第24卷第1期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 1
2004年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2004

C(P)系对幺半群的刻画*

乔虎生
(西北师范大学数学系，甘肃 兰州 730070)

摘 要：设S是幺半群.本文介绍并研究了正则右系的一个推广.一个右S-系A称为C(P)系，如果A的所有循环子系满足条件(P).本文证明了右C(P)系形成了右S-系的一个新的类.同时，C(P)性质为幺半群同调分类研究提供了新思路.

关键词：正则右系；C(P)系；P(P)幺半群.
分类号：AMS(2000) 20M10/CLC number：O152.7
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)01-0119-08

1 引 言

利用幺半群的右系范畴的性质去刻画幺半群，已经有许多重要研究成果面世(见参考文献)；大多数情况下，研究工作都是围绕着投射性和内射性展开的，正则性也是被经常使用的性质.关于投射性与内射性，已经出现了许多推广.文[3]中研究了正则系的一个推广—CSF系.本文的主要目的，是研究一类比CSF系更广的正则系的推广.除特别声明外，N均指自然数集.

2 C(P)系

定义1.1 一个右S-系A称为C(P)系，如果A的所有循环子系满足条件(P).

定义1.2 一个幺半群S称为右P(P)的，如果S的每一个主右理想作为右S-系满足条件(P).

定义1.3 设A是右S-系，$a\in A$叫左拟半可消的，若$as=at(s,t\in S)$，必存在$p,q\in S$，使得$ps=qt$，且$a=ap=aq$.如果A中每一个元素是左拟半可消的，则A叫左拟半可消的.

定义1.4 幺半群S称为左collapsible的，若对任意的$p,q\in S$，存在$r\in S$，使得$rp=rq$.幺半群S称为aperiodic的，若对任意的$x\in S$，存在$n\in N$，使得$x^n=x^{n+1}$.由[3]，右S-系A叫CSF系，如果A的每一个循环子系强平坦.设S为幺半群，$x\in S$叫右谐零的，若存在自然数

* **收稿日期**：2001-02-26
作者简介：乔虎生(1974-)，男，博士研究生.

n,使得 x^n 为 S 的右零元.

引理 1.5[2]　设 S 是幺半群,ρ 是 S 上的同余,则 S/ρ 满足条件(P)$\Leftrightarrow$ 任意的 $u,v \in S$,若 $u\rho v$,则存在 $s,t \in S$,使得 $su = tv$,且 $s\rho 1\rho t$.

约定　设 A 是右 S- 系,$a \in A$,令 $\rho_a = \{(s,t) \in S \times S | as = at\}$,则易知 ρ_a 是 S 上的右同余且 $aS \cong S/\rho_a$. 这样,由定义以及引理 1.5,下述结论显然.

引理 1.6　设 S 是幺半群,A 为右 S- 系,那么下述条件等价:

(1) A 是左拟半可消的.

(2) 任意的 $a \in A$,aS 满足条件(P).

(3) 任意的 $a \in A$,$s,t \in S$,若 $as = at$,必存在 $p,q \in S$,使得 $ps = qt$,且 $a = ap = aq$.

(4) 任意的 $a \in A$,S/ρ_a 满足条件(P).

一般而言,C(P) 系未必就是 CSF 的,由[1],下面就是一个右 $P(P)$ 幺半群但非右 PSF 幺半群的例子:

令 $S = \langle x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots | x_i x_{i+1} = x_i = x_{i+1} x_i, i = 0,1,2,\cdots \rangle \cup \{1\}$,易知 S 是交换幺半群,下证 S 的每一个右理想满足条件(P),但存在 $x_0 S$ 不是强平坦的. 任意的 $x_i^n \in S(i = 0,1,2,\cdots; n \in N)$,考虑 $x_i^n S$,任意的 $s,t \in S$,若 $x_i^n s = x_i^n t$,显然由 S 的构造,有两种可能:

(i) $s \neq t$,总有 $s = x_k^p$ 或 1,$t = x_l^q$ 或 1,其中 $k,l \in N \cup \{0\}$,$p,q \in N$,但总有 $k,l \geqslant i + 1$,这时令 $x_i^n = x_i^n s = x_i^n t$,且 $t \cdot s = s \cdot t$.

(ii) $s = t = x_r^m$,$r \in N \cup \{0\}$,$m \in N$,但 $r \leqslant i$,这时有 $1 \cdot s = 1 \cdot t$,$x_i^n = x_i^n \cdot 1$.

综上,由引理 1.6,$x_i^n S$ 满足条件(P),但对 $x_0 S$,比如 $x_0 x_1 = x_0 x_2$,不存在 $x \in S$,使得 $x x_1 = x x_2$,且 $x_0 = x_0 x$.

命题 1.7　C(P) 系的子系仍然是 C(P) 系,C(P) 系的余直积仍是 C(P) 系.

证明　由定义是显然的.

命题 1.8　设 M,N 均为右 S- 系,若单同态 $f: M \to N$ 可收缩,且 N 是 C(P) 系,则 M 是 C(P) 系.

证明　任意的 $a \in M$,$s,t \in S$,若 $as = at$,则显然 $f(a)s = f(a)(t)$. 由条件 $f(a) \in N$,由 N 则 C(P) 系,必存在 $p,q \in S$,使得 $ps = qt$,且 $f(a) = f(a)p = f(a)q$. 因为 f 可收缩,故有同态 $g: N \to M$,使得 $gf = 1_M$,则 $a = gf(a) = gf(ap) = gf(aq)$,即 $a = ap = aq$.

3　C(P) 系对幺半群的刻画

定理 2.1　设 S 是幺半群,那么下述条件等价:

(1) S 是右 P(P) 的.

(2) S 的每一个主右理想由 S 的一个左拟半可消元生成.

(3) S 的每一个元素是左拟半可消元.

证明　(1)$\Rightarrow$(3) 设 $u \in S$,则 uS 满足条件(P),故 S/ρ_u 满足条件(P),任意的 $s,t \in S$,若 $us = ut$,则 $s\rho_u t$,必存在 $p,q \in S$,使得 $ps = qt$,且 $p\rho_u 1\rho_u q$. 即 $u = up = uq$,由引理 1.6,说明 u 左拟半可消.

(3)⇒(2) 显然.

(2)⇒(1) 任意的 $u \in S$，uS 为 S 的主右理想，由条件不妨设 u 就是 S 的左拟半可消元，则由定义，若 $us = ut(s,t \in S)$，则存在 $p,q \in S$，使得 $ps = qt$，且 $u = up = uq$，这表明 S/ρ_u 满足条件(P)，故 uS 满足条件(P).

定理 2.2 S 是右 P(P) 幺半群 ⇔ 每一个满足条件(E) 的右 S- 系左拟半可消.

证明 ⇐ S 是满足条件(E) 的右 S- 系，则 S 左拟半可消，由 S 右 P(P) 的定义以及定理 2.1 直接可得.

⇒ 设 A 是满足条件(E) 的右 S- 系，任意的 $a \in A$，若 $as = at(s,t \in S)$，则存在 $a' \in A$，$u \in S$，使得 $us = ut$，$a = a'u$，由 S 是右 $P(P)$ 的以及定理 2.1，对 $us = ut$，存在 $p,q \in S$，使得 $ps = qt$，且 $u = up = uq$，故 $a = a'u = a'up = a'uq$，即 $a = ap = aq$.

由上面的讨论，我们有下述

推论 2.3 对任意右 S- 系，有下述蕴含关系：

强忠实 ⇒ 正则 ⇒CS 系 F⇒C(P) 系⇎条件(E).

定理 2.4 设 S 是幺半群，那么下述条件等价：

(1) 所有的自由右 S- 系是 C(P) 系.

(2) 所有的投射右 S- 系是 C(P) 系.

(3) 所有的强平坦右 S- 系是 C(P) 系.

(4) 所有强平坦的循环右 S- 系是 C(P) 系.

(5) S 是右 P(P) 幺半群.

证明 (3)⇒(2)⇒(1)，(3)⇒(4) 显然.

(5)⇒(3) 由定理 2.2，每一个满足条件(E) 的右 S- 系是 C(P) 系，则每一个强平坦的右 S- 系是右 C(P) 系.

(4)⇒(5) S 是强平坦的循环右 S- 系，故由定理 2.1 可知结论成立.

(1)⇒(5) 由 S 是自由系及定理 2.1 可得.

引理 2.5 设 S 是幺半群，A 是弱平坦右 S- 系，$a \in A$，$s,t \in S$，若 s,t 是 S 的右零元，且 $as = at$，则 $s = t$.

引理 2.6[4] 设 S 是周期幺半群，那么下述条件等价：

(1) $S = G \dot{\cup} N$，其中 G 是群，$N = \varnothing$ 或 N 中每一个元素都是 S 的右谐零元.

(2) 每一个弱平坦的循环右 S- 系满足条件(P).

(3) 每一个平坦的循环右 S- 系满足条件(P).

引理 2.7 设 $S = G \dot{\cup} R$，其中 G 是群，R 是右零元集合，A 是弱平坦 S- 系，则任意的 $a \in A$，aS 满足条件(P).

证明 任意的 $s,t \in S$，$a \in A$，若 $as = at$，下面讨论 s,t：

(i) 若 $s,t \in R$，由引理 2.5，$s = t$，故 $1 \cdot s = 1 \cdot t$，$a = a \cdot 1$.

(ii) 若 s,t 中至少有一个属于 G，不妨设 $s \in G$，由 $as = at$，有 $a = ats^{-1}$，令 $u = ts^{-1}$，$v = 1$，则有 $us = ts^{-1}s = 1 \cdot t$，且 $a = ats^{-1} = au = a \cdot 1$.

综上，由引理 1.6，说明 aS 满足条件(P).

定理 2.8　设 S 是周期幺半群，那么下述条件等价：

(1) 每一个平坦的右 S- 系是 C(P) 系.

(2) 每一个弱平坦的右 S- 系是 C(P) 系.

(3) 每一个平坦的循环右 S- 系是 C(P) 系.

(4) 每一个弱平坦的循环右 S- 系是 C(P) 系.

(5) $S = G \dot{\cup} R$，其中 G 是群，$R = \varnothing$ 或 R 为右零元集合.

证明　(2)⇒(1)⇒(3)，(2)⇒(4)⇒(3) 显然.

(3)⇒(5) 所有平坦循环右 S- 系是 C(P) 系，则所有平坦循环右 S- 系满足条件(P)，而 S 是周期的，由引理 2.6，$S = G \dot{\cup} N$，其中 G 是群，$N = \varnothing$ 或 N 为右诣零的半群. 另一方面，由定理 2.4，S 是右 P(P) 的，任意的 $x \in N$，设 n 是使 x^n 是右零元的最小自然数，若 $n = 1$，则 x 是右零元，若 $n > 1$，由 $x \cdot x^n = x^n = x \cdot x^{n-1}$，存在 $p, q \in S$，使得 $x = xp = xq$，且 $px^n = qx^{n-1}$，若 p, q 中至少有一个属于 N，不妨设 $p \in N$，由条件存在自然数 m，使得 p^m 是右零元，而由 $x = xp$ 得 $x = xp = xp^2 = \cdots = xp^m = p^m$，说明 x 为右零元，矛盾. 若 p, q 全不属于 N，必有 $q \in G$，由等式 $px^n = qx^{n-1}$，有 $q^{-1}px^n = x^{n-1}$，而 x^n 为右零元，故 $x^n = x^{n-1}$，矛盾，说明 N 中每一个元素为右零元.

(5)⇒(2) 由引理 2.7 可知.

引理 2.9[2]　每一个满足条件(P) 的循环右 S- 系强平坦 ⇔ S 是 aperiodic 的.

引理 2.10[6]　设 S 是幺半群，则下述条件等价：

(1) 每一个强平坦的循环右 S- 系投射.

(2) S 的每一个左 collapsible 子幺半群包含左零元.

引理 2.11　设 S 是幺半群，那么下述结论成立：

(1) 每一个平坦右 S- 系正则 ⇔ S 是 aperiodic 的，每一个强平坦循环右 S- 系投射，且每一个平坦的右 S- 系是 C(P) 系.

(2) 每一个平坦右 S- 系是 CSF 系 ⇔ S 是 aperiodic 的，且每一个平坦的右 S- 系是 C(P) 系.

(3) S 是 aperiodic 的，且每一个平坦右 S- 系是 C(P) 系 ⇔ S 是右 P(P) 的，且每一个平坦右 S- 系满足条件(E).

证明　(1) 与(2) 利用引理 2.9 及引理 2.10 显然. (3) 利用引理 2.9 及定理 2.2 是显然的.

推论 2.12[5]Th2.5　设 S 是幺半群，则下述条件等价：

(1) 所有平坦右 S- 系正则.

(2) 所有弱平坦右 S- 系正则.

(3) 所有平坦右 S- 系的循环子系强平坦.

(4) 所有弱平坦右 S- 系的循环子系强平坦.

(5) $S = N^1$，$N = \varnothing$ 或 N 为右零半群.

证明　由定理 2.8，引理 2.10 及引理 2.11 的(1) 只须验证：右零幺半群的每一个左 collapsible 子幺半群包含左零元，显然由半群结构，这种子幺半群只能为{1}，显然为其自身左零元.

推论 2.13[3]Th2.2　设 S 是幺半群，则下述条件等价：

(1) 所有平坦右 S- 系是 CSF 系.

(2) 所有弱平坦右 S- 系是 CSF 系.

(3) 所有平坦的循环右 S- 系是 CSF 系.

(4) 所有弱平坦的循环右 S- 系是 CSF 系.

(5) $S = \{1\}$ 或 S 为右零半群并上单位元$\{1\}$.

证明 由引理 2.11(3) 及定理 2.8 可得.

推论 2.15[3]Coro2.10 设 S 是 PSF 幺半群,则下述条件等价:

(1) 所有平坦右 S- 系满足条件(E).

(2) 所有弱平坦右 S- 系满足条件(E).

(3) $S = \{1\}$ 或 S 为右零半群半上单位元 1.

引理 2.16[8] I 是 S 的真右理想,则 S/I 满足条件(P)$\Leftrightarrow |I| = 1$.

引理 2.17[9] 所有循环右 S- 系满足条件(P)$\Leftrightarrow S$ 是群或群并零.

引理 2.18[1] 所有循环右 S- 系满足条件(P)$\Leftrightarrow S$ 是群或群并零.

定理 2.19 设 S 是周期幺半群,则下述条件等价:

(1) 所有主弱平坦的右 $S-$ 系是 C(P) 系.

(2) 所有挠自由右 S- 系是 C(P) 系.

(3) 所有循环的主弱平坦右 S- 系是 C(P) 系.

(4) 所有挠自由的循环右 S- 系是 C(P) 系.

(5) $S = G$ 或 $G \dot{\cup} \{0\}$,其中 G 是群.

证明 (2)$\Rightarrow$(1)$\Rightarrow$(3),(2)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(3) 显然.

(3)$\Rightarrow$(5) 由条件及定理 2.8,$S = G \dot{\cup} R$,其中 G 为群,$R = \varnothing$ 或 R 为右零元集合,若 $R \neq \varnothing$,令 $I = R$,则 I 为 S 的真右理想,由引理 2.17,S/I 主弱平坦,由条件,S/I 满足条件(P),故由引理 2.16,$|I| = 1$,说明 $I = \{0\}$,故 $S = G$ 或 $G \dot{\cup} \{0\}$,其中 G 为群.

(5)$\Rightarrow$(2) 由引理 2.18 可得.

推论 2.20[3],Th2.3 设 S 是幺半群,则下述条件等价:

(1) 所有主弱平坦右 S- 系是 CSF 系.

(2) 所有挠自由右 S- 系是 CSF 系.

(3) 所有主弱平坦的循环右 S- 系是 CSF 系.

(4) 所有挠自由的循环右 S- 系是 CSF 系.

(5)$S = \{1\}$ 或 $S = \{0,1\}$.

证明 由定理 2.19 及下述事实易得:

所有主弱平坦右 S- 系是 C(P) 系,且 S 是 aperiodic 的 $\Leftrightarrow$ 所有主弱平坦右 S- 系是 CSF 系.

引理 2.21[11] 设 A 是右 S- 系,则存在内射 S- 系 B,使得 $A \leqslant eB$.

定理 2.22 设 S 是幺半群,则下述条件等价:

(1) 所有内射右 S- 系是 C(P) 系.

(2) 所有弱内射右 S- 系是 C(P) 系.

(3) 所有主弱内射右 S- 系是 C(P) 系.

(4) 所有可除右 S- 系是 C(P) 系.

(5) 所有忠实右 S- 系是 C(P) 系.

(6) 所有右 S- 系是 C(P) 系.

(7) $S=G$ 或 $G\dot{\cup}\{0\}$,其中 G 是群.

证明 (6)⇒(5),(6)⇒(4)⇒(3)⇒(2)⇒(1) 显然,(7)⇒(6) 由引理 2.18 可得.

(1)⇒(6) A 是任意右 S- 系,由引理 2.21,存在内射包 $E(A)$,由条件,$E(A)$ 是 C(P) 系,由命题 1.7,C(P) 系的子系的是 C(P) 系,而 $A\leqslant E(A)$,故 A 是 C(P) 系.

(5)⇒(6) 设 A 是任意右 S- 系,令 $B=S\cup A$,则 B 是忠实的,由条件 B 是 C(P) 系,而 $A<B$,则 A 为 C(P) 系.

(6)⇒(7) 所有右 S- 系为 C(P) 系,则所有循环右 S- 系是 C(P) 系,故所有循环右 S- 系满足条件(P),由引理 2.18 则 $S=G$ 或 $G\dot{\cup}\{0\}$,其中 G 是群.

推论 2.23[3],Th2.4 设 S 是幺半群,那么下述条件等价:

(1) 所有内射 S- 系是 CSF 系.

(2) 所有弱内射 S- 系是 CSF 系.

(3) 所有主弱内射 S- 系是 CSF 系.

(4) 所有可除 S- 系是 CSF 系.

(5) 所有忠实 S- 系是 CSF 系.

(6) 所有 S- 系是 CSF 系.

(7) $S=\{1\}$ 或 $S=\{0,1\}$.

证明 由引理 2.9,定理 2.22 及下述事实可得:

所有右 S- 系是 CSF 系 ⇔S 是 aperiodic 的,且所有右 S- 系是 C(P) 系.

引理 2.24[7] S 是 von Neumann 正则的 ⇔ 所有满足条件(E) 右 S- 系平坦.

引理 2.25[7] 设 I 是 S 的真右理想,则下述条件等价:

(1) $A(I)$ 平坦(弱平坦,主弱平坦).

(2) 任意的 $a\in I,a\in Ia$.

定理 2.26 设 S 是 aperiodic 幺半群,则下述条件等价:

(1) S 是右 P(P) 的,且所有右 C(P) 系平坦.

(2) S 是右 P(P) 的,且所有右 C(P) 系弱平坦.

(3) S 是右 P(P) 的,且所有右 C(P) 系主弱平坦.

(4) S 是 von Neumann 正则的.

证明 (1)⇒(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) 设 $s\in S$,若 $sS=S$,则 s 是 S 的 von Neumann 正则元,故设 sS 是 S 的真右理想,考虑右 S- 系 $A(sS)$,因为 $A(sS)=(x,1)S\cup(y,1)S$,且 $(x,1)S\cong S\cong(y,1)S$,故 $A(sS)$ 是 C(P) 系,这样,由假设 $A(sS)$ 主弱平坦,故由引理 2.25,任意的 $t\in sS,t\in sSt$,特别地,$s\in sSs$,故 S 正则.

(4)⇒(1) 由条件,显然 S 是右 P(P) 的,又因为 S 是 aperiodic 的,故每一个 C(P) 系满足条件(P),由引理 2.24,所有右 C(P) 系平坦.

定理 2.27 设 S 是幺半群,则下述条件等价:

(1) S 是右 P(P) 幺半群且每个 C(P) 系是自由的.

(2) S 是右 P(P) 幺半群且每个 C(P) 系是投射的.

(3) S 是右 P(P) 幺半群且每个 C(P) 系强平坦.

(4)$S = \{1\}$.

证明 (1)⇒(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(4) 设 sS 是 S 的真右理想,类似于定理 2.28 的证明易知 $A(sS)$ 是 C(P) 系,但非强平坦,也不满足条件(E),矛盾.说明 S 为群,但由引理 2.18,这时,每一个右 S- 系强平坦,故 $S = \{1\}$.

(4)⇒(1) 显然.

引理 2.28[9] 所有右 S- 系满足条件(P)⇔S 是群.

定理 2.29 设 S 是幺半群,那么下述条件等价:

(1) S 是右 P(P) 幺半群且每个 C(P) 系满足条件(P).

(2) S 是群.

证明 (1)⇒(2) 类似于定理 2.27 的证明.

(2)⇒(1) 由引理 2.28 可得.

定理 2.30 设 S 是右 P(P) 幺半群,则下述条件等价:

(1) 每一个右 C(P) 系挠自由.

(2) S 的每一个右可消元右可逆.

证明 (1)⇒(2) 设 $r \in S$ 是 S 的右可消元,若 $rS = S$,则 r 右可递,否则,rS 为 S 的真右理想,易证右 S- 系 $A(rS)$ 是右 C(P) 系,由假设 $A(rS)$ 挠自由,故由 $(x,1)r = (z,r) = (y,1)r$. 我们得 $(x,1) = (y,1)$,矛盾,这样 $rS = S$,说明 r 右可逆.

(2)⇒(1) 显然.

参考文献:

[1] LIU Z K, YANG Y B. *Monoid over which every flat right act satisfies condition(P)* [J]. Comm. Algebra, 1994, **22**(8): 2861—2875.

[2] BULMAN-FLEMING S. *Flat and strongly flat S-systems* [J]. Comm. Algebra, 1992, **20**(9): 2553—2567.

[3] LIU Z K, AHSAN J. *A generalization of regular left S-acts* [J]. Northeast. Math. J., 1997, **13**(2): 169—176.

[4] GOLCHIN A, RENSHAW J, RENIHAW J. *Periodic monoids gver which all flat cyclic right acts satisfy condition (P)* [J]. Semigroup Forum, 1997, **54**: 261—263.

[5] LIU Z K. *Monoids over which all flat left acts are regular* [J]. J. Pure Appl. Algebra, 1996, **111**: 199—203.

[6] KILP M. *On monoids over which all strongly flat cyclic right acts are projective* [J]. Semigroup Forum, 1996, **52**: 241—245.

[7] LIU Z K. *A characterization of regular monoids by flatness of left acts* [J]. Semigronp Forum, 1993,

46: 85—89.
[8] KILP M. *Strong flatness of flat cyclic left acts* [J]. uch. Zap. Tartu un-ta, 1985, **700**: 38—41.
[9] NORMAK P. *On equlizer, flat and pullback-flat acts* [J]. Semigronp Forum, 1987, **36**: 293—313.
[10] LIU Z K. *Characterization of monoids by condition (P) of cyclic left acts* [J]. Semigroup Forurm, 1994, **49**: 31—39.
[11] BERTHIAUME P. *The injective envelope of S-acts* [J]. Canad. Math. Bull., 1967, **10**: 261—273.

Characterization of Monoids by C(P) Acts

QIAO Hu-sheng
(Dept. of Math., Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Let S be a monoid. This paper introduces and investigates a generalization of regular right S-acts. A right S-act A is a C(P) act if all cyclic subacts of A satisfy condition (P). It is shown that right C(P) acts form a new class of right S-acts. The paper also takes C(P) property as a new club for homological classification of monoids.
Key words: regular right acts; C(P) act; P(P) monoids.