第24卷第2期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 2
2004年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2004

关于 Thiele 型向量值连分式收敛定理的一个注记*

赵欢喜[1,3]， 朱功勤[2]， 肖 萍[1]

(1. 中南大学数学院，湖南 长沙 410083；2. 合肥工业大学理学院，安徽 合肥 230009；
3. 中国科技大学数学系，安徽 合肥 230026)

摘 要：本文利用推广的向量连分式向后递推算法重新给出了文[3]中定理1的证明，并改进了其结果. 最后，在稍强的条件下，给出了这一类收敛向量连分式的一个更精致的截断误差估计.

关键词：向量值连分式；古典向后递推算法；收敛定理；截断误差估计.

分类号：AMS(2000) 40A15，15A60/CLC number：O241.5

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)02-0328-05

1 引 言

称

$$\vec{b}_0+\underset{n=1}{\overset{\infty}{K}}(1/\vec{b}_n)=\vec{b}_0+\frac{1}{\vec{b}_1}+\cdots+\frac{1}{\vec{b}_n}+\cdots \tag{1}$$

为简单向量值连分式. 其中 $\vec{b}_i\in C^d, d\in N$，且除 $\vec{b}_0$ 外均不是零向量，上面的计算过程由下面的 Samelson 逆定义. 若 $\vec{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_d)\neq 0$，向量 $\vec{v}$ 的 Samelson 逆变换定义为[1,2]：

$$\vec{v}^{-1}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2},\quad 其中\ \|\vec{v}\|^2=(\vec{v}\cdot\vec{v})^{1/2}=(\sum_{k=1}^{d}v_k^2)^{1/2}.$$

文[1]，[2]讨论了向量值连分式的插值与逼近问题，但没有讨论其收敛性. 向量值连分式由于不成立三项递推算法，故其收敛结果比较难得到. 文[3]对简单向量值连分式(1)讨论了其收敛性，利用一定的技巧得到了如下一个收敛判断准则(即文[3]的定理1)：
若向量序列 $\{\vec{b}_n\}$ 满足

$$\|\vec{b}_{2n-1}^{-1}\|\leqslant\alpha,\quad \|\vec{b}_{2n}^{-1}\|\leqslant 1-\alpha,\ n\geqslant 1, 0<\alpha<1, \tag{2}$$

则连分式(1)收敛.

由于定义的向量乘积是数量积，故文[3]中的关系式(7)与(11)似乎不成立，因而文[3]中定理1的证明欠妥，本文重新给出了证明，并改进了其结果. 最后，在稍强的条件下，给出了

* 收稿日期：2001-11-26
基金项目：国家自然科学基金资助(10171026)
作者简介：赵欢喜(1968-)，博士，副教授.

这一类收敛向量连分式的一个更精致的截断误差估计.

2 一些记号与结果

对数量连分式：

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{n=1}{K}}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} + \cdots,$$

这里 $a_i, b_i \in \mathbf{C}, i = 0,1,2\cdots$，存在向后递推算法

$$\begin{cases} C_{n+1,n} = 0, C_{k,n} = a_k/(b_k + C_{k+1,n}), \quad n \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n, \\ C_{1,n} = \overset{n}{\underset{i=1}{K}}(a_i/b_i). \end{cases} \tag{3}$$

对(3)，人们普遍看重的是其在数值计算中的稳定性，而较少研究其理论价值.本文把算法(3)作适当修改并推广到向量值连分式，并讨论其在向量值连分式收敛理论中的应用.显然，对向量值连分式，也有如下向后递推算法：

$$\begin{cases} \vec{R}_{n,n} = \vec{b}_n, \vec{R}_{k,n} = \vec{b}_k + a_{k+1}/\vec{R}_{k+1,n}, \quad n \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant n-1, \\ \vec{R}_{0,n} = \vec{b}_0 + \overset{n}{\underset{i=1}{K}}(a_i/\vec{b}_i), \end{cases} \tag{4}$$

称 $\vec{b}_0 + \overset{n}{\underset{i=1}{K}}\left(\frac{a_i}{\vec{b}_i}\right)$ 为向量值连分式(1) 的第 n 次渐近分式，记为 $\vec{R}_n$ 或 $\vec{R}_{0,n}$. 记

$$\vec{F}_{k,n} = \left(\vec{b}_k + \frac{a_{k+1}}{\vec{b}_{k+1}} + \cdots + \frac{a_n}{\vec{b}_n}\right)^{-1}, \quad n \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{5}$$

众所周知，对数量连分式成立：

$$F_{1,n+1} - F_{1,n} = (-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1} a_i (F_{1,n+1}F_{1,n})\cdots(F_{n,n+1}F_{n,n})F_{n+1,n+m}, \tag{6}$$

但对向量值连分式，(6) 不成立，然而利用向后递推算法对向量值连分式有下面的定理 1.

定理 1 对 $\forall\, n, m \in N$，有

$$\begin{aligned} \|\vec{R}_{n+m} - \vec{R}_n\| &= \|\vec{R}_{0,n+m} - \vec{R}_{0,n}\| = \|\vec{F}_{1,n+m} - \vec{F}_{1,n}\| \\ &= \prod_{k=1}^{n}\|\vec{F}_{k,n}\| \cdot \prod_{k=1}^{n+1}(|a_k| \cdot \|\vec{F}_{k,n+m}\|). \end{aligned} \tag{7}$$

定理 1 的证明要用到下面的引理 1.

引理 1 对$\forall\, n, m \in N, 0 \leqslant k \leqslant n$，有

$$\|\vec{F}_{k,n+m} - \vec{F}_{k,n}\| = \|\vec{F}_{k,n+m}\| \cdot \|\vec{F}_{k,n}\| \cdot \|\vec{R}_{k,n+m} - \vec{R}_{k,n}\| \tag{8}$$

证明 利用向量范数定义可直接证明.

定理 1 的证明 令 $D_k = \|\vec{R}_{k,n+m} - \vec{R}_{k,n}\|$，则由(4) 知

$$D_k = \left\| \frac{a_{k+1}}{\vec{R}_{k+1,n+m}} - \frac{a_{k+1}}{\vec{R}_{k+1,n}} \right\| = |a_{k+1}| \cdot \|\vec{F}_{k+1,n+m} - \vec{F}_{k+1,n}\|.$$

由引理 1 知 $D_k = |a_{k+1}| \cdot \|\vec{F}_{k+1,n+m}\| \cdot \|\vec{F}_{k+1,n}\| \cdot D_{k+1}$，从而令 $k = 0$，再反复利用上式，有

$$D_0 = |a_1| \cdot \|\vec{F}_{1,n+m}\| \cdot \|\vec{F}_{1,n}\| D_1 = \cdots = \prod_{k=1}^{n}(|a_k| \cdot \|\vec{F}_{k,n}\| \cdot \|\vec{F}_{k,n+m}\|)D_n, \tag{9}$$

而

$$D_n = \| \vec{R}_{n,n+m} - \vec{R}_{n,n} \| = \| \vec{b}_n + \frac{a_{n+1}}{\vec{R}_{n+1,n+m}} - \vec{b}_n \| = |a_{n+1}| \cdot \| \vec{F}_{n+1,n+m} \|, \quad (10)$$

所以，由(9)，(10)，(7) 得证.

下面给出一个引理，在下一节中会用到它.

引理 2 令 δ 是一个满足 $0 < \delta < 1/4$ 的实数，$f_n = \overset{n}{\underset{i=1}{K}}(a_i/1)$，$g_n = \overset{n}{\underset{i=1}{K}}(b_i/1)$，这里 $a_1 = 1, a_n = -\delta, b_1 = 1, b_n = -1/4, n = 1,2,\cdots$，则有(1) $f_n < g_n$；(2) $g_n = \frac{2n}{n+1}$.

证明 用数学归纳法可直接证明，在此省略.

3 类似于 Worpitzky 的收敛定理

下面给出一个简单连分式收敛的一个充分条件. 为方便起见，不妨设 $\vec{b}_0 = 0$.

定理 2 若对所有 $i = 1,2\cdots$，不等式 $\| \vec{b}_{2i-1}^{-1} \| \leqslant \alpha$，$\| \vec{b}_{2i}^{-1} \| \leqslant \beta$ 成立，这里，$0 < \alpha < 1$，$0 < \beta < 1, \alpha\beta \leqslant 1/4$，则连分式(1) 收敛，且其截断误差界为 $O(\frac{1}{n})$.

证明 (1) 首先用归纳法证明

$$\| \vec{R}_n \| \leqslant \underbrace{\frac{\alpha}{1 -} \frac{\alpha\beta}{1 -} \cdots \frac{\alpha\beta}{1}}_{n} = \alpha f_n, \quad (11)$$

这里 f_n 由引理 2 所定义，且相应的 $\delta = \alpha\beta$.

对 $n = 1$，有 $\| \vec{R}_1 \| = \| \vec{b}_1^{-1} \| \leqslant \alpha$. 对 $n = 2$，有

$$\| \vec{R}_2 \| = \frac{1}{\vec{b}_1 + \vec{b}_2^{-1}} \leqslant \frac{\| \vec{b}_1^{-1} \|}{1 - \| \vec{b}_1^{-1} \| \cdot \| \vec{b}_2^{-1} \|} \leqslant \frac{\alpha}{1 - (\alpha\beta)/1}. \quad (12)$$

假设对 $n = i$，(11) 成立，则由归纳假设有

$$\| \overset{i+1}{\underset{m=2}{K}} (1/\vec{b}_m) \| \leqslant \underbrace{\frac{\beta}{1 -} \frac{\alpha\beta}{1 -} \cdots \frac{\alpha\beta}{1}}_{i-1} = \beta f_{i-1}.$$

则由(12) 有

$$\| \vec{R}_{i+1} \| = \frac{1}{\vec{b}_1 + \overset{i+1}{\underset{m=2}{K}} (1/\vec{b}_m)} \leqslant \frac{\| \vec{b}_1^{-1} \|}{1 - \| \vec{b}_1^{-1} \| \cdot \| \overset{i+1}{\underset{m=2}{K}} (1/\vec{b}_m) \|} \leqslant \frac{\alpha}{1 - (\alpha\beta) f_i} = \alpha f_{i+1}.$$

因此(11) 成立.

(2) 下面证明 $\{\vec{R}_n\}$ 绝对收敛.

对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，由于 $\| \vec{b}_i^{-1} \| \leqslant \eta$，这里 $\eta = \alpha$ 或 $\eta = \beta$，用与第一步中相同的方法可证

$$\| \vec{F}_{i,n} \| \leqslant \underbrace{\frac{\eta}{1 -} \frac{\alpha\beta}{1 -} \cdots \frac{\alpha\beta}{1}}_{n+1-i} = \eta f_{n+1-i}.$$

又由引理 2 知

$$\| \vec{F}_{i,n} \| \leqslant \eta f_{n+1-i} \leqslant \eta g_{n+1-i} = 2\eta \frac{n+1-i}{n+2-i}. \quad (13)$$

由定理 1 及(13)有

$$\|\vec{R}_{n+m}-\vec{R}_n\| = (\|\vec{F}_{1,n}\|\cdots\|\vec{F}_{n,n}\|)\cdot(\|\vec{F}_{1,n+m}\|\cdots\|\vec{F}_{n+1,n+m}\|)$$

$$\leqslant 2^{2n+1}\alpha(\alpha\beta)^n(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2})(\frac{n+m}{n+m+1}\cdot\frac{n+m-1}{n+m}\cdots\frac{m}{m+1}$$

$$\leqslant \frac{2\alpha}{n+1}\rightarrow 0(n\rightarrow\infty). \tag{14}$$

因此,根据(14),$\{\vec{R}_n\}$ 为 Cauchy 数列,从而根据 Cauchy 收敛准则,$\{\vec{R}_n\}$ 收敛,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\vec{R}_n=\vec{R}$. 在(14)中令 $m\rightarrow\infty$,有 $\|\vec{R}_n-\vec{R}\| = O(\frac{1}{n})$.

显然,定理 2 类似于 Worpitzky 收敛定理,定理中的 1/4 来自数量情形,误差界为 $O(1/n)$ 与数量情形一样,可能是一个最好的估计. 令 $\beta=1-\alpha$,则根据定理 2,立即知道判断准则(2)成立,同时下面的推论成立.

推论 1[3] 若 $\|\vec{b}_k\|\geqslant 2, k=1,2,\cdots$,则连分式(1)收敛到 $\vec{R}$,且 $\|\vec{R}_n-\vec{R}\| = O(1/n)$.

若条件稍微加强,可以获得一个更精致的截断误差估计,即

定理 3 若 $\|\vec{b}_k\|\geqslant 2+\varepsilon, \varepsilon>0, k=1,2,\cdots$, 则连分式 $\mathop{K}\limits_{n=1}^{\infty}(1/\vec{b}_n)$ 收敛,同时其误差估计界可达 $O(1/n^2)$.

证明 首先利用数学归纳法易证 $\|\vec{R}_n\|\geqslant 1, n=1,2,\cdots$.

由向后递推算法(4),有

$$\vec{R}_{k,n}\|\vec{R}_{k+1,n}\| = \vec{b}_{k,n}\|\vec{R}_{k+1,n}\| + \frac{\vec{R}_{k+1,n}}{\|\vec{R}_{k+1,n}\|}. \tag{15}$$

由(15)及定理条件有

$$(\|\vec{R}_{k,n}\|-1)\geqslant\frac{\|\vec{R}_{k+1,n}\|-1}{\|\vec{R}_{k+1,n}\|}. \tag{16}$$

从 $k=1$ 到 $k=n$,反复利用(16)并考虑到 $\|\vec{R}_{n,n}\| = \|\vec{b}_{n,n}\|\geqslant 2$ 有

$$(\|\vec{R}_{1,n}\|-1)\geqslant\frac{\|\vec{R}_{2,n}\|-1}{\|\vec{R}_{2,n}\|}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{\|\vec{R}_{2,n}\|\cdots\|\vec{R}_{n,n}\|},$$

即

$$\|\vec{R}_{1,n}\|\cdots\|\vec{R}_{n,n}\|\geqslant 1+\|\vec{R}_{2,n}\|\cdots\|\vec{R}_{n,n}\|. \tag{17}$$

继续上述过程,有

$$\|\vec{R}_{1,n}\|\cdots\|\vec{R}_{n,n}\|\geqslant n-1+\|\vec{R}_{n,n}\|\geqslant n+1. \tag{18}$$

类似的,得

$$\|\vec{R}_{1,n+m}\|\cdots\|\vec{R}_{n+1,n+m}\|\geqslant(n+1)\varepsilon+\|\vec{R}_{n+2,n+m}\|\cdots\|\vec{R}_{n+2,n+m}\|\geqslant(n+1)\varepsilon. \tag{19}$$

由定理 1,(18),(19)并考虑到 $\|\vec{F}_{k,n}\| = 1/\|\vec{R}_{k,n}\|$,有

$$\|\vec{R}_{n+m}-\vec{R}_n\| = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\|\vec{R}_{k,n}\|\cdot\prod\limits_{k=1}^{n+1}\|\vec{R}_{k,n+m}\|}\leqslant\frac{1}{n(n+1)\varepsilon}.$$

根据 Cauchy 收敛准则,$\{\vec{R}_n\}$ 收敛. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}\vec{R}_n=\vec{R}$,则 $\|\vec{R}_n-\vec{R}\| = O(\frac{1}{n^2})$,证毕.

利用等价变换，现在可以给出形如 $\vec{b}_0+\underset{n=1}{\overset{\infty}{K}}(a_n/\vec{b}_n)$ 连分式收敛的一个充分条件.

引理 3[4] 若对任意 $k\geqslant 1$ 令 $\vec{B}_{2k}=\frac{a_2\cdots a_{2k}}{a_1\cdots a_{2k-1}}\vec{b}_{2k}$ 和 $\vec{B}_{2k-1}=\frac{a_1\cdots a_{2k-1}}{a_2\cdots a_{2k-2}}\vec{b}_{2k-1}$，则 $\vec{b}_0+\underset{n=1}{\overset{\infty}{K}}(a_n/\vec{b}_n)$ 与 $\vec{b}_0+\underset{n=1}{\overset{\infty}{K}}(1/\vec{B}_n)$ 等价.

由引理 3 与定理 2，立即有：

定理 4 若对所有 $k=1,2,\cdots$，不等式

$$\left\|\frac{a_2\cdots a_{2k-2}}{a_1\cdots a_{2k-1}}\vec{b}_{2k-1}^{-1}\right\|\leqslant\alpha,\quad \left\|\frac{a_1\cdots a_{2k-1}}{a_2\cdots a_{2k}}\vec{b}_{2k}^{-1}\right\|\leqslant\beta$$

成立，这里，$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$，$\alpha\beta\leqslant 1/4$，则连分式 $\vec{b}_0+\underset{n=1}{\overset{\infty}{K}}(a_n/\vec{b}_n)$ 收敛，且其截断误差界为 $O(\frac{1}{n})$.

参考文献：

[1] GRAVES-MORRIS P R. *Vector valued rational interpolants I* [J]. Numer. Math., 1983, **41**(3): 331—334.

[2] 朱功勤，顾传青. 向量连分式逼近与插值 [J]. 计算数学，1992，**14**(4)：427—432.
ZHU Gong-qin, GU Chuan-qing. *Approximation and interpolation of vector valued continued fractions* [J]. Numer. Sinica, 1992, **14**(4): 427—432.

[3] 朱功勤，顾传青. Thiele 型向量连分式的收敛性定理 [J]. 数学研究与评论，1990，**10**(4)：523—526.
ZHU Gong-qin, GU Chuan-qing. *Convergence theorems of Thiele-type vector continued fractions* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1990, **10**(4): 523—526. (in Chinese)

[4] LORENTZEN L, WAADELAND H. *Continued Fractions with Applications* [M]. Amsterdam, Elsevier Science B. V., 1992.

A Note on Convergence Theorem for Thiele-Type Vector Valued Continued Fractions

ZHAO Huan-xi[1,3], ZHU Gong-qin[2], XIAO Ping[1]

(1. School of Mathematics, Central-South University, Changsha 410083, China;

(2. School of Science, Hefei University of Technology, Anhui 230009, China;

(3. Dept. of Math., University of Science & Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: We improve the proof and results of Theorem 1 in [3] by means of the modified classical backward algorithm which is a generalization of the scalar case. We give also a more refined truncation error bound for this class of vector continued fractions under a slightly stronger condition.

Key words: vector valued continued fractions; classical backward recurrence relation; convergence theorem; truncation error estimation.