第24卷第2期
2004年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 24 No. 2
May 2004

套代数的直和算子集及可逆算子*

杨有龙， 高晓光
(西北工业大学电子工程系，陕西 西安 710072)

摘 要：本文研究了套代数的一个直和算子集 $X^{\varphi}_{\mathscr{N}}$，得到套代数的直和分解：$\tau(\mathscr{N})=D_{\mathscr{N}}\oplus X^{\varphi}_{\mathscr{N}}$. 同时讨论了套代数中可逆算子的分布，得出套代数的对角 $D_{\mathscr{N}}$ 关于可逆算子是封闭的. 特别地，当套为可数套时，套代数关于可逆性算子封闭的充要条件为 $\varphi(T)$ 可逆.

关键词：套代数；期望；可逆算子.
分类号：AMS(2000) 47C05,47B25/CLC number：O177.1
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2004)02-0312-05

1 引 言

记作用在可分 Hilbert 空间 H 上的所有有界线性算子为 $B(H)$，如果 $\mathscr{N}$ 是 H 上一个包含 0 和 I 的正交投影簇且 $\{PH:P\in\mathscr{N}\}$ 在包含关系下是一个全序集，则称 $\mathscr{N}$ 是 H 上的套[1-2]. 关于套 $\mathscr{N}$ 的套代数为 $\tau(\mathscr{N})=\{T\in B(H):TP=PTP,\forall\ P\in\mathscr{N}\}$. 套代数的对角代数为 $D_{\mathscr{N}}=\tau(\mathscr{N})\cap\tau(\mathscr{N})^*$. 显然，$D_{\mathscr{N}}$ 是一个 von Neumann 子代数. 从 $B(H)$ 到一个 von Neumann 子代数上的范数为 1 的投影，称为期望[1].

文[3]研究了套代数的直和分解，并且给出了有限套的分解形式 $\tau(\mathscr{N})=D_{\mathscr{N}}\oplus R_{\mathscr{N}}$，以及无限原子套的分解形式 $\tau(\mathscr{N})=D_{\mathscr{N}}\oplus R_{\mathscr{N}}^{\infty}$，其中 $R_{\mathscr{N}}$ 和 $R_{\mathscr{N}}^{\infty}$ 分别表示套的根和强根，文[4]研究了套代数的对角代数与其超因果理想的直和. 虽然作者对非原子套的直和分解也进行了研究，但关于套代数的直和分解问题仍未完全解决. 本文定义了套代数 $\tau(\mathscr{N})$ 的一个算子集 $X_{\mathscr{N}}^{\varphi}$，得到本文的一个重要结果：$\tau(\mathscr{N})=D_{\mathscr{N}}\oplus X_{\mathscr{N}}^{\varphi}$. 其中 φ 是从 $B(H)$ 到套代数对角 $D_{\mathscr{N}}$ 上的一个期望.

定义 1.1 $X^{\varphi}_{\mathscr{N}}=\{T:T\in\tau(\mathscr{N})$ 且 $\varphi(T)=0\}$.

算子代数中的算子分解问题[1,5-8]一直是许多学者感兴趣的研究课题. 算子分解主要讨论可逆算子的分解[5-12]，因此算子代数中可逆算子的分布对算子分解问题的研究起着重要作用. 本文研究了套代数中可逆算子的分布，得到套代数中对角代数关于可逆算子是封闭的. 特

* 收稿日期：2001-07-03
基金项目：国家自然科学基金资助项目重大研究计划(90205019)
作者简介：杨有龙(1967-)，博士研究生，副教授.

别地.当套$\mathcal{N}$为可数套时,套代数$\tau(\mathcal{N})$关于可逆算子封闭的充要条件是$\varphi(T)$可逆,这里$T \in \tau(\mathcal{N})$.文中未加说明的概念和符号请参阅文献[1 — 3]和[8].

2 主要结果

定理 2.1 设φ是从$B(H)$到套代数对角$D_{\mathcal{N}}$上的一个期望,那么

$$\tau(\mathcal{N}) = D_{\mathcal{N}} \oplus X_{\mathcal{N}}^{\varphi}.$$

定理 2.2 若$T \in D_{\mathcal{N}}$是可逆算子,则$T^{-1} \in D_{\mathcal{N}}$.

定理 2.3 若$T \in \tau(\mathcal{N})$是可逆算子,那么$T^{-1} \in \tau(\mathcal{N})$当且仅当$\varphi(T)$可逆.

3 定理 2.1 的证明

引理 3.1 设φ是从$B(H)$到$D_{\mathcal{N}}$上的一个期望,则

$$X_{\mathcal{N}}^{\varphi} = \{T - \varphi(T) : T \in \tau(\mathcal{N})\}.$$

证明 对于任意的算子$T \in \tau(\mathcal{N})$,显然,$T - \varphi(T) \in \tau(\mathcal{N})$.又$\varphi(T - \varphi(T)) = 0$,因此$\{T - \varphi(T) : T \in \tau(\mathcal{N})\} \subseteq X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$.另一方面,若$T \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$,则$\varphi(T) = 0$且$T \in \tau(\mathcal{N})$,所以

$$T = T - \varphi(T) \in \{T - \varphi(T) : T \in \tau(\mathcal{N})\}.$$

故

$$X_{\mathcal{N}}^{\varphi} = \{T - \varphi(T) : T \in \tau(\mathcal{N})\}. \qquad \square$$

引理 3.2 设φ和ψ是从$B(H)$到$D_{\mathcal{N}}$上的两个期望,则$X_{\mathcal{N}}^{\varphi} = X_{\mathcal{N}}^{\psi}$当且仅当对于任意算子$T \in \tau(\mathcal{N})$都有$\varphi(T) = \psi(T)$.

证明 对于任意算子$T \in \tau(\mathcal{N})$,由引理 3.1 知$T - \varphi(T) \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$.又$X_{\mathcal{N}}^{\varphi} = X_{\mathcal{N}}^{\psi}$,从而$T - \varphi(T) \in X_{\mathcal{N}}^{\psi}$.因此$\psi(T - \varphi(T)) = \psi(T) - \psi(\varphi(T)) = \psi(T) - \varphi(T) = 0$.

设$R \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi} \subseteq \tau(\mathcal{N})$,对于任意算子$T \in \tau(\mathcal{N})$,由于$\psi(T) = \varphi(T)$,则

$$\psi(R) = \varphi(R) = 0.$$

从而由引理 3.1 知$R \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi} \subseteq X_{\mathcal{N}}^{\psi}$.同理可证$X_{\mathcal{N}}^{\psi} \subseteq X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$. $\square$

引理 3.3 设φ是从$B(H)$到$D_{\mathcal{N}}$上的一个期望,则下列结论成立:

(1) 若$R_1 \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi}, R_2 \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$,则$R_1 + R_2 \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$.

(2) 若$D \in D_{\mathcal{N}}, R \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$,则$RD, DR \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$.

(3) 如果$R_1, R_2 \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$,那么$R_1R_2 \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$的充要条件是:对任意的算子$T_1, T_2 \in \tau(\mathcal{N})$都有$\varphi(T_1T_2) = \varphi(T_1)\varphi(T_2)$.

证明 (1) — (2) 由期望的性质和$X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$的定义以及[8,性质 8.1]可得.

对(3),设$T_1, T_2 \in \tau(\mathcal{N})$,由引理 3.1 知$T_1 - \varphi(T_1) \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$且$T_2 - \varphi(T_2) \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$.由(1),又$[T_1 - \varphi(T_1)][T_2 - \varphi(T_2)] \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$,从而

$$\begin{aligned}\varphi\{[T_1 - \varphi(T_1)][T_2 - \varphi(T_2)]\} &= \varphi[T_1T_2 - T_1\varphi(T_2) - T_2\varphi(T_1) + \varphi(T_1)\varphi(T_2)] \\ &= \varphi(T_1T_2) - \varphi(T_1)\varphi(T_2) = 0.\end{aligned}$$

设$R_1, R_2 \in X_{\mathcal{N}}^{\varphi}$,由引理 3.1 知,分别存在$T_1, T_2 \in \tau(\mathcal{N})$使得$R_1 = T_1 - \varphi(T_1)$且$R_2 = T_2 -$

$\varphi(T_2)$. 因此

$$\varphi(R_1R_2)=\varphi[T_1T_2-T_1\varphi(T_2)-T_2\varphi(T_1)+\varphi(T_1)\varphi(T_2)]$$
$$=\varphi(T_1T_2)-\varphi(T_1)\varphi(T_2)=0.$$

故 $R_1R_2\in X^{\varphi}_{\mathscr{N}}$. □

定理 2.1 的证明 先证 $\tau(\mathscr{N})=D_{\mathscr{N}}+X^{\varphi}_{\mathscr{N}}$. 一方面,若 $T\in\tau(\mathscr{N})$,则由引理 3.1 可知,

$$T=\varphi(T)+(T-\varphi(T))\in D_{\mathscr{N}}+X^{\varphi}_{\mathscr{N}}.$$

从而 $\tau(\mathscr{N})\subseteq D_{\mathscr{N}}+X^{\varphi}_{\mathscr{N}}$. 另一方面,显然有 $D_{\mathscr{N}}+X^{\varphi}_{\mathscr{N}}\subseteq\tau(\mathscr{N})$.

其次证 $D_{\mathscr{N}}\cap X^{\varphi}_{\mathscr{N}}=0$. 设 $D\in D_{\mathscr{N}}\cap X^{\varphi}_{\mathscr{N}}$,则 $\varphi(D)=D$. 又 $D\in X^{\varphi}_{\mathscr{N}}$,从而 $\varphi(D)=0$. 于是 $D_{\mathscr{N}}\cap X^{\varphi}_{\mathscr{N}}=0$.

由引理 3.3(1) - (2) 可得 $\tau(\mathscr{N})=D_{\mathscr{N}}\oplus X_{\mathscr{N}}{}^{\varphi}$. □

文[2]中关于原子套的直和分解(见下述推论 3.4),完全可以看成是上述定理 2.1 的推论.

推论 3.4[2] 设 $\mathscr{N}$ 是 H 上的原子套,那么 $\tau(\mathscr{N})=D_{\mathscr{N}}\oplus R_{\mathscr{N}}{}^{\infty}$.

证明 由[8,性质 8.13]可得 $R^{\infty}_{\mathscr{N}}\subseteq X^{\varphi}_{\mathscr{N}}$.

设 $R\in X^{\varphi}_{\mathscr{N}}$,由引理 3.1 知,存在算子 $T\in\tau(\mathscr{N})$ 使得 $R=T-\varphi(T)$. 由于套 $\mathscr{N}$ 是原子套,从而 $D_{\mathscr{N}}$ 是一个原子 von Neumann 代数. 由[8,定理 8.6]知,从 $B(H)$ 到 $D_{\mathscr{N}}$ 上的期望是唯一的,并且 $\varphi(T)=\sum\limits_{i\geqslant1}E_iTE_i=\Delta(T)$,其中 $E_i,(i\geqslant1)$ 是套 $\mathscr{N}$ 的原子且 $\sum\limits_{i\geqslant1}E_i=I$. 再由[8,性质 8.1]可得

$$\|E_iTE_i\|=\|E_i(T-\varphi(T))E_i\|=\|E_iTE_i-E_i\varphi(T)E_i\|$$
$$=\|E_iTE_i-\varphi(E_iTE_i)\|=\|E_iTE_i-E_iTE_i\|=0.$$

以上说明 $R\in R^{\infty}_{\mathscr{N}}$. 从而 $X^{\varphi}_{\mathscr{N}}=R^{\infty}_{\mathscr{N}}$. 由定理 2.1,因此 $\tau(\mathscr{N})=D_{\mathscr{N}}\oplus R_{\mathscr{N}}{}^{\infty}$. □

当 $\mathscr{N}$ 是原子套时,由推论 3.4 的上述证明过程可知 $R^{\infty}_{\mathscr{N}}=X^{\varphi}_{\mathscr{N}}$. 由[8,性质 8.13]知 $R^{\infty}_{\mathscr{N}}$ 是套代数 $\tau(\mathscr{N})$ 的双边理想. 自然要问 $X^{\varphi}_{\mathscr{N}}$ 是 $\tau(\mathscr{N})$ 的理想吗? 由引理 3.3 知,其关键在于 $\varphi(T_1T_2)=\varphi(T_1)\varphi(T_2)$ 是否成立,其中 $T_1,T_2\in\tau(\mathscr{N})$.

4 定理 2.2 及 2.3 的证明

定理 2.2 的证明 设 $T\in D_{\mathscr{N}},N\in\mathscr{N}$,那么 $\mathscr{M}=\{(0),N,H\}$ 是一有限套,可见 $\mathscr{M}\subseteq\mathscr{N}$,所以 $D_{\mathscr{N}}\subseteq D_{\mathscr{M}}$,即 $T\in D_{\mathscr{M}}$,下面证明 $T^{-1}\in D_{\mathscr{M}}$.

由于 $H=N\oplus N^{\perp}$,又 $T\in D_{\mathscr{M}}$,所以 $T=\begin{bmatrix}T_{11}&0\\0&T_{12}\end{bmatrix}$,设 $T^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$,因此

$$TT^{-1}=\begin{bmatrix}T_{11}A_{11}&T_{11}A_{12}\\T_{22}A_{21}&T_{22}A_{22}\end{bmatrix}=T^{-1}T=\begin{bmatrix}A_{11}T_{11}&A_{12}T_{22}\\A_{21}T_{11}&A_{22}T_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix}.$$

于是 $T_{11}A_{11}=A_{11}T_{11}=I$ 与 $T_{22}A_{22}=A_{22}T_{22}=I$,可见 $A_{11}=T_{11}^{-1},A_{22}=T_{22}^{-1}$. 又 $T_{11}A_{12}=0$, $T_{22}A_{21}=0$,可得 $A_{12}=A_{21}=0$. 从而 $T^{-1}=\begin{bmatrix}T_{11}^{-1}&0\\0&T_{22}^{-1}\end{bmatrix}\in D_{\mathscr{M}}$.

因为 $D_{\mathscr{M}} = \{T: TP = PT, \forall P \in \mathscr{M}\}$,所以 $T^{-1}N = NT^{-1}$,即 $T^{-1} \in D_{\mathscr{N}}$. □

定理 2.3 的证明 由推论 3.4 知,可设 $T = D + R$ 且 $T^{-1} = D' + R'$,其中 $R, R' \in R_{\mathscr{N}}^{\infty}$, $D' \in D_{\mathscr{N}}$ 且 $D = \varphi(T)$. 由[8,性质 8.13]知,$R_{\mathscr{N}}^{\infty}$ 是套代数的双边理想. 于是

$$I = \varphi(TT^{-1}) = \varphi(DD' + \varphi(DR' + RD' + RR') = DD',$$

同理可得 $I = DD'$. 因此 $\varphi(T^{-1})$ 是 $\varphi(T)$ 的可逆元.

由于 $\mathscr{N}$ 是可分 Hilbert 空间 H 上的可数套,所以 $\mathscr{N}$ 是原子套,不妨设其原子为 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$. 由[8,定理 8.6]的证明过程知,$D = \varphi(T) = \sum_{i \geqslant 1} E_i T E_i$. 由上述定理知对于所有的 $i \geqslant 1$, $D_{ii} = E_i T E_i$ 在 E_i 上可逆. 令 $E = E_i \oplus E_j$(不妨设 $E_i < E_j$). 则 $ETE == \begin{bmatrix} D_{ii} & R_{ij} \\ 0 & D_{ij} \end{bmatrix}$. 又由于 $\begin{bmatrix} D_{ii} & R_{ij} \\ 0 & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_{ii}^{-1} & -D_{ii}^{-1} R_{ij} D_{ij}^{-1} \\ 0 & D_{ij}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{ii}^{-1} & -D_{ii}^{-1} R_{ij} D_{ij}^{-1} \\ 0 & D_{ij}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ii} & R_{ij} \\ 0 & D_{ij} \end{bmatrix} = I_E$,因此 ETE 在 $E = E_i \oplus E_j$ 上可逆且可逆算子是 $T_E^{-1} = \begin{bmatrix} D_{ii}^{-1} & -D_{ii}^{-1} R_{ij} D_{ij}^{-1} \\ 0 & D_{ij}^{-1} \end{bmatrix}$. 同理可得 T 限制在 $E' = E \oplus E_k = (E_i \oplus E_j \oplus E_k)$ 上的可逆算子是 $T_{E'}^{-1} = \begin{bmatrix} T_E^{-1} & -T_E^{-1} R_{ij} D_{kk}^{-1} \\ 0 & D_{kk}^{-1} \end{bmatrix}$. 以此类推,算子 T 在套 $\mathscr{N}$ 任意有限个原子直和空间上的限制可逆,并可以验证上述方法所得可逆算子 $T^{-1} \oplus E_i$ 便是 T 的逆元. □

参考文献:

[1] KADISON R V, KASTLER D. *Perurbations of von Neumann algebras I, stability of type* [J]. Amer. J. Math., 1972, **94**: 38—54.

[2] CHRISTENSEN E. *Perturbations of type I von Neumann algebras* [J]. J. London Math. Soc., 1975, **94**: 395—405.

[3] LANCE E C. *Cohomology and perturbations of nest algebras* [J]. Proc. London Math. Soc., 1981, **43**: 334—346.

[4] DAVIDSON K R. *Perturbations of reflexive operator algebras* [J]. J. Operator Theory, 1983, **15**: 289—305.

[5] CONNES A. *Classification of injective factors* [J]. Ann. Math., 1976, **104**: 73—116.

[6] DIXMIER J. *Von Neumann Algebras* [M]. North-Holland Publishing Company, 1981.

[7] JOHNSON B E, KADISON R V, RINGROSE J R. *Cohomology of operator algebras III* [J]. Bull. Soc. Math. France, 1972, **100**: 73—96.

[8] DAVIDSON K R. *Nest Algebras* [M]. Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 191, Longman, London/New York, 1988.

[9] KATSOULIS E G. *Remarks on the inter polation and the similarity problem for nest subalgebras of von Neumann algebras* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, **190**: 755—762.

[10] GILFEATHER F, LARSON D R. *Nest subalgebras of von Neumann algebras* [J]. Adv. Math., 1982, **46**: 171—199.

[11] POP F. *Perturbations of nest subalgebras of von Neumann algebras* [J]. J. Operator Theory, 1989,

21: 139—144.
[12] PITTS D R. *Factorization problem for nest: fractorization methods and characterization of the universal factorization property* [J]. J. Funct. Anal., 1988, **79**: 57—90.

Operator Set of Nest Algebra in Direct Sums and Its Invertible Operators

YANG You-long, GAO Xiao-guang
(Dept. of Electronic Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: In this paper, we characterize the properties of $X_{\mathscr{N}}^{\varphi}$, where $X_{\mathscr{N}}^{\varphi}$ is an operator set of nest algebra, and show that the direct sum of nest algebra is $\tau(\mathscr{N}) = D_{\mathscr{N}} \oplus X_{\mathscr{N}}^{\varphi}$. We prove also that the invertible element of operators in $D_{\mathscr{N}}$ belongs to $D_{\mathscr{N}}$. When the nest is a countable nest, we obtain that the invertible element of the operator T in $\tau(\mathscr{N})$ belongs to $\tau(\mathscr{N})$ if and only if $\varphi(T)$ is invertible.
Key words: nest algebra; expectation; invertible operator.