第23卷第4期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 4
2003年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2003

有向图上的随机游动*

彭代渊
(西南交通大学计算机与通信工程学院，四川 成都 610031)

摘 要：设 $G=(V,\Gamma)$ 是有向图，G 上的随机游动 $X(G)$ 定义如下：位于某个顶点上的一个粒子将以等概率转移到该顶点的所有后继顶点. 令 $M(j,n)$ 表示随机游动 $X(G)$ 在前 n 步内访问顶点 j 的平均次数，用 $W(j)$ 表示随机游动 $X(G)$ 到达顶点 j 所需要的平均步数. 我们对 $M(j,n)$ 和 $W(j)$ 的值进行了估计，证明了 $M(j,n)=O(n)$，并给出了 $W(j)$ 的上界.

关键词：概率；马尔科夫链；图；随机游动.
分类号：AMS(2000) 05, C60J15/CLC number：O157.5
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)04-0743-07

1 引 言

本文使用的图的概念及符号，凡是未加解释的，请参看[1]，有关马尔科夫链的结果参看[2]或[4]. 设 $G=(V,\Gamma)$ 是有向图，无重弧，即 G 是1-图. 不妨设 $V=\{1,2,\cdots,r\}$，$s=|\Gamma|$. 用 $A=A(G)=(a_{ij})$ 表示 G 的相伴矩阵. 如果存在正整数 m，使得 $A^m=(a_{ij}^{(m)})>0$，则称 G 是本原有向图. 本文涉及的图都是本原有向图.

任给 $i\in V$，令 $\Gamma_i^+=\{j\in V\mid (i,j)\in\Gamma\}$，$\Gamma_i^-=\{j\in V\mid (j,i)\in\Gamma\}$，用 $d_i^+=|\Gamma_i^+|$ 和 $d_i^-=|\Gamma_i^-|$ 分别表示顶点 i 的外半度和内半度，记 $d^+=\max\{d_1^+,d_2^+,\cdots,d_r^+\}$.

图 $G=(V,\Gamma)$ 上从顶点1出发的随机游动是一个满足以下条件的取值于 V 的随机序列 $X(G)=\{x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots\}$：

(a) $P\{x_0=1\}=1$，

(b) 对于任意的 $m\geqslant 1,i_1,i_2,\cdots,i_{m-1},j,k\in V$，都有

$$P\{x_{m+1}=k\mid x_0=1,x_1=i_1,\cdots,x_{m-1}=i_{m-1},x_m=j\}=P\{x_{m+1}=k\mid x_m=j\}$$
$$=\begin{cases}1/d_j^+, & k\in\Gamma_j^+,\\ 0, & k\notin\Gamma_j^+.\end{cases}$$

因而 $X(G)$ 是一个具有平稳转移概率的马尔科夫链，简称 $X(G)$ 是图 G 上的马氏链.

设 $j\in V$，定义随机变量 $U_j^{(n)}$ 如下：当 $x_n=j$ 时，$U_j^{(n)}=1$；反之，$U_j^{(n)}=0$. 令 $V_j^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}U_j^{(k)}$，

* 收稿日期：2001-02-01
作者简介：彭代渊(1955-)，男，在读博士研究生，副教授.

则 $V_j^{(n)}$ 的数学期望 $M(j,n)=E(V_j^{(n)})$ 是随机游动 $X(G)$ 在前 n 步内访问顶点 j 的平均次数. 用 W_j 表示随机游动 $X(G)$ 首次到达顶点 j 所需要的步数,其意义为

$$W_j=t>0\Leftrightarrow x_0=1,x_1\neq j,\cdots,x_{t-1}\neq j,x_t=j,$$

则 W_j 的数学期望 $M(j)=E(W_j)$ 是随机游动 $X(G)$ 首次到达顶点 j 所需要的平均步数.

G. F. Lawler 在[5]中介绍了随机游动理论的应用,并讨论了当图的顶点个数趋于无穷大时,连通图上随机游动从一个顶点到达另一个顶点所经历的平均步数的变化速度. 彭代渊在[6]中给出了随机图 $\epsilon(n,M)$ 上的随机游动回到出发点所用平均时间的一个渐近值(当图的顶点个数趋于无穷大时). 本文讨论有向图上的随机游动,我们对 $M(j,n)$ 和 $W(j)$ 的值进行了估计,证明了 $M(j,n)=O(n)$,并给出了 $W(j)$ 的上界.

2 极限向量的性质

我们用 $P=P(G)=(p_{ij})$ 表示马尔科夫链 $X(G)$ 的转移矩阵,用 $\Lambda=\Lambda(G)$ 表示对角线元素依次为 $d_1^+,d_2^+,\cdots,d_r^+$ 的 r 阶对角形方阵,则 $P(G)=[\Lambda(G)]^{-1}A(G)$,再令 $P^n=(p_{ij}^{(n)})$. 易知 $P^n>0$ 当且仅当 $A^n>0$. 因为 G 是本原有向图,所以 $X(G)$ 是正则马氏链. 以下引理成立[4].

引理 1 (1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}P^n(G)=(\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)})$ 存在;

(2) $\forall\, j\in V$,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\alpha_j>0$ 与 $i\in V$ 无关,且 $\sum\limits_{j\in V}\alpha_j=1$;

(3) 令 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$,则 α 是线性方程组 $\alpha P(G)=\alpha$ 的唯一概率向量解.

我们把 $\alpha=\alpha(G)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 称为马氏链 $X(G)$ 的极限向量.

引理 2 马氏链 $X(G)$ 的极限向量 α 是线性方程组

$$\sum_{i\in\Gamma_j^-}\alpha_i/d_i^+=\alpha_j\quad(j\in V)$$

的唯一概率向量解.

证明 注意到当 $i\in\Gamma_j^-$ 时 $p_{ij}=1/d_i^+$,否则 $p_{ij}=0$,立即可知引理 2 是引理 1(3) 的直接推论.

任给 $i,j\in V$,令 $h_{ij}=\sum\limits_{k:p_{ik}>p_{jk}}(p_{ik}-p_{jk})$, $H(P)=\max\limits_{i,j\in V}\{h_{ij}\}$,则有以下引理.

引理 3 (1) $h_{ij}=h_{ji}(i,j\in V)$;

(2) $H(P)=1-\min\limits_{i,j\in V}\sum\limits_{k\in V}\min(p_{ik},p_{jk})$;

(3) 设 P 和 Q 都是马氏链的转移矩阵,那么 $H(PQ)\leqslant H(P)H(Q)$.

证明 因为,

$$\sum_{k\in V}(p_{ik}-p_{jk})=\sum_{k\in V}p_{ik}-\sum_{k\in V}p_{jk}=1-1=0$$

所以

$$h_{ij}=\sum_{k:p_{ik}>p_{jk}}(p_{ik}-p_{jk})=-\sum_{k:p_{ik}<p_{jk}}(p_{ik}-p_{jk})=\sum_{k:p_{jk}>p_{ik}}(p_{jk}-p_{ik})=h_{ji}.$$

这就是(1),(2)与(3)的证明(见[2]).

对于任意 r 维非负列向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)^T$,其最大分量记为 $\overline{\xi}$,最小分量记为 $\underline{\xi}$,再记 $S(\xi)=\overline{\xi}-\underline{\xi}$.

引理 4 设 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)^T$ 是任意 r 维非负列向量,令 $\eta=P\xi$,则有

(1) $\overline{\eta}\leqslant\overline{\xi},\underline{\eta}\geqslant\underline{\xi}$;

(2) $S(\eta)\leqslant H(P)S(\xi)$.

证明 令 $\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)^T$,即有

$$\eta_i=\sum_{k\in V}p_{ik}\xi_k,\underline{\xi}\leqslant\eta_i\leqslant\overline{\xi}\ (i\in V),$$

故(1)成立. 又有

$$\eta_i-\eta_j=\sum_{k\in V}(p_{ik}-p_{jk})\xi_k=\sum_{k:p_{ik}>p_{jk}}(p_{ik}-p_{jk})\xi_k-\sum_{k:p_{jk}>p_{ik}}(p_{jk}-p_{ik})\xi_k.$$

若 $\eta_i-\eta_j\geqslant 0$, 则

$$|\eta_i-\eta_j|=\eta_i-\eta_j\leqslant\sum_{k:p_{ik}>p_{jk}}(p_{ik}-p_{jk})\overline{\xi}-\sum_{k:p_{jk}>p_{ik}}(p_{jk}-p_{ik})\underline{\xi}$$

$$=h_{ij}\overline{\xi}-h_{ji}\underline{\xi}=h_{ij}S(\xi).$$

同理可证当 $\eta_i-\eta_j<0$ 时,也有 $|\eta_i-\eta_j|\leqslant h_{ij}\times S(\xi)$. 所以

$$S(\eta)=\max_{i,j\in V}\{\eta_i-\eta_j\}\leqslant\max_{i,j\in V}\{h_{ij}\}S(\xi)=H(P)S(\xi).$$ □

用 $P_j^{(n)}=(p_{1j}^{(n)},p_{2j}^{(n)},\cdots,p_{rj}^{(n)})^T$ 表示 P^n 的第 j 个列向量($j\in V$),则以下结论成立.

引理 5 $\forall\ j\in V,n\geqslant 1$,有

$$S(P_j^{(n)})\leqslant[H(P)]^n,\quad \underline{P_j^{(n)}}\leqslant\underline{P_j^{(n+1)}}\leqslant\overline{P_j^{(n+1)}}\leqslant\overline{P_j^{(n)}}.$$

证明 设 $\xi(j)$ 是第 j 个分量为 1,其余分量为 0 的 r 维列向量,则有

$$S(\xi(j))=1,\ P_j^{(n)}=P^n\cdot\xi(j).$$

由引理 4 和引理 3 得

$$S(P_j^{(n)})\leqslant H(P^n)S(\xi(j))\leqslant[H(P)]^n.$$

因为 $P_j^{(n+1)}=P(P^n\cdot\xi(j))=P\cdot P_j^{(n)}$,再由引理 4 得

$$\underline{P_j^{(n)}}\leqslant\underline{P_j^{(n+1)}}\leqslant\overline{P_j^{(n+1)}}\leqslant\overline{P_j^{(n)}}.$$ □

任给 $i,j\in V$,记 $e_{ij}^{(n)}(P)=P_{ij}^{(n)}-\alpha_j$.

引理 6 $\forall\ i,j\in V$ 及整数 $n\geqslant 1$,我们有 $|e_{ij}^{(n)}(P)|\leqslant(H(P))^n$.

证明 因为 $\underline{P_j^{(n)}}\leqslant p_{ij}^{(n)}\leqslant\overline{P_j^{(n)}},\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\alpha_j$,据引理 5 有 $\underline{P_j^{(n)}}\leqslant\alpha_j\leqslant\overline{P_j^{(n)}}$,所以

$$|e_{ij}^{(n)}(P)|\leqslant S(P_j^{(n)})\leqslant(H(P))^n.$$ □

如果使用引理 6 的结论来估计余项 $p_{ij}^{(n)}-\alpha_j$,必须要求 $H(P)<1$ 才有意义. 现在寻求使 $H(P)<1$ 成立的条件.

引理 7 $H(P^n)<1\Leftrightarrow\forall\ i,j\in V$,存在 $k\in V$ 使得 $p_{ik}^{(n)}p_{jk}^{(n)}>0$.

证明 由引理 3,有

$$H(p^n)<1\Leftrightarrow\min_{i,j\in V}\sum_{k\in V}\min(p_{ik}^{(n)},p_{jk}^{(n)},p_{jk}^{(n)})>0\Leftrightarrow\forall\ i,j\in V,\sum_{k\in V}\min(p_{ik}^{(n)},p_{jk}^{(n)})>0$$

$$\Leftrightarrow\forall\ i,j\in V,存在\ k\in V,使\ \min(p_{ik}^{(n)},p_{jk}^{(n)})>0.$$ □

引理 8 $p_{ij}^{(n)}>0 \Leftrightarrow G$ 中存在从 i 到 j 的长度为 n 的路.

证明是明显的.

对正整数 k,我们用 $L(k)$表示 $1+(k-1)^2/2$ 的整数部分. 对于给定的本原有向图 $G=(V,\Gamma)$,令 $U(G)=\{1-(1/d^+)^{L(|V|)}\}^{-1+1/L(|V|)}$,$W(G)=\{1-(1/d^+)^{L(|V|)}\}^{1/L(|V|)}$, 则对 $e_{ij}^{(n)}(P)$ 又有以下估计.

引理 9 $\forall\ i,j\in V$ 及正整数 $n\geqslant 1$,有

$$|e_{ij}^{(n)}(P)|\leqslant S(P_j^{(n)})\leqslant U(G)(W(G))^n.$$

证明 简记 $L=L(|V|)$,由 Madsen 的结果[3]有 $H(P^L)<1$. 利用引理 7,任给 $i,j\in V$ 存在 $k_0\in V$ 使 $p_{ik_0}^{(L)}p_{jk_0}^{(L)}>0$. 据引理 8 不妨设$(i,i_1,\cdots,i_{L-1},k_0)$是 G 中从 i 到 k_0 的一条长度为 L 的路. 于是

$$p_{ik_0}^{(L)}=\sum_{k\in V}p_{ik}p_{kk_0}^{(L-1)}\geqslant p_{ii_1}p_{i_1k_0}^{(L-1)}\geqslant\cdots\geqslant p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{L-1}k_0}$$
$$=\frac{1}{d_i^+}\cdot\frac{1}{d_{i_1}^+}\cdots\frac{1}{d_{i_{L-1}}^+}\geqslant(\frac{1}{d^+})^L.$$

同理有 $p_{jk_0}^{(L)}\geqslant(\frac{1}{d^+})^L$. 所以

$$\sum_{k\in V}\min\{p_{ik}^{(L)},p_{jk}^{(L)}\}\geqslant\min\{p_{ik_0}^{(L)},p_{jk_0}^{(L)}\}\geqslant(\frac{1}{d^+})^L,$$
$$H(P^L)=1-\min_{i,j\in V}\sum_{k\in V}\min\{p_{ik}^{(L)},p_{jk}^{(L)}\}\leqslant 1-(\frac{1}{d^+})^L.$$

设 $n=mL+f$,其中 m 与 f 均为非负整数,$0\leqslant f<L$. 使用引理 5 中的符号有

$$P_j^{(n)}=P^n\cdot\xi(j)=P^{mL+f}\cdot\xi(j)=P^{mL}(P^f\cdot\xi(j)).$$

由引理 4 得到

$$S(P_j^{(n)})\leqslant H(P^{mL})S(P^f\cdot\xi(j))\leqslant H(P^{mL})\leqslant[H(P^L)]^m\leqslant\{1-(1/d^+)^L\}^m$$
$$=\{1-(1/d^+)^L\}^{-f/L}[W(G)]^n\leqslant U(G)[W(G)]^n.$$

所以,

$$|e_{ij}^{(n)}(P)|=|p_{ij}^{(n)}-a_j|\leqslant S(P_j^{(n)})\leqslant U(G)[W(G)]^n.\qquad\square$$

3 平均访问次数

我们用 δ_{ij}表示 Kronecker 符号,即当 $i=j$ 时 $\delta_{ij}=1$,反之 $\delta_{ij}=0$. 关于 $M(j,n)$,有以下估计.

定理 1 (1) $\forall\ j\in V,n>1$, 有:

$$|M(j,n)-(n-1)a_j|\leqslant\delta_{1j}+\frac{1-[W(G)]^{n-1}}{1-W(G)}\cdot U(G)W(G)\leqslant\delta_{1j}+\frac{U(G)W(G)}{1-W(G)}.$$

(2) 如果任给 $i\in V$ 有 $d_i^+=d_i^-$,那么$\forall\ j\in V,n>1$,有

$$|M(j,n)-\frac{(n-1)d_j^+}{s}|\leqslant\delta_{1j}+\frac{1-[W(G)]^{n-1}}{1-W(G)}\cdot U(G)W(G)\leqslant\delta_{1j}+\frac{U(G)W(G)}{1-W(G)}.$$

(3) 如果任给 $i\in V$,有 $\sum\limits_{j\in\Gamma_i^-}\frac{1}{d_j^+}=1$,那么 $\forall\ j\in V,n>1$, 有

$$|M(j,n)-\frac{n-1}{r}|\leqslant\delta_{1j}+\frac{1-[W(G)]^{n-1}}{1-W(G)}\cdot U(G)W(G)\leqslant\delta_{1j}+\frac{U(G)W(G)}{1-W(G)}.$$

证明 由[4]知

$$M(j,n)-n\alpha_j=\delta_{1j}-\alpha_j+\sum_{k=1}^{n-1}(p_{1j}^{(k)}-\alpha_j),$$

再由引理 9 得,

$$|M(j,n)-(n-1)\alpha_j|=|\delta_{1j}+\sum_{k=1}^{n-1}(p_{1j}^{(k)}-\alpha_j)|\leqslant\delta_{1j}+\sum_{k=1}^{n-1}|p_{1j}^{(k)}-\alpha_j|$$

$$\leqslant\delta_{1j}+\frac{1-[W(G)]^{n-1}}{1-W(G)}\cdot U(G)W(G)\leqslant\delta_{1j}+\frac{U(G)W(G)}{1-W(G)}.$$

这就是(1).在(2)的条件下容易验证 $\alpha_j=d_j^+/s$ ($\forall\ j\in V$)满足引理 2 中的线性方程组,在(1)中取 $\alpha_j=d_j^+/s$ 即得(2).在(3)的条件下可知 $\alpha_j=1/r(\forall\ j\in V)$满足引理 2 中的线性方程组,在(1)中取 $\alpha_j=1/r$ 即得(3). □

定理 2 假设任给 $i,j\in V$,有 $|\Gamma_i^+\cap\Gamma_j^+|\geqslant t\geqslant1$,则

(1) 任给 $j\in V,n\geqslant1$,有

$$|M(j,n)-(n-1)\alpha_j|\leqslant\delta_{1j}+[1-(1-\frac{t}{d^+})^{n-1}](\frac{d^+}{t}-1)\leqslant\delta_{1j}-1+\frac{d^+}{t}.$$

(2) 如果任给 $i\in V$ 还有 $d_i^+=d_i^-$,那么$\forall\ j\in V,n\geqslant1$ 有

$$|M(j,n)-\frac{(n-1)d_j^+}{s}|\leqslant\delta_{1j}+[1-(1-\frac{t}{d^+})^{n-1}](\frac{d^+}{t}-1)\leqslant\delta_{1j}-1+\frac{d^+}{t}.$$

(3) 如果任给 $i\in V$ 还有 $\sum\limits_{j\in\Gamma_i^-}1/d_j^+=1$,那么 $\forall\ j\in V,n\geqslant1$ 有

$$|M(j,n)-\frac{n-1}{r}|\leqslant\delta_{1j}+[1-(1-\frac{t}{d^+})^{n-1}](\frac{d^+}{t}-1)\leqslant\delta_{1j}-1+\frac{d^+}{t}.$$

证明 因为

$$\sum_{k\in V}\min\{p_{ik},p_{jk}\}\geqslant\sum_{k\in\Gamma_i^+\cap\Gamma_j^+}\min\{p_{ik},p_{jk}\}=\sum_{k\in\Gamma_i^+\cap\Gamma_j^+}\min\{1/d_i^+,1/d_j^+\}$$

$$=\begin{cases}|\Gamma_i^+\cap\Gamma_j^+|/d_i^+,\ (d_i^+\geqslant d_j^+),\\|\Gamma_i^+\cap\Gamma_j^+|/d_j^+,\ (d_i^+<d_j^+).\end{cases}$$

所以 $H(P)\leqslant1-t/d^+$.由定理 1 的证明有

$$|M(j,n)-(n-1)\alpha_j|\leqslant\delta_{1j}+\sum_{k=1}^{n-1}|p_{1j}^{(k)}-\alpha_j|\overset{\text{引理6}}{\leqslant}\delta_{1j}+\sum_{k=1}^{n-1}[H(P)]^k$$

$$\leqslant\delta_{1j}+\sum_{k=1}^{n-1}(1-t/d^+)^k\leqslant\delta_{1j}+\frac{1-(1-t/d^+)^{n-1}}{t}\cdot(d^+-t)$$

$$\leqslant\delta_{1j}+d^+/t-1.$$

这就是(1).类似于定理 1 的证明可得(2)和(3). □

推论 3 如果本原有向图 G 无环,且任给 $j\in V$ 有 $d_j^+=r-1$,则

$$|M(j,n)-\frac{n-1}{r}|\leqslant\delta_{1j}+\frac{1-[1/(r-1)]^{n-1}}{r-2}\leqslant\delta_{1j}+\frac{1}{r-2}.$$

证明 因为 G 是 1-图，由已知得 $d_j^+=d_j^-=r-1,s=r(r-1),|\Gamma_i^+\cap\Gamma_j^+|=r-2$，由定理 2(2)立即得本推论.

用 $\overline{V}_j^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}U_j^{(k)}$ 表示随机游动 $X(G)$ 在除了初始位置外的前面 n 步中访问顶点 j 的次数，$\overline{M}(j,n)=E(\overline{V}_j^{(n)}/n)$，则有

定理 4 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{M}(j,n)=\alpha_j(\forall\ j\in V)$.

(2) 如果任给 $i\in V$ 有 $d_i^+=d_i^-$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{M}(j,n)=d_j^+/s\ (\forall\ j\in V)$.

(3) 如果任给 $i\in V$ 还有 $\sum_{j\in\Gamma_i^-}1/d_j^+=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{M}(j,n)=1/r\ (\forall\ j\in V)$.

证明 结论(1)见[4]，由(1)容易得到(2)和(3). □

4 平均首次到达时间

对于随机游动 $X(G)$ 首次到达顶点 j 所需要的平均步数 $M(j)$，我们有以下估计.

定理 5 (1) $M(j)\leqslant[1+\frac{U(G)W(G)}{1-W(G)}]\cdot\frac{1}{\alpha_j}\ (\forall\ j\in V)$.

(2) 如果任给 $i\in V$，还有 $d_i^+=d_i^-$，则 $M(j)\leqslant[1+\frac{U(G)W(G)}{1-W(G)}]\cdot\frac{s}{d_j^+}\ (\forall\ j\in V)$.

(3) 如果任给 $i\in V$ 还有 $\sum_{j\in\Gamma_i^-}1/d_j^+=1$，则 $M(j)\leqslant[1+\frac{U(G)W(G)}{1-W(G)}]\cdot r\ (\forall\ j\in V)$.

证明 令 $z_{ij}=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}(p_{ij}^{(n)}-\alpha_j)$，应用[4]和引理 9，有

$$M(j)=(\delta_{ij}-z_{1j}+z_{jj})\frac{1}{\alpha_j}=[1+\sum_{n=1}^{\infty}(p_{jj}^{(n)}-p_{1j}^{(n)})]\cdot\frac{1}{\alpha_j},$$

$$|M(j)|\leqslant(1+\sum_{n=1}^{\infty}|p_{jj}^{(n)}-p_{1j}^{(n)}|)\frac{1}{\alpha_j}\leqslant[1+\sum_{n=1}^{\infty}S(P_j^{(n)})]\cdot\frac{1}{\alpha_j}$$

$$\leqslant[1+\frac{U(G)W(G)}{1-W(G)}]\cdot\frac{1}{\alpha_j}.$$

□

定理 6 如果任给 $i,j\in V$ 有 $|\Gamma_i^+\cap\Gamma_j^+|\geqslant t\geqslant 1$，那么

(1) $M(j)\leqslant\frac{d^+}{t\alpha_j}\ (\forall\ j\in V)$.

(2) 如果任给 $i\in V$，还有 $d_i^+=d_i^-$，则 $M(j)\leqslant\frac{sd^+}{td_j^+}\ (\forall\ j\in V)$.

(3) 如果任给 $i\in V$，还有 $\sum_{j\in\Gamma_i^-}1/d_j^+=1$，则 $M(j)\leqslant\frac{rd^+}{t}\ (\forall\ j\in V)$.

证明 由定理 5 的证明和引理 5 有

$$M(j)\leqslant[1+\sum_{n=1}^{\infty}S(P_j^{(n)})]\cdot\frac{1}{\alpha_j}\leqslant[1+\sum_{n=1}^{\infty}[H(P)]^n]\cdot\frac{1}{\alpha_j},$$

由定理 2 的证明知此时 $H(P)\leqslant 1-t/d^+$，所以

$$M(j)\leqslant[1+\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{t}{d^+})^n]\cdot\frac{1}{\alpha_j}=\frac{d^+}{t\alpha_j}. \qquad \square$$

特别地，$M(1)$表示了从 1 出发的随机游动 $X(G)$首次回到顶点 1 所需要的平均步数，关于 $M(1)$我们有以下结果.

定理 7 (1) $M(1)=1/\alpha_1$，

(2) 如果任给 $i\in V$，有 $d_i^+=d_i^-$，则 $M(1)=s/d_1^+$，

(3) 如果任给 $i\in V$，有 $\sum_{j\in\Gamma_i^-}1/d_j^+=1$，则 $M(1)=r$.

证明 (1)见[4]，(2)和(3)的证明是容易的. $\square$

参考文献：

[1] BERGE C. *Graphs* [M]. Amsterdam. New York, Oxford, 1985.

[2] ISAACSON D L, MADSEN R W. *Markov Chains Theory and Applications* [M]. New York. London. Sydney. Toronto, 1976.

[3] MADSEN R. W. *Decidability of* $\alpha(P^k)>0$ *for some K* [J]. Journal of Applied Probability, 1975, **12**: 333—340.

[4] KEMENY J G, SNELL J L. *Finite Markov Chains* [M]. Springer-Verlag. New York. York. Berlin. Heidelberg. Tokyo, 1983.

[5] LAWLER G F. *Expected hitting times for a random walk on a connected graph* [J]. Discrete Mathematics, 1986, **61**: 85—92.

[6] 彭代渊. 随机图 $\varepsilon(n,M)$ 上随机游动的平均返回时间 [J]. 数学杂志, 1991, **11**(2): 140—144.
PENG Dai-yuan. *Expected returning times for a random walk on random graphs* $\varepsilon(n,M)$ [J]. Journal of Mathematics, 1991, **11**(2): 140—144. (in Chinese)

Random Walks on Directed Graph

PENG Dai-yuan

(School of Computer & Communication Engineering, Southwestern Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: A random walk on a digraph is defined in which a particle moves from one vertex to any successor of this vertex with equal probability. Detailed results are given on the expectation of first-passage time and the expected number of times to be in some vertex during the first n steps.

Key words: probability; Markov chain; graph; random walk.