f\in C^\infty(P)$，我们有

$$X_{J^*f}[x]d\varphi=(r_{[x]})_*X_{\alpha^*f}(u)d\varphi$$

和

$$\overline{\pi}(Pr^*d(J^*f),Pr^*d\varphi)(x)=\pi_G(\alpha^*df,r_{[x]}^*d\varphi)(u)(\mathrm{mod}\ h),$$
$$\overline{\pi}(\alpha^*df,Pr^*d\varphi)(x)=\pi_G(\alpha^*df,r_x^*Pr^*d\varphi)(u)(\mathrm{mod}\ h).$$

因为 G 是泊松群胚，G 的乘法 $G\times G\to G$ 是 G 在自身上的泊松作用，所以

$$\pi_G(\alpha^*df,Pr^*d\varphi)(x)=\pi_G(\alpha^*df,r_x^*Pr^*d\varphi)(u)(\mathrm{mod}\ h),$$

即

$$\overline{\pi}(\alpha^*df,Pr^*d\varphi)(x)-\pi_G(\alpha^*df,Pr^*d\varphi)(x)=0(\mathrm{mod}\ h).$$

也就是

$$\Omega(\alpha^* df, Pr^* d\varphi)(x) = (\bar{\pi} - \pi_G)(\alpha^* df, Pr^* d\varphi)(x) = 0(\mathrm{mod}\ h)$$

和

$$\langle \Omega(Pr^* d\varphi), \alpha^* df \rangle = 0(\mathrm{mod}\ h).$$

$\Omega(Pr^* d\varphi) \in T^*G$，由定理 3.9，$\bar{L}$是拉回 Dirac 结构. 将上面的过程逆推回去，就证明了定理的另一方面.

推论 4.4 条件如定理 4.3，当 $\mathscr{H}$ 是 G 的一个闭的宽子群胚，$G/\mathscr{H}$ 是一个泊松齐性空间当且仅当$\bar{L}$是拉回 Dirac 结构.

设$(G \rightrightarrows P, \alpha, \beta)$是一个泊松群胚，$M$ 是一个泊松流形，也是带有矩映射 $J: M \to P$ 的一个泊松 G-空间. 我们证明了存在着$(TM, T^*M) \to (A, A^*)$的李双代数胚的态射. 这里的(A, A^*)是泊松群胚 G 的切李双代数胚，A 被看成是 $N(P, \Gamma) = \dfrac{T_P \Gamma}{T_P P} \cong \bigcup_{u \in P} T_u \beta^{-1}(u)$，和 A^* 被看成是 $N^*(P, \Gamma) = \dfrac{T_P^* \Gamma}{T_P^* P} \cong \bigcup_{u \in P} T_u^*(\beta^{-1}(u))$. A 的锚映射 a 是 α_*，A^* 的锚映射 a_* 是 π_G[6]. 我们建立映射 $\varphi: T^*M \to A^*$ 满足对任意 $\xi \in T_m^* M$，和 $X_{J(m)} \in A_{J(m)}$

$$\langle \varphi(\xi), X_{J(m)} \rangle = \langle \xi, X_M(m) \rangle,$$

其中 $X_M(m) \in T_m M$ 表示对应于 $X_{J(m)}$的无穷小生成元. 这个映射的核 $\ker \varphi$ 在 M 的每点处的零化子空间就是 M 上李代数胚 A 作用之下的无穷小生成元子空间. 所以，$A \to (\ker \varphi)^\perp$是逐点双射. 有逐点逆映射$(\ker \varphi)^\perp \to A$，我们用$(\varphi^*)^{-1}$表示. 我们得到映射：

$$\Phi = \varphi + (\varphi^*)^{-1}: T^*M \oplus (\ker \varphi)^\perp \to A^* \oplus A.$$

引理 4.5 设 $L \subset A^* \oplus A$ 是极大迷向子丛，$\bar{L} = \Phi^{-1}(L)$是 L 的原像丛，则$\bar{L}$也是 $T^*M \oplus TM$ 的极大迷向子丛.

证明类似于引理 3.5.

由定理 3.6 得到，当 L 是 Dirac 子丛，则$\bar{L}$也是 Dirac 子丛. 这时我们也称$\bar{L}$是 L 的拉回 Dirac 结构. 当$\bar{L}$是可约化的 Dirac 子丛，$\bar{D} = \bar{L} \cap TM = \bar{L} \cap (\ker \Phi)^\perp$对应的叶层结构为 $\mathscr{F}$，则 $M/\mathscr{F}$ 是一个泊松流形. 利用类似于引理 3.7 的讨论，我们可以证明映射 Φ 是群胚作用不变的. 相应于命题 3.8 定理 3.9，我们有下列定理.

命题 4.6 设$\bar{L} \subset T^*M \oplus TM$ 是一个 Dirac 结构，它是 $A \oplus A^*$ 中一个 Dirac 结构的拉回 Dirac 结构，当且仅当：(1)$\bar{L}$是 G 作用不变的，(2)$\ker \varphi \subset \bar{L}$.

定理 4.7 设$\bar{L} \subset T^*M \oplus TM$ 是一个 Dirac 结构，它对应的特征对为$(\bar{D}, \bar{\Omega})$，则$\bar{L}$是 $A \oplus A^*$ 中的 Dirac 结构的拉回 Dirac 结构当且仅当

(1) $\bar{\Omega}$是 G 作用不变的；

(2) $\bar{D} \subset (\ker \varphi)^\perp$是 G 作用不变的，且对所有的$\xi \in \Gamma(\bar{D}^\perp)$，有$\bar{\Omega}(\xi) \in \Gamma(\ker \varphi)^\perp$.

从上面的定理中，我们可以看到当$\bar{L} \subset T^*M \oplus TM$ 是 $L \subset A \oplus A^*$ 的拉回 Dirac 结构时，它们对应的特征子空间$\bar{D}$是 G 作用下不变的，D 是 $B(G)$左作用下不变的，也是右平移不变的. 这样在同一轨道上，D 在每一点是彼此同构的和$\bar{D}$在 $J^{-1}([u])$上都是彼此同构的. 设$\bar{L}$是可约化的，由定理 2.6，L 也是可约化的. 它们对应的叶层结构分别是 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{H}$，商泊松流形分别是 $M/\mathscr{F}$ 和 $G/\mathscr{H}$. 由于泊松群胚作用是由矩映射 J 诱导的，$G \times M \to M$ 的矩映射不能诱导 $M/$

$\mathscr{F}$ 在 $G/\mathscr{H}$ 上的映射. 但是当$\overline{D}\subset\ker J_*$时,则 D 包含在泊松群胚 G 的迷向子群胚的切李代数胚中. 我们就能得到下列定理:

定理 4.8 设$\overline{L}\subset T^*M\oplus TM$ 是一个可约化的 Dirac 结构,它对应的特征对为$(\overline{D},\overline{\Omega})$,叶层结构为 $\mathscr{F}$ 且$\overline{D}\subset\ker J_*$, $\forall\ \xi\in\Gamma(\overline{D}^{\perp})$, $\overline{\Omega}(\xi)\in\ker J_*$. 当$\overline{L}$是一个拉回 Dirac 结构,则 G 在 M 上的泊松作用约化到 $M/\mathscr{F}$ 上仍是一个泊松作用.

证明 设 $Q=M/\mathscr{F}$ 的泊松张量为 π_Q, π_Q 提升到 M 上为$\overline{\pi}_Q$,则$\overline{\Omega}=\overline{\pi}_Q-\pi(\mathrm{mod}\ \overline{D})$. 设在 G 中过 g 点的双截面为 $\kappa\in B(G)$,在 M 中过 x 点 J 的截面为 y. 我们首先证明在 $M/\mathscr{F}$ 上的作用是很好定义的. $M/\mathscr{F}$ 到 G 的矩映射为$\overline{J}$和$\overline{J}[x]=J(x)$,设 $\beta(g)=\overline{J}[x]=J(x)=u$, $\alpha(g)=v$,我们定义 G 在 $M/\mathscr{F}$ 上的作用为

$$G\times M/\mathscr{F}\rightarrow M/\mathscr{F},(g,[x])\rightarrow g\cdot[x]=[gx].$$

设 $\mathscr{H}$ 是 D 的叶层结构,则由于$\overline{D}\subset\ker J_*$,所以 $\mathscr{H}|_P$ 包含在 G 的迷向子群胚(内子群胚或稳定子群胚)中. 对于 $x,y\in M$, $x\sim y$,则存在 $h\in\mathscr{H}_u$ 使得 $y=h\cdot x$. 因为 D 是$(Ad_\kappa)_*$-不变的, $\mathscr{H}$ 是 Ad_κ-不变的. 所以,

$$g(hx)=(gh)x=(ghg^{-1})(gx),$$

其中, $\alpha(ghg^{-1})=\alpha(g)=\beta(ghg^{-1})=v$, $ghg^{-1}=Ad_\kappa h\in\mathscr{H}_v$. 所以, $(Ad_\kappa h)(gx)\in[gx]$. 即, $gy\in[gx]$. 反过来如果 $gy\sim gx$,存在 $h'\in\mathscr{H}_v$ 使得 $gy=h'\cdot(gx)$,又 $g^{-1}\cdot(gy)=g^{-1}(h'gx)=(g^{-1}h'g)x=Ad_{\kappa^{-1}}h'x$, $y=Ad_{\kappa^{-1}}h'x$ 且 $Ad_{\kappa^{-1}}h'\in\mathscr{H}_u$,所以 $y\sim x$ 和 $g\cdot[x]=[gx]$是很好定义的. 同时, $r_{[x]}g=g[x]=[gx]=Pr(r_xg)$.

当$\overline{L}$是一个拉回 Dirac 结构时,$\overline{L}$的特征对满足定理 4.7. 所以,

(1) $\overline{\Omega}$是 $B(G)$—左作用不变的,即 $l_\kappa\overline{\Omega}=\overline{\Omega}(\mathrm{mod}\ \overline{D})$,我们有

$$\begin{aligned}l_\kappa(\overline{\pi}_Q(x)-\pi(x))&=l_\kappa\overline{\Omega}(x)=\overline{\Omega}(gx)=\overline{\pi}_Q(gx)-\pi(gx)(\mathrm{mod}\ \overline{D})\\&=\overline{\pi}_Q(gx)-(l_\kappa\pi(x)+r_y\pi_G(g)-r_yl_\kappa\pi_G(u))(\mathrm{mod}\ \overline{D}),\end{aligned}$$

所以

$$\overline{\pi}_Q(gx)=l_\kappa\overline{\pi}_Q(x)+r_y\pi_G(g)-r_yl_\kappa\pi_G(u)(\mathrm{mod}\ \overline{D}).\qquad(*)$$

注意到 y 是过 x 点 J 的截面,因$[x]\subset J^{-1}(u)$,所以, Pr_*y 也是过$[x]$的$\overline{J}$的截面. 其中 $Pr:M\rightarrow M/\mathscr{F}$ 是投影映射,则有

$$Pr\,\overline{\pi}_Q=\pi_Q,Pr(x)=[x],Pry=[y].$$

$(*)$式在投影映射 Pr 之下为

$$\pi_Q(g[x])=l_\kappa\pi_Q([x])+r_{[y]}\pi_G(g)-r_{[y]}l_\kappa\pi_G(u).$$

(2)对任意的 $\varphi\in C^\infty(M/\mathscr{F})$, $Pr^*d\varphi\in\Gamma(\overline{D}^{\perp})$和 $f\in C^\infty(P)$,由已知$\overline{\Omega}(Pr^*d\varphi)\in\ker J_*$,和 $Pr^*\overline{J}^*=J^*$,所以

$$\langle\overline{\Omega}(Pr^*d\varphi),Pr^*d(\overline{J}^*f)\rangle=0,$$

即

$$\begin{aligned}\langle(\overline{\pi}_Q-\pi)(Pr^*d\varphi),Pr^*d(\overline{J}^*f)\rangle&=0(\mathrm{mod}\ \overline{D}),\\ \langle\overline{\pi}_Q(Pr^*d\varphi),Pr^*d(\overline{J}^*f)\rangle&=\langle\pi(Pr^*d\varphi),Pr^*d(\overline{J}^*f)\rangle(\mathrm{mod}\ \overline{D}),\\ \langle\overline{\pi}_Q(Pr^*d(\overline{J}^*f)),Pr^*d\varphi\rangle&=\langle\pi(Pr^*d(\overline{J}^*f)),Pr^*d\varphi\rangle(\mathrm{mod}\ \overline{D})\\&=\langle\pi(d(J^*f)),Pr^*d\varphi\rangle(\mathrm{mod}\ \overline{D})\end{aligned}$$

$$=X_{J^*f}(x)(Pr^*d\varphi)(\mathrm{mod}\ \overline{D}).$$

由于 $G\times M\to M$ 是泊松作用，所以有

$$(r_x)_*X_{\epsilon^*f}(u)=X_{J^*f}(x).$$

这样，我们得到

$$\langle\overline{\pi}_Q(Pr^*d(\overline{J}^*f)),Pr^*d\varphi\rangle(x)=(r_x)_*X_{\epsilon^*f}(u)(Pr^*d\varphi)(\mathrm{mod}\ \overline{D}),$$

所以

$$\pi_Q(\overline{J}^*f)[x]=(r_{[x]})_*X_{\epsilon^*f}(u),$$

即

$$X_{J^*f}[x]=(r_{[x]})_*X_{\epsilon^*f}(u).$$

由(1)和(2)的证明和[5]的定理 7.1，我们证明了这个作用是泊松作用.

推论 4.9 设 $\overline{L}\subset T^*M\oplus TM$ 是一个拉回可约化的 Dirac 结构，$\overline{L}$ 对应的特征对是 $(\overline{D},\overline{\Omega})$，且 $\forall\ \xi\in\Gamma(\overline{D}^\perp)$，$\overline{\Omega}(\xi)\in\ker J_*$，$D\subset A$ 是 $\overline{D}$ 的拉回，如果 D 是 G 的迷向子群胚 H 的李代数胚，则 G 在 M 上的泊松作用可约化到 G 在 $M/\mathscr{F}$ 上的作用而且这作用仍是一个泊松作用.

推论 4.10 条件与推论 3.8 相同，当投影映射 $Pr_G:G\to G/\mathscr{H}$ 和投影映射 $Pr_M:M\to M/\mathscr{F}$ 是泊松映射时，商群胚 $G/\mathscr{H}$ 在商流形 $M/\mathscr{F}$ 上的作用是泊松作用.

证明 商群胚 $G/\mathscr{H}$ 在商流形 $M/\mathscr{F}$ 上的作用定义为

$$G/\mathscr{H}\times M/\mathscr{F}\to M/\mathscr{F},([g],[x])\to[g][x]=[gx],\beta(g)=J(x).$$

这个定义是合理的，因为 $\beta[g]=\beta(g)$，$J[x]=J(x)$. 这样，$G/\mathscr{H}$ 上的源映射和靶映射表示为 $\overline{\alpha}$ 和 $\overline{\beta}$，则 $\overline{\alpha}\circ Pr_G=\alpha$ 和 $\overline{\beta}\circ Pr_G=\beta$. 我们取 $g'\in[g]$，$y\in[x]$，则存在 $\mathscr{H}$ 中的元素 h,h' 使得 $g'=gh$，$y=h'\cdot x$，那么

$$g'\cdot y=(gh)\cdot(h'\cdot x)=g(hh'\cdot x)\in g\cdot[x]=[gx].$$

所以，这个定义是合理的.

$G/\mathscr{H}$ 是泊松群胚，只要从下面的交换图中就可以看到：

$$\begin{array}{ccc}G\times G & \xrightarrow{\text{Poisson}} & G\\ \downarrow{\scriptstyle Pr_G\times Pr_G} & & \downarrow{\scriptstyle Pr_G}\\ G/\mathscr{H}\times G/\mathscr{H} & \longrightarrow & G/\mathscr{H}\end{array}$$

上面交换图中，是对可以相乘的元素定义的. 为了表示方便省略用新的表示. 那么，由[7]命题 7.1，$G/\mathscr{H}\times G/\mathscr{H}\to G/\mathscr{H}$ 也是泊松映射. 同样地，$G/\mathscr{H}$ 在 $M/\mathscr{F}$ 上的作用，我们也用一个交换图证明：

$$\begin{array}{ccc}G\times M & \xrightarrow{\text{Poisson}} & M\\ \downarrow{\scriptstyle Pr_G\times Pr_M} & & \downarrow{\scriptstyle Pr_M}\\ G/\mathscr{H}\times M/\mathscr{F} & \longrightarrow & M/\mathscr{F}\end{array}$$

由[7]中的命题 7.1，$G/\mathscr{H}\times M/\mathscr{F}\to M/\mathscr{F}$ 是泊松映射，则 $G/\mathscr{H}$ 在 $M/\mathscr{F}$ 上的作用是泊松作用. 我们完成了推论的证明.

作者感谢北京大学数学学院刘张炬教授的指导和多次有益的讨论，也感谢首都师范大学数学系微分几何讨论班的老师.

参考文献：

[1] COURANT T J. *Dirac manifolds* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1990, **319**: 631—661.

[2] LIU Z J. *Some remarks on dirac structures and Poisson reductions* [J]. Banach Center Publ., 2000, **51**: 165—173.

[3] LIU Z J, WEINTEIN A, XU P. *Manin triples for Lie bialgebroids* [J]. J. Differential Geom., 1997, **45**: 547—574.

[4] LIU Z J, XU P. *Exact Lie bialgebroids and Poisson groupoids* [J]. Geom. Funct. Anal., 1996, **6**: 138—145.

[5] LIU Z J, WEINSTEIN A, XU P. *Dirac Structures and Poisson Homogeneous Spaces* [J]. Commun. Math. Phys., 1998, **192**: 121—144.

[6] WEINSTEIN A. *Coisotropic calculus and Poisson groupoids* [J]. J. Math. Soc. Japan, 1988, **40**: 705—727.

[7] VAISMAN I. *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds* [M]. Birkhauser: Basel, 1994, 97—98.

[8] HIGGINS P J, MACKENZIE K. *Algebraic constructions in the category of Lie algebroids* [J]. J. Algebra, 1990, **129**: 194—230.

[9] MACKENZIE K. *Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry*[M]. London Mathematical Society Lecture Note Series. 124, Cambridge: Cambridge University Press, 1987, 6—9.

The Dirac Structures and Poisson Reductions on Groupoids

ZHONG De-shou[1], HE Long-guang[2]

(1. Dept. of Economics, China Youth University for Political Sciences, Beijing 100089, China;

2. Dept. of Math., Capital Normal University, Beijing 100037, China)

Abstract: In this paper, we discuss the Dirac structures in Lie bialgebroids and on groupoids. We use the conception of characteristic pairs of Dirac structures to give the new characterization about invariant Dirac structures on actions and pull back Dirac structures. We use the properties of Dirac structures to discuss Poisson homogeneous spaces and Poisson reduction.

Key words: Poisson groupoid; Poisson action; Lie bialgebroid; Poisson homogeneous.