第24卷第2期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 2
2004年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2004

两端简单支撑静态梁方程的正解*

马如云， 宋灵宇
(西北师范大学数信学院，甘肃 兰州 730070)

摘 要：本文在非线性项 f 增长不受限制的前提下，讨论带导数项的两端简单支撑静态梁方程 $y^{(4)}=f(x,y,y',y'',y''')$，$y(0)=y(1)=y''(0)=y''(1)=0$ 的可解性.

关键词：四阶边值问题；正解；存在性；不动点.
分类号：AMS(2000) 34B15/CLC number：O175.8
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)02-0317-04

1 引 言

弹性梁是工程建筑的基本构件.关于线性弹性梁方程可解性的研究，是由 Usmani[1] 首先开始的.此后关于非线性弹性梁的方程可解性及正解的存在性，出现过一些结果，参见[2－7].但这些结果均依赖于非线性项 f 在无穷的增长性假设，从而在应用上存在很大的局限性.本文借鉴文[9]的方法，在 f 的增长不受限制的前提下，考察两端简单支撑的静态梁方程

$$y^{(4)} = f(x,y,y',y'',y'''),\quad x\in[0,1], \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0 \tag{2}$$

的可解性.

2 主要结果

定理 1 如果假设

A_1) $f(x,y,z,w,0)\geqslant 0$，$(x,y,z,w)\in[0,1]\times[0,b]\times[-b,b]\times[-b,0]$；

A_2) $f(x,y,z,w,\pm b)\leqslant 0$，$(x,y,z,w)\in[0,1]\times[0,b]\times[-b,b]\times[-b,0]$.

则问题(1)－(2)有解 y 满足 $0\leqslant y\leqslant b$，$-b\leqslant y'\leqslant b$，$-b\leqslant y''\leqslant 0$，$-b\leqslant y'''\leqslant b$.

为了证明定理，需要如下引理.它是 Leray-Schauder 拓扑度理论的直接推论.

---

* 收稿日期：2001-12-14
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10271095)；GG-110-10736-1003；NWNU-KJCXGC-212；教育部重点科技项目；教育部优秀青年教师资助计划项目.
作者简介：马如云(1964-)，博士，教授.

引理 设 X 是一个 Banach 空间，Ω 是 X 的真子集，并为有界开集，$0\in\Omega$. 若 $(\lambda,y)\in(0,1)\times\overline{\Omega}$ 满足边值问题

$$y^{(4)}=\lambda f(x,y,y',y'',y'''),\quad x\in[0,1],$$
$$y(0)=y''(0)=y(1)=y''(1)=0$$

时必有 $y\in\Omega$，则(1)—(2)必有解 $y\in\overline{\Omega}$.

定理 1 的证明 记 $X=\{y\in C^3[0,1]:y(0)=y''(0)=y(1)=y''(1)=0\}$. 则 X 在范数 $|y|_x=\max\{|y|_0,|y'|_0,|y''|_0,|y'''|_0\}$ 下构成 Banach 空间. 其中 $|\cdot|_0$ 表示通常的 sup 范数.

据 Urysohn 引理，存在 $\varphi\in C(R^4,[-1,1])$，使

$$\varphi([0,b]\times[-b,b]\times[-b,0]\times\{0\})=1,\quad \varphi([0,b]\times[-b,b]\times[-b,0]\times\{\pm b\})=-1.$$

令 $f_n(x,y,z,w,s)=f(x,y,z,w,s)+n^{-1}\varphi(y,z,w,s)$，$n=1,2,\cdots$. 结合条件 A_1)，A_2)知

$$f_n(x,y,z,w,0)>0,\quad (x,y,z,w)\in[0,1]\times[0,b]\times[-b,b]\times[-b,0],$$
$$f_n(x,y,z,w,\pm b)<0,\quad (x,y,z,w)\in[0,1]\times[0,b]\times[-b,b]\times[-b,0].$$

取 $\varepsilon_n\in(0,1]$，使得

$$f_n(x,y,z,w,s)>0,\ (x,y,z,w,s)\in[0,1]\times[-\varepsilon_n\times b]\times[-b,b]\times[-b,\varepsilon_n]\times[0,\varepsilon_n],\quad(3)$$
$$f_n(x,y,z,w,\pm b)<0,\quad (x,y,z,w,s)\in[0,1]\times[-\varepsilon_n,b]\times[-b,b]\times[-b,\varepsilon_n].\quad(4)$$

令 $\Omega_n=\{y\in X:-\varepsilon_n<y<b,-b<y'<b,-b<y''<\varepsilon_n,-b<y'''<b\}$. 如果能证得方程

$$y^{(4)}=f_n(x,y,y',y'',y'''),\quad x\in[0,1]\quad(5)$$

有解 $y_n\in\overline{\Omega}_n$ 且 y_n 满足 $y_n(x)\geqslant0$，$y_n''(x)\leqslant0$（任意的 $x\in[0,1]$），由 $\{y_n^{(j)}:j=0,1,2,3,4;n=1,2,\cdots\}$ 的一致有界性并运用 Arzcla-Ascoli 定理就能推出，$\{y_n\}$ 有子列在 X 中收敛于某个 y. 这个 y 即为(1)—(2)的合乎定理 1 要求的解. 而要证(5)有解 $y_n\in\overline{\Omega}_n$ 满足 $y_n\geqslant0$ 和 $y_n''\leqslant0$，根据引理只需证：对问题

$$y^{(4)}=\lambda f_n(x,y,y',y'',y'''),\quad y(0)=y''(0)=y(1)=y''(1)=0\quad(6)$$

$(\lambda\in(0,1))$的满足

$$-\varepsilon_n\leqslant y\leqslant b,\ -b\leqslant y'\leqslant b,\ -b\leqslant y''\leqslant\varepsilon_n,\ -b\leqslant y'''\leqslant b\quad(7)$$

的解 y，均有

$$0\leqslant y<b,\ -b<y'<b,\ -b<y''\leqslant0,\ -b<y'''<b\quad(8)$$

即 $y\in\Omega$. 同时有 $y\geqslant0$，$y''\leqslant0$.

取定一个满足(6)和(7)的 $y\in X$，下面证 y 满足(8)：

1° 证 $-b<y'''<b$ 于$[0,1]$.

由 $y''(0)=y''(1)=0$ 知：存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $y'''(\xi)=0$. 进而由(7)，(6)及(3)推知 $y^{(4)}(\xi)>0$. 再结合 $Y'''(\xi)=0$ 又可知：存在 $d\in[0,\xi)$，$e\in(\xi,1]$ 使 $y'''<0$ 于(d,ξ)，$y'''>0$ 于(ξ,e). 设(d,ξ)为$[0,\xi)$中使 $y'''<0$ 的最右边的那个极大子区间，(ξ,e)为$(\xi,1]$中使 $y'''>0$ 的最左边的那个极大子区间，下证 $d=0$，$e=1$. 反设 $d>0$，因(d,ξ)为极大子区间，所以 $y'''(d)=0$. 由(7)，(6)及(3)推知 $y^{(4)}(d)>0$. 由此推出，存在 $\tau\in[0,d)$ 使 $y'''<0$ 于(τ,d). 从而 d 是 y''' 的一个极大点. 由此推出 $y^{(4)}(d)=0$ 矛盾！于是 $y'''<0$ 于$(0,\xi)$；同理反设 $e<1$，因(ξ,e)为极大子区间，所以 $y'''(e)=0$. 由(7)，(6)及(3)推知 $y^{(4)}(e)>0$. 由此推知，存在 $k\in(e,1]$ 使 $y'''>0$ 于(e,k). 从而 e 是 y''' 的一个极小点. 由此推出 $y^{(4)}(e)=0$ 矛盾！于是 $y'''>0$ 于$(\xi,1)$.

下证 $-b<y'''$ 于$[0,\xi]$. 反设存在 $x_0\in[0,\xi]$ 使得 $y'''(x_0)=-b$. 由 $y'''(\xi)=0$ 知，$x_0\neq$

ξ. 结合(7),(6)及(4)推知 $y^{(4)}(x_0) < 0$. 由此推知:存在 $\delta > 0$ 使 y''' 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上严格递减. 进而 $y''' < -b$ 于 $(x_0, x_0 + \delta)$. 与(7)矛盾!

再证 $y''' < b$ 于 $[\xi, 1]$. 反设存在 $x_1 \in [\xi, 1]$ 使得 $y'''(x_1) = b$. 由 $y'''(\xi) = 0$ 知 $x_1 \neq \xi$. 结合(7),(6)及(4)推知 $y^{(4)}(x_1) < 0$. 由此推知,存在 $r > 0$ 使 y''' 在 $(x_1 - r, x_1)$ 上严格递减,进而 $y''' > b$ 于 $(x_1 - r, x_1)$. 与(7)矛盾!

由上面的推理可知:当时 $x \in [0, \xi]$ 时, $-b < y'''(x) \leqslant 0$;当 $x \in [\xi, 1]$ 时, $0 \leqslant y'''(x) < b$. 于是有: $-b < y''' < b$ 于 $[0, 1]$.

2° 证 $-b < y'' \leqslant 0$ 于 $[0, 1]$.

由 1° 知:当 $x \in (0, \xi]$ 时, $-b < y'''(x) \leqslant 0$. 利用 $y''(0) = 0$ 有 $y''(x) = \int_0^x y'''(s)\mathrm{d}s$. 因此 $-b \leqslant -bx < y''(x) \leqslant 0$. 又由 1° 知:当 $x \in [\xi, 1)$ 时, $0 \leqslant y'''(x) < b$. 利用 $y''(1) = 0$ 有

$$y''(x) = \int_1^x y'''(s)\mathrm{d}s = \int_x^1 -y'''(s)\mathrm{d}s.$$

因此 $-b \leqslant -b(1-x) < y''(x) \leqslant 0$. 于是对 $x \in [0, 1]$ 有 $-b < y''(x) \leqslant 0$.

3° 证 $-b < y' < b$ 于 $[0, 1]$.

由 $y(0) = y(1) = 0$ 知:存在 $\eta \in (0, 1)$ 使 $y'(\eta) = 0$. 进而有 $y'(x) = \int_\eta^x y''(s)\mathrm{d}s$. 又由 2° 知: $-b < y''(x) \leqslant 0$ 于 $[0, 1]$. 于是,当 $x \in [0, \eta)$ 时有

$$0 \leqslant y'(x) < b(\eta - x) \leqslant b;$$

当 $x \in (\eta, 1]$ 时有

$$-b \leqslant -b(x - \eta) < y'(x) \leqslant 0.$$

因此,对 $x \in [0, 1]$ 有 $-b < y'(x) < b$.

4° 证 $0 \leqslant y < b$ 于 $[0, 1]$.

由 3° 知:当 $x \in (0, \eta]$ 时, $0 \leqslant y'(x) < b$. 利用 $y(0) = 0$ 有 $y(x) = \int_0^x y'(s)\mathrm{d}s$. 因此 $0 \leqslant y(x) < bx \leqslant b$. 又由 3° 知:当 $x \in [\eta, 1)$ 时, $-b < y'(x) \leqslant 0$,利用 $y(1) = 0$ 有

$$y(x) = \int_1^x y'(s)\mathrm{d}s = \int_x^1 -y'(s)\mathrm{d}s.$$

因此 $0 \leqslant y(x) < b(1-x) \leqslant b$. 于是,对 $x \in [0, 1]$ 有: $0 \leqslant y(x) < b$.

综合 1° − 4°, y 满足(8).

附注 1 作为定理 1 的应用,考察如下简单的边值问题

$$y^{(4)} = -(y''')^{2k} + 1, \tag{9}$$

$$y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0, \tag{10}$$

其中 $k \in N$. 取 $b=1$. 显然 f 满足定理 1 的条件 A_1), A_2),故(9)−(10)有解 y 满足

$$0 \leqslant y \leqslant 1, -1 \leqslant y' \leqslant 1, -1 \leqslant y'' \leqslant 0, -1 \leqslant y''' \leqslant 1.$$

附注 2 从定理 1 的证明不难看出,定理 1 的如下对偶命题成立. 如果假设

A_3) $f(x, y, z, w, 0) \leqslant 0$, $(x, y, z, w) \in [0,1] \times [-b, 0] \times [-b, b] \times [0, b]$;

A_4) $f(x, y, z, w, \pm b) \geqslant 0$, $(x, y, z, w) \in [0,1] \times [-b, 0] \times [-b, b] \times [0, b]$,

则问题(1)−(2)有解 y 满足 $-b \leqslant y \leqslant 0, -b \leqslant y' \leqslant b, 0 \leqslant y'' \leqslant b, -b \leqslant y''' \leqslant b$.

参考文献:

[1] USMANI R A. *A uniqueness theorem for a boundary value problems* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, **77**: 327—335.

[2] YANG Yi-song. *Fourth-order two-point boundary value problems* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1988, **104**(1): 175—180.

[3] DEL PINO M A, MANASEVICH R F. *Existence for a fourth-order boundary value problem under a two-parameter non-resonance condition* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1991, **112**(1): 81—86.

[4] GUPTA C P. *Existence and uniquenes theorems for some fourth order fully quasi-linear boundary value problems* [J]. Appl. Anal., 1990, **36**: 157—169.

[5] GUPTA C P. *Existence and uniqueness theorems for the bending of an elastic beam equation* [J]. Appl. Anal., 1988, **26**: 289—304.

[6] MA Ru-yun, WANG Hai-yan. *On the existence of positive solutiors of fourth order ODE* [J]. Appl. Anal., 1995, **59**: 225—231.

[7] MA Ru-yun. *The method of lower and upper solutions for fourth-order two-point boundary value problems* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1997, **215**: 415—422.

[8] MA Ru-yun. *Some multiplicity results for an elawic beam equadon at resonance* [J]. Appl. Math. Mech., 1993, **14**(2): 193—200.

[9] RODRIGUEZ A, TINEO A. *Existence theorems for the Dirichiet problem without growth restrictions* [J]. Math. Anal. Appl., 1988, **135**: 1—7.

[10] LIN Zong-chi, Lin Su-rong. *Singular perturbation on boundary value problem for a vcctor fourth-order nonlinear differential equation* [J]. Appl. Math. Mech., 1988, **9**(5): 385—396.

Positive Solutions of an Equation Associated with an Elastic Beam with Simply Supported End-Points

MA Ru-yun, SONG Ling-yu

(Dept. of Math., Northwest Normal Universtiy, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we consider the fourth-order two-point boundary problem describing the deformation of an elastic beam with simply supported end-points. We show the existence of positive solutions without any growth restrictions on f.

Key words: Fourth-order boundary value problem; positive solution; existence; fixed point.