第24卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 24 No. 2
2004年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 2004

一类φ-强增生型变分包含问题解的存在性与迭代逼近*

曾六川
(上海师范大学数学系，上海 200234)

摘　要：本文研究Banach空间中一类新的φ-强增生型变分包含问题. 在实的自反的光滑Banach空间中，证明了这类变分包含问题解的存在唯一性及其带误差的Ishikawa迭代程序的收敛性. 本文结果是张石生教授等人的早期与最近的结果的改进与推广.

关键词：变分包含；增生映象；φ-强增生映象；带误差的Ishikawa迭代序列.
分类号：AMS(2000) 49J30, 47H06/CLC number: O177.91
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2004)02-0297-08

1　引言和预备知识

设X是一实Banach空间，X^*是其对偶空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$表$X$与$X^*$间的对偶对，$D(T)$，$R(T)$分别表映象$T$的定义域和值域.

设$T,A:X\to X$，$g:X\to X^*$是三个映象，$\varphi:X^*\to R\cup\{+\infty\}$为真凸的下半连续泛函. 1999年，张石生教授[1]引入与研究了下列Banach空间中的变分包含问题$V_{VIP}(T,A,g,\varphi)$：对给定的$f\in X$，求$u\in X$使得

$$\begin{cases} g(u)\in D(\partial\varphi), \\ \langle Tu-Au-f,v-g(u)\rangle\geqslant\varphi(g(u))-\varphi(v), \quad \forall\, v\in X^*, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$\partial\varphi$表φ的次微分. 在[1，定理2.1]中，他在X是实的一致光滑Banach空间的框架下，建立并证明了变分包含问题(1.1)解的存在唯一性及其Ishikawa迭代序列的收敛性. 进一步，张生石教授等人[2,定理3.1]仍在实的一致光滑Banach空间的框架下，把[1，定理2.1]从强增生映象推广到了φ-强增生映象的情况.

注1.1　当X是实的Hilbert空间H时，则问题(1.1)等价于如下问题：对给定的$f\in H$，求$u\in H$，使得

$$\begin{cases} g(u)\in D(\partial\varphi), \\ \langle Tu-Au-f,v-g(u)\rangle\geqslant\varphi(g(u))-\varphi(v), \quad \forall\, v\in H. \end{cases} \tag{1.2}$$

* 收稿日期：2001-06-26
基金项目：高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金、上海市曙光计划基金、上海市教委重点学科经费(部分)资助项目.
作者简介：曾六川(1965-)，博士，教授，博士生导师.

(1.2)称为Hilbert空间中的变分包含问题，它曾在Ding[3,4]，Chang[5]，Kazmi[6]及Zeng[7]中研究过.易见，通过适当地选择算子T,A,g及点f与泛函φ，若干熟知的变分不等式类问题，如，在Noor[8,9]，Siddiqi-Ansari[10]，及Zeng[11]中研究过的变分不等式类，都可得到. 最近，张石生教授[5]把问题(1.1)推广到了Banach空间中集值变分包含问题的情况，并在一致光滑Banach空间的框架下，给出了这类集值变分包含问题解的存在唯一性及其Ishikawa迭代程序的收敛性定理.本文受张石生教授[1,2,5]的启发，引入和研究下列Banach空间中变分包含问题：

设$T,A:X\to X,N(\cdot,\cdot):X\times X\to X,g:X\to X^*$是四个映象，$\varphi:X^*\to R\cup\{+\infty\}$为真凸的下半连续泛函.对给定的$f\in X$，求$u\in X$使得

$$\begin{cases}g(u)\in D(\partial\varphi),\\ \langle N(Tu,Au)-f,v-g(u)\rangle\geqslant\varphi(g(u))-\varphi(v),\quad\forall\, v\in X^*,\end{cases}\tag{1.3}$$

其中$\partial\varphi$表φ的次微分.

易见，当$N(x,y)=x-y,\forall\, x,y\in X$时，问题(1.3)化为问题(1.1).

本文在实的自反的光滑Banach空间的框架下，研究变分包含问题(1.3)解的存在唯一性及其带误差的Ishikawa迭代程序[12]的收敛性.所得结果改进和推广了已有的相应结果[1-11].

下面，我们回顾一些预备知识.

设X是一实*Banach*空间.X称为一致光滑的，若其光滑模$\rho_X(\tau)$：

$\rho_X(\tau)=\sup\{(\|x+y\|+\|x-y\|)/2-1:x,y\in X,\|x\|=1,\|y\|\leqslant\tau\},\quad\tau>0,$

满足条件：$\rho_X(\tau)/\tau\to 0(\tau\to 0)$.映象$J:X\to 2^{X^*}$称为正规对偶映象，如果

$$J(x)=\{f\in X^*:\langle x,f\rangle=\|x\|\cdot\|f\|,\|f\|=\|x\|\},\quad x\in X.$$

在后面，我们将用到下列定义与结论.

命题1.1[5] 设X是一实Banach空间，则

1) X是光滑的$\Leftrightarrow J$是单值的$\Leftrightarrow J$是强-弱*连续的；

2) X是一致光滑的，则X是光滑的自反Banach空间，而且J是单值的并在X的任一有界集上是一致连续的.

定义1.1 设$A:D(A)\subset X\to X$是一映象，且$\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$是严格增加函数，$\varphi(0)=0$.(1)映象$A$称为增生的，如果对任给的$x,y\in D(A)$，存在$j(x-y)\in J(x-y)$使得$\langle Ax-Ay,j(x-y)\rangle\geqslant 0$.(2)映象$A$称为$\varphi$-强增生的，如果对任给的$x,y\in D(T)$，存在$j(x-y)\in J(x-y)$使得

$$\langle Ax-Ay,j(x-y)\rangle\geqslant\varphi(\|x-y\|)\|x-y\|.$$

特别地，当$\varphi(t)=kt,k\in(0,1)$时，A称为k-强增生映象.(3)映象A称为m-增生的，如果A是增生的，且$(I+rA)(D(A))=X,\forall\, r>0$，其中$I$是恒等映象.

定义1.2[5] 设$T,A:X\to X,N(\cdot,\cdot):X\times X\to X$是三个映象，且$\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$是严格增加函数，$\varphi(0)=0$.(1)映象$x\mapsto N(x,y)$称为关于映象$T$是$\varphi$-强增生的，如果对任给的$x_1,x_2\in X$，存在$j(x_1-x_2)\in J(x_1-x_2)$使得

$$\langle N(Tx_1,y)-N(Tx_2,y),j(x_1-x_2)\rangle\geqslant\varphi(\|x_1-x_2\|)\|x_1-x_2\|,\quad\forall\, y\in X.$$

(2)映象$y\mapsto N(x,y)$称为关于映象A是增生的，如果对任给的$y_1,y_2\in X$，存在$j(y_1-y_2)\in J(y_1-y_2)$使得$\langle N(x,Ay_1)-N(x,Ay_2),j(y_1-y_2)\rangle\geqslant 0,\forall\, x\in X$.

定义1.3 设$T,A:X\to X,N(\cdot,\cdot):X\times X\to X$是三个映象.(1)映象$x\mapsto N(x,y)$称

为关于映象 T 是 μ-Lipschitz 连续的，如果存在常数 $\mu > 0$ 使得，对任给的 $x_1, x_2 \in X$ 有 $\| N(Tx_1, y) - N(Tx_2, y) \| \leqslant \mu \| x_1 - x_2 \| \ \forall\, y \in X$. (2) 映象 $y \mapsto N(x, y)$ 称为关于映象 A 是 ξ-Lipschitz 连续的，如果存在常数 $\xi > 0$ 使得，对任给的 $y_1, y_2 \in X$，有

$$\| N(x, Ay_1) - N(x, Ay_2) \| \leqslant \xi \| y_1 - y_2 \|, \quad \forall\, x \in X.$$

命题 1.2 设 X 是一实的光滑 Banach 空间，$T, A: X \to X, N(\cdot, \cdot): X \times X \to X$ 是三个映象. 定义映象 $F: X \to X$ 为 $Fx = N(Tx, Ax), \forall\, x \in X$. 如果映象 $x \mapsto N(x, y)$ 关于映象 T 是 φ-强增生的，映象 $y \mapsto N(x, y)$ 关于映象 A 是增生的，则映象 F 是 φ-强增生的.

证明 因 X 是光滑的，由命题 1.1 知正规对偶映象 $J: X \to 2^{X^*}$ 是单值的，于是对任意的 $x, y \in X$ 有

$$\begin{aligned} &\langle \{N(Tx, Ax) - N(Ty, Ay), J(x - y)\rangle \\ &= \langle N(Tx, Ax) - N(Ty, Ax), J(x - y)\rangle + \langle N(Ty, Ax) - N(Ty, Ay), J(x - y)\rangle \\ &\geqslant \varphi(\| x - y \|) \| x - y \|. \end{aligned}$$

结论得证.

命题 1.3[2] 设 X 是一实的光滑 Banach 空间，$T_1: X \to X$ 是 φ-强增生映象，其强增生函数为 φ. 设 $T_2: X \to X$ 是一个增生映象，则 $T_1 + T_2: X \to X$ 也是具有强增生函数 φ 的 φ-强增生映象.

引理 1.1[1] 设 X 是一实 Banach 空间，则对任意的 $x, y \in X$，下列不等式成立：

$$\| x + y \|^2 \leqslant \| x \|^2 + 2\langle y, j(x + y)\rangle, \quad \forall\, j(x + y) \in J(x + y).$$

引理 1.2[13] 设 X 是任意实 Banach 空间，且 $T: X \to X$ 是连续的 φ-强增生算子，则对任给的 $f \in X$，方程 $Tx = f$ 有唯一解.

引理 1.3 设 X 是一实的自反 Banach 空间，则下列结论等价：

(i) $x^* \in X$ 是变分包含问题(1.3)的解；

(ii) $x^* \in X$ 是映象 $S: X \to 2^X: S(x) = f - (N(Tx, Ax) + \partial\varphi(g(x))) + x$ 的不动点；

(iii) $x^* \in X$ 是方程 $f \in N(Tx, Ax) + \partial\varphi(g(x))$ 的解.

证明 (i)$\Rightarrow$(iii). 设 $x^* \in X$ 是变分包含问题(1.3)的解，故 $g(x^*) \in D(\partial\varphi)$ 且

$$\langle N(Tx^*, Ax^*) - f, v - g(x^*)\rangle \geqslant \varphi(g(x^*)) - \varphi(v), \quad \forall\, v \in X^*.$$

于是，由 φ 的次微分 $\partial\varphi$ 的定义，据上式得知 $f - N(Tx^*, Ax^*) \in \partial\varphi(g(x^*))$，即 x^* 是方程 $f \in N(Tx, Ax) + \partial\varphi(g(x))$ 的解.

(iii)$\Rightarrow$(ii). 设(iii)真. 则有 $x^* \in f - (N(Tx^*, Ax^*) + \partial\varphi((x^*))) + x^* = Sx^*$. 即(ii)真.

(ii)$\Rightarrow$(i). 设(ii)真. 则有 $f - N(Tx^*, Ax^*) \in \partial\varphi(g(x^*)$. 故由 $\partial\varphi$ 的定义得知

$$\varphi(v) - \varphi(g(x^*)) \geqslant \langle f - N(Tx^*, Ax^*), v - g(x^*)\rangle, \quad \forall\, v \in X^*.$$

由此即知，x^* 是变分包含问题(1.3)的解.

2 主要结果

定理 2.1 设 X 是实的自反的光滑 Banach 空间，$T, A: X \to X, N(\cdot, \cdot): X \times X \to X, g: X \to X^*$ 是四个连续的映象，$\varphi: X^* \to R \cup \{+\infty\}$ 是具有连续的 Gateaux 微分 $\partial\varphi$ 的泛函，且满足下面的条件：

(i) 映象 $x \mapsto N(x,y)$ 关于映象 T 是 φ- 强增生的，映象 $y \mapsto N(x,y)$ 关于映象 A 是增生的；

(ii) 映象 $x \mapsto N(x,y)$ 关于映象 T 是 μ-Lipschitz 连续的，映象 $y \mapsto N(x,y)$ 关于映象 A 是 ξ-Lipschitz 连续的；

(iii) $\partial\varphi \circ g: X \to X$ 是一致连续的增生映象.

设 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的序列，$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$，$\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 X 中的序列，满足下面条件：

(iv) $\alpha_n \to 0$，$\beta_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

(v) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$；

(vi) $\| u_n \| = o(\alpha_n)$，$\| v_n \| \to 0 (n \to \infty)$.

对任给的 $f \in X$，定义映象 $S: X \to X$ 如下：$Sx = f - N(Tx, Ax) - \partial\varphi(g(x)) + x, \forall\, x \in X$.

对任给的 $x_0 \in X$，由下列带误差的 Ishikawa 迭代程序定义序列 $\{x_n\}$：

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n S y_n + u_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n S x_n + v_n, \quad n \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

则序列 $\{x_n\}$ 强收敛到变分包含(1.3)的唯一解的充要条件是，序列 $\{x_n\}$，$\{\partial\varphi(g(x_n))\}$ 都有界.

证明 易见，定理结论的必要性成立. 下面，分两步来证明定理结论的充分性也成立.

(1) 先证变分包含(1.3)存在唯一解. 因 X 是自反的光滑 Banach 空间，由命题 1.1，正规对偶映象 J 是单值的. 由条件(i)－(iii)及命题 1.2－1.3，$N(T(\cdot), A(\cdot)) + (\partial\varphi \circ g)(\cdot): X \to X$ 是具有强增生函数 φ 的 φ- 强增生的一致连续映象. 于是由引理 1.2 知，对任给的 $f \in X$，方程 $f = N(Tx, Ax) + \partial\varphi(g(x))$ 在 X 中有唯一解 x^*. 由于 X 是自反的，故由引理 1.3 知，x^* 是变分包含(1.3)的唯一解，且 x^* 也是映象 S 的唯一不动点.

(2) 今证带误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 x^*.

由假设 $\{x_n\}$，$\{\partial\varphi(g(x_n))\}$ 都有界，我们断言 $\{\partial\varphi(g(y_n))\}$ 有界. 事实上，由条件(ii)得

$$\begin{aligned} \| y_n - x_n \| &= \| \beta_n (S x_n - x_n) + v_n \| \\ &\leqslant \beta_n \| S x_n - S x^* \| + \beta_n \| x_n - x^* \| + \| v_n \| \\ &\leqslant \beta_n \| N(T x_n, A x_n) - x_n - N(T x^*, A x^*) + x^* \| + \\ &\quad\ \beta_n \| \partial\varphi(g(x_n)) - \partial\varphi(g(x^*)) \| + \beta_n \| x_n - x^* \| + \| v_n \| \\ &\leqslant \beta_n \| N(T x_n, A x_n) - N(T x^*, A x_n) \| + \beta_n \| N(T x^*, A x_n) - N(T x^*, A x^*) \| + \\ &\quad\ \beta_n \| \partial\varphi(g(x_n)) - \partial\varphi(g(x^*)) \| + 2\beta_n \| x_n - x^* \| + \| v_n \| \\ &\leqslant \beta_n (\mu + \xi + 2) \| x_n - x^* \| + \beta_n \| \partial\varphi(g(x_n)) - \partial\varphi(g(x^*)) \| + \| v_n \|. \end{aligned}$$

所以，由条件(iv)，(vi)推得 $\| y_n - x_n \| \to 0 (n \to \infty)$. 由于 $\partial\varphi \circ g: X \to X$ 是一致连续的，故 $\| \partial\varphi(g(y_n)) - \partial\varphi(g(x_n)) \| \to 0 (n \to \infty)$. 注意到

$$\| \partial\varphi(g(y_n)) \| \leqslant \| \partial\varphi(g(y_n)) - \partial\varphi(g(x_n)) \| + \| \partial\varphi(g(x_n)) \|.$$

即知，序列 $\{\partial\varphi(g(y_n))\}$ 有界.

因为序列 $\{u_n\}$，$\{x_n\}$，$\{\partial\varphi(g(x_n))\}$，$\{\partial\varphi(g(y_n))\}$ 均有界，所以，存在常数 $M>0$ 使得

$$\| u_n \| \leqslant M, \ \| x_n - x^* \| \leqslant M, \ \| \partial\varphi(g(x_n)) - \partial\varphi(g(x^*)) \| \leqslant M,$$

$$\| \partial\varphi(g(y_n)) - \partial\varphi(g(x^*)) \| \leqslant M,$$

对一切 $n\geqslant 0$.

由于 $N(T(\cdot),A(\cdot))+(\partial\varphi\circ g)(\cdot):X\to X$ 是 φ-强增生映象，故对任给的 $x,y\in X$，有

$$
\begin{aligned}
&\langle Sx-Sy,J(x-y)\rangle\\
&=-\langle N(Tx,Ax)+\partial\varphi(g(x))-N(Ty,Ay)-\partial\varphi(g(y)),J(x-y)\rangle+\\
&\quad\langle x-y,J(x-y)\rangle\\
&\leqslant\|x-y\|^2-\varphi(\|x-y\|)\|x-y\|.
\end{aligned}\tag{2.2}
$$

利用引理 1.1 与(2.1)，可得

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2&=\|(1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(Sy_n-Sx^*)+u_n\|^2\\
&\leqslant\|(1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(Sy_n-Sx^*)\|^2+2\langle u_n,J(x_{n+1}-x^*)\rangle\\
&\leqslant\|(1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(Sy_n-Sx^*)\|^2+2M\|u_n\|.
\end{aligned}\tag{2.3}
$$

又利用引理 1.1 与(2.1)，(2.2)，可得

$$
\begin{aligned}
&\|(1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(Sy_n-Sx^*)\|^2\\
&\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle Sy_n-Sx^*,J(x_{n+1}-x^*-u_n)\rangle\\
&\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle Sy_n-S(x_{n+1}-u_n),J(x_{n+1}-x^*-u_n)\rangle+\\
&\quad 2\alpha_n\langle S(x_{n+1}-u_n)-Sx^*,J(x_{n+1}-u_n-x^*)\rangle\\
&\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\|Sy_n-S(x_{n+1}-u_n)\|\,\|x_{n+1}-x^*-u_n\|+\\
&\quad 2\alpha_n\|x_{n+1}-u_n-x^*\|^2-2\alpha_n\varphi(\|x_{n+1}-u_n-x^*\|)\|x_{n+1}-u_n-x^*\|\\
&\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+4M\alpha_n\|Sy_n-S(x_{n+1}-u_n)\|+\\
&\quad 2\alpha_n\|x_{n+1}-u_n-x^*\|^2-2\alpha_n\varphi(\|x_{n+1}-u_n-x^*\|)\|x_{n+1}-u_n-x^*\|.
\end{aligned}\tag{2.4}
$$

观察到，

$$
\begin{aligned}
&\|y_n-(x_{n+1}-u_n)\|\leqslant\|y_n-x_n\|+\|x_{n+1}-u_n-x_n\|\\
&\leqslant\|y_n-x_n\|+\|\alpha_n(Sy_n-x_n)\|\\
&\leqslant\|y_n-x_n\|+\alpha_n\|Sy_n-Sx_n\|+\alpha_n\|Sx_n-x_n\|\\
&\leqslant\|y_n-x_n\|+\alpha_n\|Sy_n-Sx_n\|+\\
&\quad\alpha_n\|Sx_n-Sx^*\|+\alpha_n\|x_n-x^*\|\\
&\leqslant\|y_n-x_n\|+\alpha_n\|N(Ty_n,Ay_n)-N(Tx_n,Ax_n)\|+\\
&\quad\alpha_n\|\partial\varphi(g(y_n))-\partial\varphi(g(x_n))\|+\alpha_n\|y_n-x_n\|+\\
&\quad\alpha_n\|N(Tx_n,Ax_n)-N(Tx^*,Ax^*)\|+\\
&\quad\alpha_n\|\partial\varphi(g(x_n))-\partial\varphi(g(x^*))\|+2\alpha_n\|x_n-x^*\|\\
&\leqslant(1+\alpha_n(\mu+\xi+1))\|y_n-x_n\|+\alpha_n\|\partial\varphi(g(y_n))-\partial\varphi(g(x_n))\|+\\
&\quad\alpha_n(\mu+\xi+2)\|x_n-x^*\|+\alpha_n\|\partial\varphi(g(x_n))-\partial\varphi(g(x^*))\|\\
&\leqslant(1+\alpha_n(\mu+\xi+1))\|y_n-x_n\|+\alpha_n\|\partial\varphi(g(y_n))-\partial\varphi(g(x_n))\|+\\
&\quad(\mu+\xi+3)M\alpha_n.
\end{aligned}
$$

因 $\|y_n-x_n\|\to 0$，$\|\partial\varphi(g(y_n))-\partial\varphi(g(x_n))\|\to 0$，$\alpha_n\to 0(n\to\infty)$，故 $\|y_n-(x_{n+1}-u_n)\|\to 0(n\to\infty)$. 从而，

$$
\|\partial\varphi(g(y_n))-\partial\varphi(g(x_{n+1}-u_n))\|\to 0(n\to\infty).\tag{2.5}
$$

据(2.4)即得

$$\| x_{n+1} - u_n - x^* \|^2 \leqslant \frac{(1-\alpha_n)^2}{1-2\alpha_n} \| x_n - x^* \|^2 + \frac{4M\alpha_n \| Sy_n - S(x_{n+1} - u_n) \|}{1-2\alpha_n} -$$

$$\frac{2\alpha_n}{1-2\alpha_n} \varphi(\| x_{n+1} - u_n - x^* \|) \| x_{n+1} - u_n - x^* \|$$

$$\leqslant \| x_n - x^* \|^2 + \frac{2\alpha_n}{1-2\alpha_n} (\frac{M^2\alpha_n}{2} + 2M \| Sy_n - S(x_{n+1} - u_n) \|) -$$

$$\frac{2\alpha_n}{1-2\alpha_n} \varphi(\| x_{n+1} - u_n - x^* \|) \| x_{n+1} - u_n - x^* \|. \qquad (2.6)$$

把(2.6)带入(2.3)即得

$$\| x_{n+1} - x^* \|^2 \leqslant \| x_n - x^* \|^2 + \frac{2\alpha_n}{1-2\alpha_n} (\frac{M^2\alpha_n}{2} + 2M \| Sy_n - S(x_{n+1} - u_n) \|) -$$

$$\frac{2\alpha_n}{1-2\alpha_n} \varphi(\| x_{n+1} - u_n - x^* \|) \| x_{n+1} - u_n - x^* \| + 2M \| u_n \| \qquad (2.7)$$

由于 $\| u_n \| = o(\alpha_n)$，故可设 $\| u_n \| = \varepsilon_n \alpha_n$，其中，$\varepsilon_n \to 0 (n \to \infty)$.

下面，我们考虑两种可能情形.

情形(1) $\inf\limits_{n \geqslant 0} \{ \| x_{n+1} - u_n - x^* \| \} = \delta > 0$.

由于 $M^2\alpha_n + 4M \| Sy_n - S(x_{n+1} - u_n) \| + 2M\varepsilon_n(1-2\alpha_n) \to 0 (n \to \infty)$，故存在某自然数 N 使得，对一切 $n \geqslant N$，有

$$M^2\alpha_n + 4M \| Sy_n - S(x_{n+1} - u_n) \| + 2M\varepsilon_n(1-2\alpha_n) < \varphi(\delta)\delta. \qquad (2.8)$$

于是，由(2.7)，(2.8)得

$$\| x_{n+1} - x^* \|^2 \leqslant \| x_n - x^* \|^2 + \frac{\alpha_n}{1-2\alpha_n} \varphi(\delta)\delta - \frac{2\alpha_n}{1-2\alpha_n} \varphi(\delta)\delta$$

$$\leqslant \| x_n - x^* \|^2 - \frac{\alpha_n}{1-2\alpha_n} \varphi(\delta)\delta. \qquad (2.9)$$

据(2.9)推得 $\varphi(\delta)\delta \sum\limits_{n=N}^{\infty} \alpha_n \leqslant \| x_N - x^* \|^2 < \infty$，与假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ 相悖. 因此，情形(1)不真.

情形(2) $\inf\limits_{n \geqslant 0} \{ \| x_{n+1} - u_n - x^* \| \} = 0$.

在此种情形，必存在子列 $\{ x_{n_j+1} \}$ 使得 $x_{n_j+1} \to x^* (j \to \infty)$. 所以，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在某自然数 n_j 使得，对一切 $n \geqslant n_j$，有

$$\| x_{n_j+1} - x^* \| < \varepsilon,$$

$$M^2\alpha_n + 4M \| Sy_n - S(x_{n+1} - u_n) \| + 2M\varepsilon_n(1-2\alpha_n) < \varphi(\frac{\varepsilon}{2}) \frac{\varepsilon}{2}, \quad \| u_n \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

下面，我们证明 $\| x_{n_j+m} - x^* \| < \varepsilon, \forall\, m \geqslant 1$.

先证 $\| x_{n_j+2} - x^* \| < \varepsilon$. 如果不真，则 $\| x_{n_j+2} - x^* \| \geqslant \varepsilon$. 于是，

$$\| x_{n_j+2} - u_{n_j+1} - x^* \| \geqslant \| x_{n_j+2} - x^* \| - \| u_{n_j+1} \| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

因而，$\varphi(\| x_{n_j+2} - u_{n_j+1} - x^* \|) \geqslant \varphi(\frac{\varepsilon}{2})$. 又由(2.8)得

$$\| x_{n_j+2} - x^* \|^2 \leqslant \| x_{n_j+1} - x^* \|^2 - \frac{\alpha_{n_j+1}}{1-2\alpha_{n_j+1}} \varphi(\frac{\varepsilon}{2}) \frac{\varepsilon}{2} < \| x_{n_j+1} - x^* \|^2.$$

于是推得 $\varepsilon^2<\varepsilon^2$. 此矛盾表明 $\| x_{n_j+2}-x^* \|<\varepsilon$. 利用归纳法,可证 $\| x_{n_j+m}-x^* \|<\varepsilon, \forall\, m\geqslant 1$. 从而,$x_n\to x^*(n\to\infty)$. 这就结束了定理 2.1 的证明.

注 2.1 定理 2.1 在以下方面改进与推广了张石生教授[1, 定理 2.1], [2, 定理 3.1]: (1) 用 X 的自反性与光滑性取代了 X 的一致光滑性; (2) 用更一般的映象 $N(T(\cdot),A(\cdot)):X\to X$ 取代了映象 $T-A:X\to X$,从而,本文研究的 Banach 空间中的变分包含比其文[1,2]中研究的变分包含更一般; (3) 用序列 $\{x_n\},\{\partial\varphi(g(x_n))\}$ 的有界性取代了张的定理中值域 $R(S)$ 的有界性,其中,$Sx=f-(T-A+\partial\varphi\circ g)(x)+x$; (4) 建立了带误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 逼近变分包含解的充要条件.

推论 2.2 设 X 是实的 Banach 空间, $T,A:X\to X,N(\cdot,\cdot):X\times X\to X,g:X\to X^*$ 是四个连续的映象,且满足下面的条件:

(i) 映象 $x\mapsto N(x,y)$ 关于映象 T 是 φ-强增生的,映象 $y\mapsto N(x,y)$ 关于映象 A 是增生的;

(ii) 映象 $x\mapsto N(x,y)$ 关于映象 T 是 μ-Lipschitz 连续的,映象 $y\mapsto N(x,y)$ 关于映象 A 是 ξ-Lipschitz 连续的.

设 $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的序列, $\{u_n\}_{n=0}^{\infty},\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 X 中的序列,满足下面条件:

(iii) $\alpha_n\to 0,\beta_n\to 0(n\to\infty)$;

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;

(v) $\| u_n \|=o(\alpha_n),\| v_n \|\to 0(n\to\infty)$.

对任给的 $f\in X$,定义映象 $S:X\to X$ 如下: $Sx=f-N(Tx,Ax)+x,\forall\, x\in X$. 对任给的 $x_0\in X$,由下列带误差的 Ishikawa 迭代程序定义序列 $\{x_n\}$:

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Sy_n+u_n,\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Sx_n+v_n,\quad n\geqslant 0.\end{cases}$$

则序列 $\{x_n\}$ 强收敛到变分不等式 $\langle N(Tx,Ax)-f,v-g(x)\rangle\geqslant 0(\forall\, v\in X)$ 的唯一解的充要条件是序列 $\{x_n\}$ 有界.

参考文献:

[1] 张石生. Banach 空间中增生型变分包含解的 Mann 和 Ishikawa 迭代逼近[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(6): 551−558.
ZHANG Shi-sheng. *On the Mann and Ishikawa iterative approximation of solutions to variational inclusions with accretive type mappings in Banach spaces* [J]. Appl. Math. Mech., 1999, **20**(6): 551−558. (in Chinese)

[2] 张石生,等. Banach 空间中 φ-强增生型变分包含问题解的 Ishikawa 迭代逼近 [J]. 应用数学, 2000, **13**(2): 1−8.
ZHANG Shi-sheng, et al. *On the Ishikawa iterative approximation of solutions to variational inclusion problems with φ-strongly accretive type mappings in Banach spaces* [J]. Mathematica Applicata, 2000, **13**(2): 1−8. (in Chinese)

[3] DING Xie-ping. *Perturbed proximal point algorithms for generalized quasivariational inclusions* [J]. J.

Math. Anal. Appl., 1997, **210**(1): 88—101.
[4] DING Xie-ping. *Generalized strongly nonlinear quasivariational inequalities* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1993, **173**(2): 577—587.
[5] CHANG S S. *Set-valued variational inclusions in Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2000, **248**: 438—454.
[6] KAZMI K R. *Mann and Ishikawa type perturbed iterative algorithms for generalized quasi-variational inclusions* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1997, **209**(2): 572—584.
[7] ZENG Lu-chuan. *Iterative algorithms for finding approximate solutions for general strongly nonlinear variational inequalities* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1994, **187**(2): 352—360.
[8] NOOR M A. *General variational inequalities* [J]. Appl. Math. Lett., 1998, **1**(2): 119—122.
[9] NOOR M A. *An iterative algorithm for variational inequalities* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1991, **158**(3): 448—455.
[10] SIDDIQI A H, ANSARI Q H. *General strongly nonlinear variational inequalities* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1992, **166**(2): 386—392.
[11] ZENG Lu-chuan. *Iterative algorithm for finding approximate solutions to completely generalized strongly nonlinear quasi-variational inequality* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1996, **201**: 180—194.
[12] LIU Li-shan. *Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, **194**(1): 114—125.
[13] LIU Ze-qing, KANG S M. *Convergence theorems for φ-strongly accretive and φ-hemicontinuous operators* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2001, **253**: 35—49.

On the Existence and Iterative Approximation of Solutions for a Class of Variational Inclusions with φ-Strongly Accretive Type Mappings

ZENG Lu-chuan
(Dept. of Math., Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: The purpose of this paper is to investigate a new class of variational inclusions with φ-strongly accretive type mappings in a Banach space X. We prove the existence and uniqueness of solutions to this class of variational inclusions and the convergence of the Ishikawa iteration process with errors for approximating solutions. The results in this paper improve and extend the earlier results obtained by S. S. Chang and others.

Key words: variational inclusion; accretive mapping; φ-strongly accretive mapping; Ishikawa iterative sequence with errors.