第23卷第4期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 4
2003年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2003

Szász-Mirakjan 算子线性组合和导数的点态逼近定理*

谢 林 森
(丽水师范专科学校数学系，浙江 丽水 323000)

摘 要：本文给出了 Szász-Mirakjan 算子线性组合的点态逼近定理. 另外，还研究了 Szász-Mirakjan 算子高阶导数与所逼近函数光滑性之间的关系.

关键词：Szász-Mirakjan 算子；线性组合；导数；光滑模.
分类号：AMS(2000) 41A36/CLC number：O174.41
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)04-0709-06

1 引 言

设 $C[0,\infty)$ 表示区间 $[0,\infty)$ 上有界的连续函数全体组成的空间. 对于 $f\in C[0,\infty)$，其范数 $\|f\|=\sup\limits_{0\leqslant h<\infty}|f(x)|$，$r$ 阶 Ditzian-Totik 光滑模定义为

$$\omega_{\varphi^\lambda}^r(f,t)=\sup_{0<h\leqslant t}\|\Delta_{h\varphi^\lambda(x)}^r f(x)\|,$$

这里，当 $x>rh\varphi^\lambda(x)/2$ 时，

$$\Delta_{h\varphi^\lambda(x)}^r f(x)=\sum_{j=0}^r(-1)^j\binom{r}{j}f\left(x+\left(\frac{r}{2}-j\right)h\varphi^\lambda(x)\right);$$

当 $0\leqslant x\leqslant rh\varphi^\lambda(x)/2$ 时，

$$\Delta_{h\varphi^\lambda(x)}^r f(x)=0.$$

对于定义在 $C[0,\infty)$ 上的 Szász-Mirakjan 算子

$$S_n(f,x)=\sum_{k=0}^\infty f\left(\frac{k}{n}\right)s_{n,k}(x),\quad s_{n,k}(x)\equiv e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!},$$

M. Felten[1] 证明

$$|S_n(f,x)-f(x)|=O((n^{-1/2}\varphi^{-\lambda}(x))^\alpha)\Leftrightarrow\omega_{\varphi^\lambda}^2(f,t)=O(t^\alpha),$$

其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，$0<\alpha<2$ 和 $\varphi^2(x)=x$，这个结果当 $\lambda=1$ 时，由 V. Totik[2] 证得；当 $\lambda=0$ 时，

* 收稿日期：2000-09-13
基金项目：浙江省自然科学基金资助项目(102005).
作者简介：谢林森(1957-)，男，硕士，教授.

由 M. Becker[3] 证得.

由于Szász-Mirakjan算子线性组合 $S_{n,r}(f,x)=\sum_{i=0}^{r-1}c_i(n)S_{n_i}(f,x)$ 比Szász-Mirakjan算子有更高的收敛阶,这里 n_i 和 $c_i(n)$ 满足(见[6,p.116])

(a) $n=n_0<\cdots<n_{r-1}\leqslant K_1n$($K_1$ 与 n 无关);

(b) $\sum_{i=0}^{r-1}|c_i(n)|\leqslant K_2$($K_2$ 与 n 无关);

(c) $\sum_{i=0}^{r-1}c_i(n)=1$;

(d) $\sum_{i=0}^{r-1}c_i(n)n_i^{-\rho}=0,\rho=1,2,\cdots,r-1.$ (1.1)

本文研究了 Szász-Mirakjan 算子线性组合与所逼近函数光滑性之间的关系,证得

定理 1.1 设 $r\in N,r\geqslant 3$ 和 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$,则对于 $f\in C[0,\infty)$,

$$\left|S_{n,r-1}(f,x)-f(x)\right|=O\left(\omega_\varphi^{r_\lambda}\left(f,n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x)\right)\right),\tag{1.2}$$

这里 $\varphi^2(x)=x,\delta_n(x)=\varphi(x)+n^{-1/2}$.

定理 1.2 设 $r\in N,r\geqslant 3,0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 和 $0<\alpha<r$,则对于 $f\in C[0,\infty)$,

$$\left|S_{n,r-1}(f,x)-f(x)\right|=O\left(\left(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x)\right)^\alpha\right)\tag{1.3}$$

等价于

$$\omega_\varphi^{r_\lambda}(f,t)=O(t^\alpha).$$

另外,正算子导数与所逼近函数光滑性之间的关系已由许多学者[4,5]进行了研究.本文借助 Szász-Mirakjan 算子线性组合研究了 Szász-Mirakjan 算子高阶导数与所逼近函数光滑性之间的关系,证得

定理 1.3 设 $r\in N$ 和 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$,则对于 $f\in C[0,\infty)$,

$$\varphi^{r\lambda}(x)\left|S_n^{(r)}(f,x)\right|=O\left(\left(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x)\right)^{-r}\omega_\varphi^{r_\lambda}\left(f,n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x)\right)\right).\tag{1.4}$$

定理 1.4 设 $r\in N,r\geqslant 3,0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 和 $0<\alpha<r$,则对于满足条件 $\omega_\varphi^{r_\lambda}(f,t)=O(t^\gamma)$($\gamma>0$)的函数 $f\in C[0,\infty)$,

$$\varphi^{r\lambda}(x)\left|S_n^{(r)}(f,x)\right|=O\left(\left(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x)\right)^{\alpha-r}\right)\tag{1.5}$$

等价于

$$\omega_\varphi^{r_\lambda}(f,t)=O(t^\alpha).$$

2 引 理

对于 $f\in C[0,\infty)$ 和 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, K-泛函定义为

$$K_{r,\varphi^\lambda}(f,t^r)=\inf\{\|f-g\|+t^r\|\varphi^{r\lambda}g^{(r)}\|_\infty:g^{(r-1)}\in A.C._{loc}\},$$

$$\overline{K}_{r,\varphi^\lambda}(f,t^r)=\inf\{\|f-g\|+t^r\|\varphi^{r\lambda}g^{(r)}\|_\infty+t^{r/(1-\lambda/2)}\|g^{(r)}\|_\infty:g^{(r-1)}\in A.C._{loc}\},$$

其中 $\|\cdot\|_\infty=\|\cdot\|_{L_\infty[0,\infty)}$. 由[6,p.11,p.25],有

$$\omega_{\varphi^\lambda}^{r}(f,t)\sim K_{r,\varphi^\lambda}(f,t^r)\sim \overline{K}_{r,\varphi^\lambda}(f,t^r). \tag{2.1}$$

$x(t)\sim y(t)$ 表示存在常数 $C>0$ 和 $t_0>0$，使得

$$C^{-1}y(t)\leqslant x(t)\leqslant Cy(t),0<t\leqslant t_0.$$

以下均同. 另外，在本文中均以 C 表示正的常数，只是在不同的地方数值可能不同.

引理 2.1 设 $r\in N,0\leqslant\lambda\leqslant 1,x\in(0,\infty)$ 和 $t\in[0,\infty)$，则

$$\left|\int_x^t|t-u|^{r-1}\delta_n^{-\lambda r}(u)\mathrm{d}u\right|\leqslant C|t-x|^r\delta_n^{-\lambda r}(x). \tag{2.2}$$

证明 记 $u=t+\tau(x-t),0\leqslant\tau\leqslant 1$，则

$$\left|\int_x^t|t-u|^{r-1}\varphi^{-\lambda r}(u)\mathrm{d}u\right|\leqslant\int_0^1\frac{\tau^{r-1}|t-x|^r}{(\tau x+(1-\tau)t)^{\lambda r/2}}\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant\frac{1}{r(1-\lambda/2)}|t-x|^r\varphi^{-\lambda r}(x).$$

于是

$$\left|\int_x^t|t-u|^{r-1}\delta_n^{-\lambda r}(u)\mathrm{d}u\right|\leqslant\min\left\{\left|\int_x^t|t-u|^{r-1}\varphi^{-\lambda r}(u)\mathrm{d}u\right|,n^{\lambda r/2}|t-x|^r\right\},$$

由此可得(2.2).

引理 2.2 设 $r\in N$，则

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^r}{(k+1)^r}s_{n,k}(x)\leqslant r!x^{-r}. \tag{2.3}$$

证明 由 $S_n(f,x)$ 保常数，经简单计算便可得(2.3).

引理 2.3 设 $r\in N$ 和 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，则对于 $f\in C[0,\infty)$，

$$\|S_n^{(r)}(f)\|_\infty\leqslant Cn^r\|f\|, \tag{2.4}$$

$$\|\varphi^r S_n^{(r)}(f)\|_\infty\leqslant Cn^{r/2}\|f\|. \tag{2.5}$$

对于 $f^{(r-1)}\in A.C._{\mathrm{loc}}$，

$$\|\varphi^{\lambda r}S_n^{(r)}(f)\|_\infty\leqslant C\|\varphi^{\lambda r}f^{(r)}\|_\infty. \tag{2.6}$$

证明 利用[6,pp. 127－128]和[7,pp. 281－282]的方法，根据[6]中的(9.4.3)和(9.5.10)，由(2.3)，$S_n(f,x)$保常数，Cauchy-Schwartz 不等式和 Hölder 不等式，便可分别得(2.4)－(2.6).

引理 2.4 设 $r\in N,0\leqslant\lambda\leqslant 1,0\leqslant\beta\leqslant 1,h>0$ 和 $x>rh\varphi^\lambda(x)/2$，则

$$\int_{-h\varphi^\lambda(x)/2}^{h\varphi^\lambda(x)/2}\cdots\int_{-h\varphi^\lambda(x)/2}^{h\varphi^\lambda(x)/2}\varphi^{-\beta r}\left(x+\sum_{k=1}^{r}u_k\right)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_r\leqslant Ch^r\varphi^{(\lambda-\beta)r}(x). \tag{2.7}$$

证明 利用[5,pp. 310—312]的方法，由[3]中的引理 10 和 Hölder 不等式，便可得(2,7).

3 主要结果的证明

定理 1.1 的证明 由(1.1)(d)和[6]中的(9.5.10)，(9.5.11)，有

$$S_{n,r-1}((t-x)^k,x)=0,k=1,2,\cdots,r-1. \tag{3.1}$$

对于 $g^{(r-1)}\in A.C._{\mathrm{loc}}$，根据 Toylor 公式，由(3.1)，(2.2)和 Cauchy-Schwartz 不等式，有

$$\begin{aligned}|S_{n,r-1}(g,x)-g(x)|\leqslant C\big(&(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x))^r\|\varphi^{\lambda r}g^{(r)}\|_\infty+\\&(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{r/(1-\lambda/2)}\|g^{(r)}\|_\infty\big).\end{aligned}$$

从而，对于 $f\in C[0,\infty)$ 和所有的 $g^{(r-1)}\in A.C._{\mathrm{loc}}$，由[6]中的(9.3.4)，有

$$\begin{aligned}|S_{n,r-1}(f,x)-f(x)|\leqslant C\big(&\|f-g\|+(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x))^r\|\varphi^{\lambda r}g^{(r)}\|_\infty+\\&(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{r/(1-\lambda/2)}\|g^{(r)}\|_\infty\big).\end{aligned}$$

因此，由(2.1)便得(1.2)。定理 1.1 证毕.

定理 1.2 的证明 由(1.2)即得充分性. 下面证明必要性.

对于 $d>0$，由(2.1)，选取 $g_d^{(r-1)}\in A.C._{\mathrm{loc}}$，使得

$$\|f-g_d\|\leqslant 2C\omega_\varphi^{r_\lambda}(f,d),\quad \|\varphi^{\lambda r}g_d^{(r)}\|_\infty\leqslant 2Cd^{-r}\omega_\varphi^{r_\lambda}(f,d).$$

当 $h>0$ 和 $x>rh\varphi^\lambda(x)/2$ 时，由(1.3)，有

$$\begin{aligned}|\Delta_{h\varphi^\lambda(x)}^r f(x)|\leqslant &C\sum_{j=0}^r\binom{r}{j}\left(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}\left(x+\left(\frac{r}{2}-j\right)h\varphi^\lambda(x)\right)\right)^\alpha+\\&\int_{-h\varphi^\lambda(x)/2}^{h\varphi^\lambda(x)/2}\cdots\int_{-h\varphi^\lambda(x)/2}^{h\varphi^\lambda(x)/2}\left|S_{n,r-1}^{(r)}\left(f-g_d,x+\sum_{k=1}^r u_k\right)\right|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_r+\\&\int_{-h\varphi^\lambda(x)/2}^{h\varphi^\lambda(x)/2}\cdots\int_{-h\varphi^\lambda(x)/2}^{h\varphi^\lambda(x)/2}\left|S_{n,r-1}^{(r)}\left(g_d,x+\sum_{k=1}^r u_k\right)\right|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_r\\\equiv&I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

由 $x>rh\varphi^\lambda(x)/2$，有

$$I_1\leqslant C2^r(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x+rh\varphi^\lambda(x)/2))^\alpha\leqslant C2^{r+(1-\lambda)\alpha/2}(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x))^\alpha. \tag{3.2}$$

由(2.4)，(2.5)和(2.7)，有

$$I_2\leqslant Ch^r\omega_\varphi^{r_\lambda}(f,d)\min\{n^r\varphi^{\lambda r}(x),n^{r/2}\varphi^{(\lambda-1)r}(x)\}. \tag{3.3}$$

由(2.6)和(2.7)，有

$$I_3\leqslant Ch^r\|\varphi^{\lambda r}g_d^{(r)}\|_\infty\leqslant Ch^rd^{-r}\omega_\varphi^{r_\lambda}(f,d). \tag{3.4}$$

结合(3.2)—(3.4)，由 $\delta_n(x)\leqslant 2\max\{\varphi(x),n^{-1/2}\}$，有

$$\begin{aligned}|\Delta_{h\varphi^\lambda(x)}^r f(x)|\leqslant C\big(&(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x))^\alpha+\\&h^r(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{-r}\omega_\varphi^{r_\lambda}(f,d)+h^rd^{-r}\omega_\varphi^{r_\lambda}(f,d)\big).\end{aligned}$$

对于 $d>0$，选取 $n\in N$，使得

$$\begin{aligned}n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x)\leqslant d&<(n-1)^{-1/2}\delta_{n-1}^{1-\lambda}(x)\\&\leqslant(2+\sqrt{2})n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x),\end{aligned}$$

于是

$$|\Delta_{h\varphi^\lambda(x)}^r f(x)|\leqslant C(d^\alpha+h^rd^{-r}\omega_\varphi^{r_\lambda}(f,d)).$$

因此，对于 $h>0$ 和 $d>0$，有

$$\omega_\varphi^{r_\lambda}(f,h)\leqslant C(d^\alpha+h^rd^{-r}\omega_\varphi^{r_\lambda}(f,d)).$$

根据 Berens-Lorentz 引理[8][6]，便可完成证明. 定理 1.2 证毕.

定理 1.3 的证明 欲证(1.4),由(2.6)和(2.1),只需证对于 $f\in C[0,\infty)$,有

$$\varphi^{\lambda r}(x)\left|S_n^{(r)}(f,x)\right|\leqslant C\left(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x)\right)^{-r}\|f\|. \tag{3.5}$$

当 $0<x<1/n$ 时,$\delta_n(x)\sim n^{-1/2}$,由(2.4),有

$$\varphi^{\lambda r}(x)\left|S_n^{(r)}(f,x)\right|\leqslant Cn^{(1-\lambda/2)r}\|f\|\leqslant C\left(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x)\right)^{-r}\|f\|. \tag{3.6}$$

当 $x\geqslant 1/n$ 时,$\delta_n(x)\sim\varphi(x)$,由(2.5),有

$$\varphi^{\lambda r}(x)\left|S_n^{(r)}(f,x)\right|\leqslant Cn^{r/2}\varphi^{(\lambda-1)r}(x)\|f\|\leqslant C\left(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x)\right)^{-r}\|f\|. \tag{3.7}$$

结合(3.6)和(3.7)可得(3.5).定理 1.3 证毕.

定理 1.4 的证明 由(1.4)即得充分性.下面证明必要性.

对于 $h>0$ 和 $x>rh\varphi^{\lambda}(x)/2$,当 $j=0,1,\cdots,r$ 时,

$$\varphi\left(x+\left(\frac{r}{2}-j\right)h\varphi^{\lambda}(x)\right)\leqslant\varphi\left(x+rh\varphi^{\lambda}(x)/2\right)\leqslant\sqrt{2}\,\varphi(x).$$

由(1.2),有

$$\begin{aligned}\left|\Delta_{h\varphi^{\lambda}(x)}^{r}f(x)\right|\leqslant{}&C\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\omega_{\varphi^{\lambda}}^{r}\left(f,n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}\left(x+\left(\frac{r}{2}-j\right)h\varphi^{\lambda}(x)\right)\right)+\\&\sum_{i=0}^{r-2}|c_i(n)|\left|\int_{-h\varphi^{\lambda}(x)/2}^{h\varphi^{\lambda}(x)/2}\cdots\int_{-h\varphi^{\lambda}(x)/2}^{h\varphi^{\lambda}(x)/2}\left|S_{n_i}^{(r)}\left(f,x+\sum_{k=1}^{r}u_k\right)\right|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_r\right.\\&\leqslant C\left(\omega_{\varphi^{\lambda}}^{r}\left(f,n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x)\right)+\int_{-h\varphi^{\lambda}(x)/2}^{h\varphi^{\lambda}(x)/2}\cdots\int_{-h\varphi^{\lambda}(x)/2}^{h\varphi^{\lambda}(x)/2}\left|S_n^{(r)}\left(f,x+\sum_{k=1}^{r}u_k\right)\right|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_r\right).\end{aligned}$$

由(1.5),(2.7)和 Hölder 不等式,有

$$\begin{aligned}&\int_{-h\varphi^{\lambda}(x)/2}^{h\varphi^{\lambda}(x)/2}\cdots\int_{-h\varphi^{\lambda}(x)/2}^{h\varphi^{\lambda}(x)/2}\left|S_n^{(r)}\left(f,x+\sum_{k=1}^{r}u_k\right)\right|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_r\\&\leqslant Ch^r\min\left\{n^{-(\alpha-r)/2}\varphi^{(1-\lambda)(\alpha-r)}(x),n^{-(1-\lambda/2)(\alpha-r)}\right\}.\end{aligned}$$

于是,由 $\delta_n(x)\leqslant 2\max\{\varphi(x),n^{-1/2}\}$,有

$$\left|\Delta_{h\varphi^{\lambda}(x)}^{r}f(x)\right|\leqslant C\left(\omega_{\varphi^{\lambda}}^{r}\left(f,n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x)\right)+h^r\left(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x)\right)^{\alpha-r}\right).$$

从而,对于 $h>0$ 和 $d>0$,可有

$$\omega_{\varphi^{\lambda}}^{r}(f,h)\leqslant C\left(\omega_{\varphi^{\lambda}}^{r}(f,d)+h^rd^{\alpha-r}\right).$$

根据[5,p.314]中的方法,便可完成证明.定理 1.4 证毕.

参考文献:

[1] FELTEN M. *Local and global approximation theorems for positive linear operators* [J]. J. Approx. Theory, 1998, **94**: 396—419.

[2] TOTIK V. *Uniform approximation by Szász-Mirakjan type operators* [J]. Acta Math. Hungar, 1983, **41**: 291—307.

[3] BECKER M. *Global approximation theorems for Szász-Mirakjan and Baskakov operators in polynomial weight spaces* [J]. Indiana Univ. Math. J., 1978, **27**: 127—142.

[4] DITZIAN Z, IVANOV K G. *Bernstein-type operators and their derivatives* [J]. J. Approx. Theory, 1989, **56**: 72—90.

[5] ZHOU D X. *On smoothness characterized by Bernstein type operators* [J]. J. Approx. Theory, 1995, **81**: 303—315.
[6] DITZIAN Z, TOTIK V. *Moduli of Smoothness* [M]. Springer-Verlag, New York, 1987.
[7] DITZIAN Z. *A global inverse theorem for combinations of Bernstein polynomials* [J]. J. Approx. Theory, 1979, **26**: 277—292.
[8] BERENS H, LORENTZ G G. *Inverse theorems for Bernstein polynomials* [J]. Indiana Univ. Math. J., 1972, **21**: 693—708.

Pointwise Approximation Theorems for Combinations and Derivatives of Szász-Mirakjan Operators

XIE Lin-sen
(Dept. of Math., Lishui Teachers College, Zhejiang 323000, China)

Abstract: In this paper, we give the pointwise approximation theorems for the combinations of Szász-Mirakjan operators and consider the relation between the derivatives of these operators with higher orders and the smoothness of the functions approximated.
Key words: Szász-Mirakjan operator; combination; derivative; modulus of smoothness.