第23卷第4期
2003年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 23 No. 4
Nov. 2003

环上矩阵的 Moore-Penrose 逆*

刘晓冀[1,2]，　刘三阳[1]，　王志坚[2]
(1. 西安电子科技大学应用数学系，陕西 西安 710071；
2. 苏州科技学院应用数学系，江苏 苏州 215009)

摘　要：本文研究环上矩阵的广义逆，得到其存在的充要条件，给出它的表达式，推广了以往文献的相应结果.

关键词：环；矩阵；Moore-Penrose 逆.
分类号：AMS(2000) 15A09/CLC number：O153.3
文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2003)04-0728-03

1 引　言

随着矩阵广义逆研究的不断深入，一般域、除环、主理想整环和交换环上矩阵广义逆的探讨也有 不同程度的进展，但在一般非交换环上，由于非交换性的限制，零因子与幂零元的出现，矩阵的秩通常失去作用，这给矩阵广义逆的研究带来较多的麻烦. 另外，文[4]给出了正性环上任意矩阵均存在 Moore-Penrose 逆的充要条件. 文[5]讨论一般环上具有特殊形式的矩阵 $A=PQR$ 的广义逆存在的充要条件($P.R$ 分别为左右高矩阵，Q 为幂等元)，但一般环上的矩阵却未必有这种分解. 因而研究一般环上矩阵的广义逆是非常必要的. 同时，我们注意到 Bjerhamn(1986)证明了可用较简单的约束矩阵方程组的唯一解来定义 A 的 Moore-Penrose 逆，但在上述约束方程组里，矩阵的秩起着关键性的作用. 因而，一般环上，利用矩阵的秩来讨论矩阵广义逆的途径是不可行的. 本文试图通过纯环论的方法来给出一般环上矩阵 Moore-Penrose 逆存在的充要条件，并给出了它的一个显式表达. 从而，推广了以往文献的相应结果.

2 主要结果

设 D 为任意环，带有对合 $*$. 本文中 A 总表示 D 上的 $m\times n$ 矩阵，A 的 Moore-Penrose 逆是指满足：$AZA=A$，$ZAZ=Z$，$(AZ)^*=AZ$，$(ZA)^*=ZA$ 的矩阵 Z，记为 A^+，满足第一个方程的矩阵称为的 $A\{1\}$ 逆，记为 A^-，满足 $\{i,\cdots,j\}$ 的方程的矩阵称为 A 的 $\{i,\cdots,j\}$ 逆，记为

* 收稿日期：2001-03-02
基金项目：铁道部科研资助项目(J2000Z165)，江苏省教育厅自然科学研究计划项目 (02KJD11009，1-1B2001-28)、
作者简介：刘晓冀(1972-)，男，博士研究生.

$A^{\{i,\cdots,j\}}$.

引理 1 若 A^+存在，则必唯一.

证明 若 X,Y 都是 A 的 Moore-Penrose 逆，则 $X=X(AXAY)^*=(YAXA)^*Y=Y$.

引理 2 设 A 为 D 上的对称矩阵，若 A 有{1}逆，则必有对称的{1}逆.

证明 设 B 为 A 的逆，若 B 对称，则引理结论得证，否则，不难验证 BAB^* 为 A 的{1}逆，显然 BAB^* 对称.

定理 1 A 为 D 上的矩阵，A 的 Moore-Penose 逆存在的充要条件是：

(1) 存在矩阵 Z 使得 $AZA=A$; (2) 存在矩阵 Z_0 使得 $A=AA^*Z_0$; (3) 存在矩阵 Y_0 使得 $A=Y_0A^*A$.

证明 若 A 的 Moore-Penrose 逆存在，则有(1)，同时 $A=AA^+A=A(A^+A)^*=AA^*(A^+)^*$，令 $Z_0=(A^+)^*$，则有(2)，同理可证(3).

反之，若有(1)，(2)，(3)，我们首先证明 AA^*，A^*A 的{1}逆存在. 由(1)，(2)，(3)有 $AA^-A=A$，则有 $AA^*Z_0A^-Y_0A^*A=A$. 在上式两边同时右乘 A^*，则有

$$AA^*Z_0A^-Y_0A^*AA^*=AA^*$$

表明 AA^* {1}逆存在，同理可证 A^*A 的{1}逆存在. 同时，注意到 A^*A，AA^* 均为对称矩阵. 由引理 2，则必有对称的{1}逆.

下证 $Z=A^*(AA^*)^-A(A^*A)^-A^*$ 为 A 的 Moore-Penrose 逆，其中{1}逆为对称的{1}逆.

$$\begin{aligned}
AZA &= AA^*(AA^*)^-A(A^*A)^-A^*A = AA^*(AA^*)^-AA^*Z_0(A^*A)^-A^*A \\
&= AA^*Z_0(A^*A)^-A^*A = Y_0A^*A(A^*A)^-A^*A = Y_0A^*A = A, \\
ZAZ &= A^*(AA^*)^-Y_0A^*A(A^*A)^-A^*AA^*(AA^*)^-A(A^*A)^-A^* \\
&= A^*(AA^*)^-AA^*(AA^*)AA^*Z_0(A^*A)^-A^* \\
&= A^*(AA^*)^-A(A^*A)^-A^* = Z, \\
[AZ]^* &= [AA^*(AA^*)^-A(A^*A)^-A^*]^* = [A(A^*A)^-A^*]^* \\
&= A(A^*A)^-A^* = AZ, \\
[ZA]^* &= [A^*(AA^*)^-A(A^*A)^-A^*A]^* = [A^*(AA^*)^-A]^* \\
&= A^*(AA^*)^-A = ZA.
\end{aligned}$$

推论 1 定理 1 中条件满足时，AA^*，A^*A 的{1}逆存在.

推论 2 定理 1 中条件满足时，$A(A^*A)^-A^*$，$A^*(AA^*)^-A$ 对于任意的{1}逆为不变量.

推论 3 定理 1 中条件满足时，A 的逆 Moore-Penrose 逆为：

$$A^+=A^*(AA^*)^-A(A^*A)^-A^*,$$

其中 AA^*，A^*A 的{1}逆为任意的{1}逆.

证明 由定理 1 及推论 2 即得.

推论 4 设 A 为 D 上的矩阵，则 A 的{1,3}逆存在当且仅当：

(1) 存在矩阵 Z，使得 $AZA=A$; (2) 存在矩阵 Z_0，使得 $A=AA^*Z_0$.

证明 类似于定理 1 可证得.

推论 5 设 A 为 D 上的矩阵，则 A 的{1,4}逆存在当且仅当：

(1) 存在矩阵 Z，使得 $AZA=A$; (2) 存在矩阵 Y_0，使得 $A=Y_0A^*A$.

注记 当 D 为域、除环、主理想环，定理 1 中的(2)，(3)就变为 $R(A)\subset R(AA^*)$，$R(A)\subset R(A^*A)$（$R(A)$表示 A 的值域），进而有 $R(A)=R(AA^*)=R(A^*A)$. 这意味着 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(AA^*)=\mathrm{rank}(A^*A)$，这样，我们就得到文[1]，[2]，[3]中的主要结论.

参考文献：

[1] PEARL M H. *Generalized inverse of matrices with entries taken from arbitrary field* [J]. Linear Algebra Application, 1968, **12**: 571—587.

[2] BHASKARA S R. *Generalized inverse of matrices over princiral rings* [J]. Linear Multilinear Algebra, 1981, **10**: 145—154.

[3] 庄瓦金. 任意体上矩阵的对合函数与广义逆 [J]. 东北数学, 1987, **3**: 57—66.
ZHUANG Wa-jin. *Involutory functions and generalized inverse of matrices over an arbitrary skew field* [J]. Northeastern Math. J., 1987, **3**: 57—66. (in Chinese)

[4] 曹重光. 环上矩阵的广义逆 [J]. 数学学报, 1988, **31**: 131—133.
CAO Chong-guang. *Generalized inverse of matrix over a ring* [J]. Acta. Math. Sinica, 1988, **31**: 131—133. (in Chinese)

[5] 陈建龙. 关于环上矩阵的广义逆 [J]. 数学学报, 1981, **34**: 622—630.
CHEN Jian-long. *Generalized inverse of matrices over rings* [J]. Acta. Math. Sinica, 1981, **34**: 622—630. (in Chinese)

[6] 陈永林. 广义逆 $A_{T,S}^{(2)}$的定义方程与显式表示 [J]. 南京师范大学学报, 2000, **23**: 5—8.
CHEN Yong-lin. *Defining equation and explicit expression for the generalized inverse* $A_{T,S}^{(2)}$[J]. J. Najing Normal University, 2000, **23**: 5—8. (in Chinese)

[7] BEN-ISRAEL, GREVILE T N E. *Generalized Inverse* [M]. Theory and Applications, New York: John Wiley, 1974, 39—48.

[8] BHASKARA S R. *On generalized inverse of matrices over integral domains* [J]. Linear Algebra Appliciation, 1983, **49**: 179—189.

[9] DRAZIN M P. *Pseudo-inverse in associative rings and semigroups* [J]. Amer. Morthly, 1958, **65**: 506—513.

[10] CLINE R E. *Inverse of rank invariant powers of a matrix* [J]. Siam. J. Nonlin. Anal., 1968, **5**: 182—197.

The Moore-Penrose Inverse of Matrices on Rings

LIU Xiao-ji[1,2], LIU San-yang[1], WANG Zhi-jian[2]

(1. Dept. of Appl. Math., Xidian University, Xi'an 710071, China;
2. Dept. of Math., Suzhou Railway Teachers'College, Jiangsu 215009, China)

Abstract: The Moore-Penrose inverse of matrices on rings is studied. The necessary and sufficient condition for existence and expression of the Moore-Penrose with an expression is given. This extends the known results concerned.

Key words: ring; matrices; Moore-Penrose inverse.