# Hausdorff 型测度的性质*

杨 云
(湖北教育学院数学系，湖北 武汉 430060)

**摘 要**：本文研究维纹(Dimension Print)所对应的 Hausdorff 型测度 $\xi^{\alpha}(\cdot)$，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\in R^{n+}$，得到它与 Hausdorff 测度的一些关系，利用这些关系我们给出 $R^n$ 中一个集合 $E$ 的 Hausdorff 型测度 $\xi^{\alpha}(E)$ 是正有限值的若干判定条件.

**关键词**：Hausdorff 型测度，维纹(Rimension Print).
**分类号**：AMS(2000) 28A78/CLC number: O174.12
**文献标识码**：A **文章编号**：1000-341X(2004)01-0139-06

## 1 引 言

分形概念揭示了自然界中一大类无规形体的内在规律性—标度不变性，而分形维数则是定量地表示分形对象的复杂程度的最基本的量. 为了能定量地描述包括非整数值在内的维数，德国数学家 Felix Hausdorff 在 1919 年从测度的角度引进了 Hausdorff 维数的定义. 而维纹(Dimension Print)给出了一个性质相当不同的 Hausdorff 维数的变形或拓广，它能区别具有相同的 Hausdorff 维数的集合，维纹所对应的外测度 $\xi^{\alpha}(\cdot)$是一种 Hausdorff 类型的测度. 本文作了这方面的一些探讨，得到以下结果. 为此先给出一些基本概念和引理.

## 2 预备知识

设 $(R^n,d)$ 是欧氏度量空间，$M$ 表示 $R^n$ 中所有椭球(按递减方式排列的)组成的集类. $\forall U\in M$，$a_1(U)\geqslant a_2(U)\geqslant\cdots\cdots\geqslant a_n(U)>0$ 表示 $U$ 的 $n$ 个主轴长度，令 $R^{n+}=\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\mid\alpha$ 是 $R^n$ 中非负向量$\}$，设 $\alpha\in R^{n+}$，记 $\tau^{\alpha}(U)=a_1^{\alpha_1}(U)a_2^{\alpha_2}(U)\cdots a_n^{\alpha_n}(U)$，现设 $E$ 是 $R^n$ 的任意子集，$\alpha\in R^{n+}$ 定义，$\forall\delta>0$，$\xi_{\delta}^{\alpha}(E)=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\tau^{\alpha}(U_i):E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i,|U_i|<\delta,i=1,2,\cdots\}$，令 $\delta\to 0$ 得到Hausdorff类型的测度，$\xi^{\alpha}(E)=\lim_{\delta\to 0}\xi_{\delta}^{\alpha}(E)$，可以证明 $\xi^{\alpha}(\cdot)$是一个正则的度量外测度.

**定义 1** $\xi^{\alpha}$ 在 $\xi^{\alpha}$- 可测集(包含了 Borel 集)所成的 $\sigma$- 域上的限制称为 $\alpha$- 型 Hausdorff 测度

* **收稿日期**：2001-05-14
**作者简介**：杨 云(1956- )，女，教授.

**定义 2** 集合 $P(E)=\{\alpha\in R^{n+}:\xi^{\alpha}(E)>0\}$ 称为 $E$ 的维纹(Dimension Print).

**引理 1** 设 $E\subset R^n,\forall\ \delta>0$,令 $B_\delta^s(E)=\inf\{\sum_i|B_i|^s;\{B_i\}$ 是 $E$ 的 $\delta$-球覆盖$\}$,定义 $B^s(E)=\lim\limits_{\delta\to 0}B_\delta^s(E)$,则 $H^s(E)\leqslant B^s(E)\leqslant 2^sH^s(E)$ 证明见文[1].

**引理 2** 设 $E\subset R^n,\alpha=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)\in R^{n+}$,记 $|\alpha|=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i,P_1(\alpha)=(\alpha_1,0\cdots 0)P_1(|\alpha|)=(|\alpha|,0,0,\cdots 0)$,则

(1) $\xi^{\alpha}(E)\leqslant H^{|\alpha|}(E)$;

(2) $(\frac{1}{2\sqrt{n}})^{\alpha_1}H^{\alpha_1}(E)\leqslant\xi^{P_1(\alpha)}(E)$;

(3) $2^{|\alpha|}\xi^{P_1(|\alpha|)}(E)\leqslant\xi^{\alpha}(E)\leqslant(2\sqrt{n})^{P_1(|\alpha|)}(E)$.

**证明** (1) 设 $\{U_i\}$ 是 $E$ 的任意 $\delta$-椭球覆盖,$a_1(U_i)\geqslant a_2(U_i)\geqslant\cdots\geqslant a_n(U_i)>0$ 是 $U_i$ 的各主轴长,则易知 $\forall\ 1\leqslant k\leqslant n$,

$$a_k(U_i)\leqslant|U_i|=\sup_{x,y\in U_i}d(xy)=\sup_{x,y\in U_i}(\sum_j|\xi_j-\eta_j|^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{n}\,a_1(U_i),$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)\ y=(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n)\in U_i$. 于是

$$\sum_i a_1^{\alpha_1}(U_i)a_2^{\alpha_2}(U_i)\cdots a_n^{\alpha_n}(U_i)\leqslant\sum_i|U_i|^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}=\sum_i|U_i|^{|\alpha|}.$$

令 $B_i$ 是球心在 $U_i$ 中半径为 $|U_i|$ 的球,则 $U_i\subset B_i,|B_i|=2|U_i|<2\delta$,

$$\xi_\delta^{\alpha}(E)\leqslant\sum_i a_1^{\alpha_1}(U_i)a_2^{\alpha_2}(U_i)\cdots a_n^{\alpha_n}(U_i)\leqslant\sum_i|U_i|^{|\alpha|}$$

$$=\sum_i(\frac{1}{2}|B_i|)^{|\alpha|}=(\frac{1}{2})^{|\alpha|}\sum_i|B_i|^{|\alpha|},$$

取下确界得 $\xi_\delta^{\alpha}(E)\leqslant(\frac{1}{2})^{|\alpha|}B_{2\delta}^{|\alpha|}(E)$. 令 $\delta\to 0$,有 $\xi^{\alpha}(E)\leqslant(\frac{1}{2})^{|\alpha|}B^{|\alpha|}(E)$,由引理 1 知

$$\xi^{\alpha}(E)\leqslant(\frac{1}{2})^{|\alpha|}B^{|\alpha|}(E)\leqslant(\frac{1}{2})^{|\alpha|}\cdot 2^{|\alpha|}\cdot H^{|\alpha|}(E)=H^{|\alpha|}(E).$$

(2) 因为 $a_1(U_i)\geqslant\frac{1}{\sqrt{n}}|U_i|$,所以

$$\sum_i\tau^{P_1(\alpha)}(U_i)=\sum_i a_1^{\alpha_1}(U_i)a_2^{0}(U_i)\cdots a_n^{0}(U_i)=\sum_i a_1^{\alpha_1}(U_i)$$

$$\geqslant\sum_i(\frac{1}{\sqrt{n}}|U_i|)^{\alpha_1}=(\frac{1}{\sqrt{n}})^{\alpha_1}\sum_i|U_i|^{\alpha_1}$$

$$=(\frac{1}{\sqrt{n}})^{\alpha_1}\sum_i(\frac{1}{2}|B_i|)^{\alpha_1}=(\frac{1}{2\sqrt{n}})^{\alpha_1}\sum_i|B_i|^{\alpha_1}.$$

取下确界得 $\xi_\delta^{P_1(\alpha)}(E)\geqslant(\frac{1}{2\sqrt{n}})^{\alpha_1}B_{2\delta}^{\alpha_1}(E)$,令 $\delta\to 0$ 有 $\xi^{P_1(\alpha)}(E)\geqslant(\frac{1}{2\sqrt{n}})^{\alpha_1}B^{\alpha_1}(E)$,由引理 1 知,

$$\xi^{P_1(\alpha)}(E)\geqslant(\frac{1}{2\sqrt{n}})^{\alpha_1}H^{\alpha_1}(E).$$

(3) 令 $V_i$ 是以 $U_i$ 中的元素为中心,其各主轴长度分别为 $2a_1(U_i)=a_n(V_i)\leqslant a_{n-1}(V_i)$

$\leqslant \cdots \leqslant a_1(V_i) = a(U_i)$ 的椭球，其中 $a = \sup\limits_i \dfrac{2a_1(U_i)}{|U_i|}$. 由于 $\forall\ i$,

$$a_1(U_i) \leqslant |U_i| \Rightarrow \frac{2a_1(U_i)}{|U_i|} \leqslant 2,$$

于是 $a = \sup\limits_i \dfrac{2a_1(U_i)}{|U_i|}$ 存在且与 $i$ 无关，则

$$U_i \subset V_i \text{ 且 } |V_i| \leqslant \sqrt{n}\, a_1(V_i) = a\sqrt{n}\,|U_i| < a\sqrt{n}\,\delta,$$

从而 $\{V_i\}$ 是 $E$ 的 $a\sqrt{n}\,\delta$ —椭球覆盖，

$$\sum_i a_1^{|\alpha|}(U_i)a_2^0(U_i)\cdots a_n^0(U_i) = \sum_i a_1^{\alpha_1}(U_i)a_1^{\alpha_2}(U_i)\cdots a_1^{\alpha_n}(U_i)$$

$$\leqslant \sum_i \left(\frac{1}{2}a_1(V_i)\right)^{\alpha_1}\left(\frac{1}{2}a_2(V_i)\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{1}{2}a_n(V_i)\right)^{\alpha_n}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|}\sum_i a_1^{\alpha_1}(V_i)a_2^{\alpha_2}(V_i)\cdots a_n^{\alpha_n}(V_i).$$

取下确界得 $\xi_\delta^{P_1(|\alpha|)}(E) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|}\xi^\alpha_{a\sqrt{n}\delta}(E)$，令 $\delta \to 0$ 有

$$\xi^{P_1(|\alpha|)}(E) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|}\xi^\alpha(E) \Rightarrow 2^{|\alpha|}\xi^{P_1(|\alpha|)}(E) \leqslant \xi^\alpha(E).$$

另一方面由(1)知 $\xi^\alpha(E) \leqslant H^{|\alpha|}(E)$，由(2)知 $H^{|\alpha|}(E) \leqslant (2\sqrt{n})^{|\alpha|}\xi^{P_1(|\alpha|)}(E)$，故

$$2^{|\alpha|}\xi^{P_1(|\alpha|)}(E) \leqslant \xi^\alpha(E) \leqslant (2\sqrt{n})^{|\alpha|}\xi^{P_1(|\alpha|)}(E)$$

**注 1** 由引理 2 知，如果 $E$ 关于 Hausdorff 测度是 $|\alpha|$-集，即 $0 < H^{|\alpha|}(E) < \infty$，则

$$0 < \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{|\alpha|}H^{|\alpha|}(E) \leqslant 2^{|\alpha|}\xi^{P_1(|\alpha|)}(E) \leqslant \xi^\alpha(E) \leqslant H^{|\alpha|}(E) < \infty.$$

**引理 3**[4] 设 $x_i > 0, i = 1, 2, \cdots n$，则

$$\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)\right]^{-1} \leqslant (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$

## 2 主要结果

**定理 1** 设 $\mu$ 是 $R^n$ 上的质量分布，$E \subset R^n$ 是 Borel 集且是 $H^{|\alpha|}$- 可测子集，$U_x$ 是包含 $x$ 的椭球，它的各主轴长为 $a_1(U_x) \geqslant a_2(U_x) \geqslant \cdots \geqslant a_n(U_x) > 0$, $0 < C < \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) \in R^{n+}$，记 $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i$.

(1) 如果 $\forall\ x \in E$, $\overline{\lim\limits_{a_1(U_x)\to 0}} \dfrac{\mu(U_x)}{a_1^{\alpha_1}(U_x)a_2^{\alpha_2}(U_x)\cdots a_n^{\alpha_n}(U_x)} < C$，则

$$\xi^\alpha(E) \geqslant \frac{\mu(E)}{C(\sqrt{n})^{|\alpha|}}.$$

(2) 如果 $\forall\ x \in E$, $\overline{\lim\limits_{a_1(U_x)\to 0}} \dfrac{\mu(U_x)}{a_1^{\alpha_1}(U_x)} > C$，则

$$\xi^\alpha(E) \leqslant C^{-1}\mu(R^n).$$

**证明** 由上极限定义，$\forall\ \varepsilon > 0$ 及 $\delta > 0$ 存在 $U_x$, $a_1(U_x) < 2\delta$ 使得

$$\frac{\mu(U_x)}{a_1^{\alpha_1}(U_x)a_2^{\alpha_2}(U_x)\cdots a_n^{\alpha_n}(U_x)} < C+\varepsilon,$$

于是

$$\frac{\mu(U_x)}{a_1^{|\alpha|}(U_x)} = \frac{\mu(U_x)}{a_1^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}(U_x)} \leqslant \frac{\mu(U_x)}{a_1^{\alpha_1}(U_x)a_2^{\alpha_2}(U_x)\cdots a_n^{\alpha_n}(U_x)} < C+\varepsilon,$$

从而 $\mu(U_x) < (C+\varepsilon)a_1^{|\alpha|}(U_x)$，令 $E_\delta = \{x \in E: \mu(U_x) < (C+\varepsilon)a_1^{|\alpha|}(U_x), \forall\ 0 < a_1(U_x) < 2\delta\}$，当 $\delta$ 趋于 0 时，$E_\delta$ 越来越大趋于 $E$，设 $\{U_i\}$ 是 $E$ 的 $\delta$-椭球覆盖，因而也是 $E_\delta$ 的 $\delta$-椭球覆盖，$\forall\ x \in E_\delta \cap U_i$，令 $U_x$ 是包含 $x$ 的 $n$ 个主轴长度分别为 $2|U_i| = a_n(U_x) = \cdots = a_1(U_x)$ 的椭球，则 $U_i \subset U_x$ 且 $a_1(U_x) = 2|U_i| < 2\delta$，由 $E_\delta$ 的定义知，

$$\mu(U_i) \leqslant \mu(U_x) \leqslant Ca_1^{|\alpha|}(U_x) = C(2|U_i|)^{|\alpha|} = C2^{|\alpha|}|U_i|^{|\alpha|} \leqslant C(2\sqrt{n})^{|\alpha|}a_1^{|\alpha|}(U_i).$$

于是

$$\mu(E_\delta) \leqslant \sum_i \{\mu(U_i): U_i \cap E_\delta \neq \varnothing\} \leqslant C(2\sqrt{n})^{|\alpha|}\sum_i a_1^{|\alpha|}(U_i)$$
$$= C(2\sqrt{n})^{|\alpha|}\sum_i a_1^{|\alpha|}(U_i)\cdot a_2^0(U_i)\cdots a_n^0(U_i).$$

考虑 $E$ 的所有 $\delta$-椭球覆盖 $\{U_i\}$ 有

$$\mu(E_\delta) \leqslant C(2\sqrt{n})^{|\alpha|}\inf\Big\{\sum_i a_1^{|\alpha|}(U_i)a_2^0(U_i)\cdots a_n^0(U_i); E \subset \bigcup_i U_i, U_i \in M, |U_i| < \delta\Big\}$$
$$= C(2\sqrt{n})^{|\alpha|}\xi_\delta^{P_1(|\alpha|)}(E),$$

令 $\delta \to 0, E_\delta \to E, \mu(E) \leqslant C(2\sqrt{n})^{|\alpha|}\xi^{P_1(|\alpha|)}(E)$. 由引理 2 知

$$\frac{\mu(E)}{C(2\sqrt{n})^{|\alpha|}} \leqslant \xi^{P_1(|\alpha|)}(E) \leqslant (\frac{1}{2})^{|\alpha|}\xi^\alpha(E) \Rightarrow \frac{\mu(E)}{C(\sqrt{n})^{|\alpha|}} \leqslant \xi^\alpha(E).$$

(2) 由下极限定义，$\forall\ \delta > 0$ 存在无穷多 $U_x$，$\sqrt{n}\,a_1(U_x) < \delta$，有 $\dfrac{\mu(U_x)}{a_1^{\alpha_1}(U_x)} > C$，因为 $a_1(U_x) \to 0$ 可设 $a_1(U_x) < 1$，而 $|\alpha| > \alpha_1$，所以

$$\frac{\mu(U_x)}{a_1^{|\alpha|}(U_x)} > \frac{\mu(U_x)}{a_1^{\alpha_1}(U_x)} > C,$$

从而 $\mu(U_x) > Ca_1^{|\alpha|}(U_x)$. 令 $B = \{U_x: x \in E, \mu(U_x) > Ca_1^{|\alpha|}(U_x), 0 < \sqrt{n}\,a_1(U_x) < \delta\}$，则 $B$ 是 $E$ 的 Vitali 族，由 Vitali 覆盖定理，存在 $B$ 的两两不相交的子族 $\{V_i\}$（至多可数），使得或者 $\sum_i |V_i|^{|\alpha|} = +\infty$，或者 $H^\alpha(E\setminus \bigcup_i V_i) = 0$，由 $V_i \in B$ 知，$\mu(V_i) > Ca_1^{|\alpha|}(V_i)$ 于是

$$\sum_i |V_i|^{|\alpha|} \leqslant \sum_i (\sqrt{n}\,a_1(V_i))^{|\alpha|} = (\sqrt{n})^{|\alpha|}\sum_i a_1^{|\alpha|}(V_i)$$
$$\leqslant (\sqrt{n})^{|\alpha|}\sum_i \frac{1}{C}\mu(V_i) \leqslant C^{-1}(\sqrt{n})^{|\alpha|}\mu(R^n) < +\infty.$$

故 $\sum_i |V_i|^{|\alpha|} = +\infty$ 不会发生，因此只有 $H^{|\alpha|}(E\setminus \bigcup_i V_i) = 0$，由引理 1 知，$\xi^\alpha(E\setminus \bigcup_i V_i) \leqslant H^{|\alpha|}(E\setminus \bigcup_i V_i) = 0 \Rightarrow \xi^\alpha(E\setminus \bigcup_i V_i) = 0$. 因为 $E$ 是 Borel 集，$\xi^\alpha(\cdot)$ 是正则度量外测度，

$$\xi^\alpha(E) \leqslant \xi^\alpha(E \cap (\bigcup_i V_i)) + \xi^\alpha(E\setminus(\bigcup_i \setminus V_i)) = \xi^\alpha(E \cap (\bigcup_i V_i)),$$

又 $V_i \in B, |V_i| \leqslant \sqrt{n}\,a_1(V_i) < \delta$，

$$\xi_\delta^\alpha(E \cap (\bigcup_i V_i)) \leqslant \sum_i a_1^{\alpha_1}(V_i) a_2^{\alpha_2}(V_i) \cdots a_n^{\alpha_n}(V_i)$$

$$\leqslant \sum_i a_1^{|\alpha|}(V_i) \leqslant \sum_i C^{-1}\mu(V_i) \leqslant C^{-1}\mu(R^n).$$

其中 $a_1(V_i) \geqslant \cdots \geqslant a_n(V_i) > 0$ 是 $V_i$ 的各主轴长，令 $\delta \to 0$，$\xi^\alpha(E) \leqslant \xi^\alpha(E \cap (\bigcup_i (V_i)) \leqslant C^{-1}\mu(R^n)$.

**定理 2**　设 $f: R^n \to R^n$ 是 $r$ 阶 Holder 映射，即存在 $C > 0$ 使得 $\forall\ x, y \in R^n$，$d(f(x), f(y)) \leqslant Cd^r(x, y)$. 则 $\forall\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) \in R^{n+}$，记 $\alpha/r = (\alpha_1/r, \alpha_2/r, \cdots \alpha_n/r)$，有

$$\xi^{\alpha/r}(f(E)) \leqslant (\sqrt{n})^{|\alpha|(1+\frac{1}{r})} C^{|\alpha|/r} 2^{|\alpha|(\frac{1}{r}-1)} \xi^\alpha(E).$$

**证明**　设 $\{U_i\}$ 是 $E$ 的任意 $\delta$ 一椭球覆盖，则 $\{f(U_i \cap E)\}$ 是 $f(E)$ 的一个 $C\delta^r$- 覆盖. 事实上 $\forall\ y = f(x) \in f(E)$，$x \in E \subset \bigcup_i U_i$，存在 $i$ 使得 $x \in U_i$，即 $x \in U_i \cap E \Rightarrow f(x) \in f(U_i \cap E) \Rightarrow f(E) \subset \bigcup_i f(U_i \cap E)$. 令 $V_i = f(U_i \cap E)$，则

$$|V_i| = \sup_{x, y \in U_i \cap E} d(f(x), f(y)) \leqslant \sup_{x, y \in U_i \cap E} Cd^r(x, y) \leqslant C|U_i|^r < C\delta^r.$$

令 $B_i$ 是以 $V_i \cap f(E)$ 中的元素为中心其各主轴的长度为 $2|V_i| = a_1(B_i) = \cdots = a_n(B_i)$ 的椭球，则 $V_i \cap f(E) \subset B_i$，且 $\forall\ 1 \leqslant k \leqslant n$，$a_k(B_i) \leqslant |B_i| \leqslant \sqrt{n}\, a_1(B_i) = 2\sqrt{n}\,|V_i| \leqslant 2\sqrt{n}\,C|U_i|^r < 2\sqrt{n}\,C\delta^r$. 所以 $\{B_i\}$ 是 $f(E)$ 的 $2C\sqrt{n}\,\delta^r$- 椭球覆盖. 于是，

$$\xi^{\alpha/r}_{2\sqrt{n}C\delta^r}(f(E)) \leqslant \sum_i a_1^{\alpha_1/r}(B_i) a_2^{\alpha_2/r}(B_i) \cdots a_n^{\alpha_n/r}(B_i)$$

$$\leqslant \sum_i (2\sqrt{n}\,C|U_i|^r)^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)/r} = (2\sqrt{n}\,C)^{|\alpha|/r} \sum_i |U_i|^{|\alpha|}$$

$$\leqslant (2\sqrt{n}\,C)^{|\alpha|/r} \sum_i (\sqrt{n}\,a_1(U_i))^{|\alpha|}$$

$$= (\sqrt{n})^{|\alpha|(1+\frac{1}{r})} (2C)^{|\alpha|/r} \sum_i a_1^{|\alpha|}(U_i),$$

取下确界得 $\xi^{\alpha/r}_{2\sqrt{n}C\delta^r}(f(E)) \leqslant (\sqrt{n})^{|\alpha|(1+\frac{1}{r})}(2C)^{|\alpha|/r}\xi_\delta^{P_1(|\alpha|)}(E)$，令 $\delta \to 0$，$\xi^{\alpha/r}(f(E)) \leqslant (\sqrt{n})^{|\alpha|(1+\frac{1}{r})}(2C)^{|\alpha|/r}\xi^{P_1(|\alpha|)}(E)$，由引理 2 知，

$$\xi^{\alpha/r}(f(E)) \leqslant (\sqrt{n})^{|\alpha|(1+\frac{1}{r})}(2C)^{|\alpha|/r}(\frac{1}{2})^{|\alpha|}\xi^\alpha(E) = (\sqrt{n})^{|\alpha|(1+\frac{1}{r})} 2^{|\alpha|(\frac{1}{r}-1)} C^{|\alpha|/r} \xi^\alpha(E).$$

**定理 3**　设 $E$ 是 $R^n$ 的紧子集，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) \in R^{n+}$，记 $|\alpha|_1 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\alpha_i\}$ 如果存在一个质量集中在 $E$ 上的概率测度 $\mu$ 使得对 $R^n$ 中满足 $|B| < \delta_0 (\delta_0 > 0)$ 的球 $B$ 成立 $\mu(B) \leqslant A|B|^{n|\alpha|_1}$ 其中 $A$ 是常数，则 $\xi^\alpha(E) > 0$.

**证明**　$\forall\ \delta > 0$，设 $\{U_i\}$ 是 $E$ 的 $\delta$- 椭球覆盖，$a_1(U_i) \geqslant a_2(U_i) \geqslant \cdots \geqslant a_n(U_i) > 0$ 是其 $n$ 个主轴长，对每个 $U_i$ 存在一个球心在 $U_i$ 半径为 $|U_i|$ 的球 $B_i$，使得 $B_i \supset U_i$，当 $\delta$ 充分小时，有 $|B_i| = 2|U_i| < 2\delta < \delta$ 且 $\forall\ 1 \leqslant k \leqslant n$，$a_k(U_i) \leqslant |U_i| < \delta < 1$，由引理 3 知

$$\sum_i a_1^{\alpha_1}(U_i) a_2^{\alpha_2}(U_i) \cdots a_n^{\alpha_n}(U_i) \geqslant \sum_i (a_1(U_i) \cdot a_2(U_i) \cdots a_n(U_i))^{|\alpha|_1}$$

$$= \sum_i \{[a_1(U_i) \cdots a_n(U_i)]^{\frac{1}{n}}\}^{n|\alpha|_1}$$

$$\geqslant \sum_i \{[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{a_k(U_i)})]^{-1}\}^{n|\alpha|_1}$$

$$\geqslant \sum_i \{[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|U_i|}]^{-1}\}^{n|\alpha|_1}$$

$$= \sum_i |U_i|^{n|\alpha|_1} = \sum_i (\frac{1}{2}|B_i|)^{n|\alpha|_1}$$

$$\geqslant 2^{-n|\alpha|_1}A^{-1}\sum_i \mu(B_i) \geqslant A^{-1}2^{-n|\alpha|_1}\mu(E) > 0.$$

取下确界得 $\xi^{\alpha}_{\delta}(E) \geqslant A^{-1}2^{-n|\alpha|_1}\mu(E)$. 令 $\delta \to 0$ 有 $\xi^{\alpha}(E) \geqslant A^{-1}2^{-n|\alpha|_1}\mu(E) > 0$.

作者对文志雄教授的悉心指导表示衷心地感谢.

## 参考文献:

[1] FALCORNER K J. *Fractal Geometry-Mathematical Foundations and Applications* [M]. Johnwiley & Sons, 1990, 43—96.

[2] FALCORNER K J. *Tke Geometry of Fractal Sets* [M]. London Cambridge Uviversity Press, 1985.

[3] 文志英,等. 分形几何理论与应用 [M]. 杭州:浙江科学技术出版社, 1998, 36—41.
WEN Zhi-ying, et al. *Theory and Applications of Fractal Geometry* [M]. Hangzhou: Zhejiang Science & Technology Press, 1998, 36—41. (in Chinese)

[4] 樊恽,等. 代数学辞典 [M]. 武汉:华中师范大学出版社, 1994, 609—612.
FAN Yun, et al. *Algebra Dictionary* [M]. Wuhan: Central China Normal University Press, 1994, 609—612. (in Chinese)

[5] 彭岳建. 多重分形测度及其密度性质 [J]. 湖南大学学报, 1995, **22**(3): 11—16.
PENG Yue-jian. *The density of fractal sets under a multifractal measure* [J]. Hunan Daxue Xuebao, 1995, **22**(3): 11—16.

# Property of Hausdorff Type of Measure

YANG Yun

(Dept. of Math., Hubei Education College, Wuhan 430060, China)

**Abstract**: In this paper, we study the properties of Hausdorff type measure $\xi^{\alpha}(\cdot)$ and its relation with Hausdorff measures. Some sufficient conditions of $0 < \xi^{\alpha}(E) < \infty$ are obtained.

**Key words**: Hausdorff type of measure; dimension print.