第24卷第2期
2004年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 24 No. 2
May 2004

集值向量优化的二阶最优性必要条件*

贾继红
(东莞理工学院数学教研室，广东 东莞 523106)

摘　要：在赋范空间中给出了集值映射的二阶切集的概念，利用二阶切集，定义了集值映射的二阶切导数. 然后，获得了集值向量优化问题弱极小元的两个二阶最优性必要条件.

关键词：二阶切集；二阶切导数；弱极小元.
分类号：AMS(2000) 49K27, 49J53, 90C30/CLC number: O224
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2004)02-0333-05

1 引 言

随着最优化理论研究的不断深入及其在非线性系统、控制论、广义方程及变分问题等领域中的广泛应用，人们面临越来越多的集值映射问题，由于集值映射在许多实际问题中反映到数学上是集值映射优化问题，所以集值映射优化问题的研究是非线性系统、控制论、变分问题、非线性分析等学科发展的必然要求.

集值向量优化问题的非导数型最优性条件和导数型一阶最优性条件的研究成果非常丰富，如文献[1—6]. 另外，关于单值向量优化问题解的二阶最优性条件的研究结果也有一些[7，8]，但不多. 然而，对于集值向量优化问题的二阶最优性条件的研究几乎没有. 本文通过定义集值映射的二阶切集，给出集值映射二阶切导数的概念，然后，建立集值向量优化问题弱极小元的两个二阶最优性必要条件.

2 基本概念

设 X,Y,Z 为实赋范空间，X^*,Y^*,Z^* 分别为 X,Y,Z 的对偶空间，$C\subset Y$，$D\subset Y$ 分别是 Y,Z 的点闭凸锥. $\mathrm{int}C\neq\varnothing$，$\mathrm{int}D\neq\varnothing$. C 和 D 的对偶锥为：$C^+=\{y^*\in Y^*:\langle y^*,y\rangle\geqslant 0,\forall\, y\in C\}$，$D^+=\{z^*\in Z^*:\langle z^*,z\rangle\geqslant 0,\forall\, z\in D\}$.

对任意的 $y',y''\in Y$，记 $y'\geqq_C y''\Leftrightarrow y'-y''\in C$；$y'\geq_C y''\Leftrightarrow y'-y''\in C\setminus\{0\}$；$y'>_C y''\Leftrightarrow y'-y''\in \mathrm{int}C$.

* 收稿日期：2001-11-26
作者简介：贾继红(1965-)，女，博士，副教授.

设 $F:X \to 2^Y$ 是集值映射. $A \subset X$ 是凸集, $\mathrm{int}A \neq \varnothing$, 记 $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$.

定义 2.1 如果对任意的 $x_1, x_2 \in A, \alpha \in [0,1]$, 有

$$\alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) \subset F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + C,$$

则称 F 在 A 上是 C- 凸的.

定义 2.2 (a) F 的图定义为集合 $\mathrm{graph}F = \{(x,y) \mid y \in F(x), x \in A\}$. (b) 设 $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{graph}F$, $\mathrm{graph}F$ 在 $(\bar{x},\bar{y})$ 的切锥定义为集合 $T_1(\mathrm{graph}F,(\bar{x},\bar{y})) = \{(x,y) \mid$ 存在 $(x_n,y_n) \in \mathrm{graph}F, \lambda_n \to +0$ 使得

$$(x_n,y_n) = (\bar{x},\bar{y}) + \lambda_n(x,y) + [O_1(\lambda_n),O_2(\lambda_n)]\},$$

其中 $[O_1(\lambda_n),O_2(\lambda_n)]$ 是向量, 满足 $\|O_1(\lambda_n)\|/\lambda_n \to 0$, $\|O_2(\lambda_n)\|/\lambda_n \to 0$.

(c) F 在 $(\bar{x},\bar{y})$ 的切导数 $DF(\bar{x},\bar{y})$ 定义为映 X 到 Y 的集值映射, 满足

$$\mathrm{graph}DF(\bar{x},\bar{y}) = T_1(\mathrm{graph}F,(\bar{x},\bar{y})).$$

即 $y \in DF(\bar{x},\bar{y})(x) \Leftrightarrow (x,y) \in T_1(\mathrm{graph}F,(\bar{x},\bar{y}))$.

定义 2.3 设 $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{graph}F$.

(a) $\mathrm{graph}F$ 在 $(\bar{x},\bar{y})$ 的二阶切集定义为集合 $T_2(\mathrm{graph}F,(\bar{x},\bar{y})) = \{[(x,y),(u,v)] \mid$ 存在 $(x_n,y_n) \in \mathrm{graph}F, \lambda_n \to +0$ 使得

$$(x_n,y_n) = (\bar{x},\bar{y}) + \lambda_n(x,y) + \frac{1}{2}\lambda_n^2(u,v) + [O_1(\lambda_n^2),O_2(\lambda_n^2)]\},$$

其中 $[O_1(\lambda_n^2),O_2(\lambda_n^2)]$ 是向量, 满足 $\|O_1(\lambda_n^2)\|/\lambda_n^2 \to 0$, $\|O_2(\lambda_n^2)\|/\lambda_n^2 \to 0$.

(b) F 在 $(\bar{x},\bar{y})$ 的二阶切导数 $D^2F(\bar{x},\bar{y})$ 定义为映 $X \times X$ 到 $Y \times Y$ 的集值映射, 满足 $\mathrm{graph}D^2F(\bar{x},\bar{y}) = T_2(\mathrm{graph}F,(\bar{x},\bar{y}))$, 即

$$(y,v) \in D^2F(\bar{x},\bar{y})(x,u) \Leftrightarrow [(x,y),(u,v)] \in T_2(\mathrm{graph}F,(\bar{x},\bar{y})).$$

考虑集值向量优化问题:

$$(\mathrm{VP})\ \min F(x)$$
$$\mathrm{s.t.}\ G(x) \cap (-D) \neq \varnothing,$$

其中 $x \in E, E \subset X$ 是凸集. $F:E \to 2^Y, G:E \to 2^Z$ 在 E 上分别是 C- 凸的和 D- 凸的. (VP) 的可行集为 $S = \{x \in E \mid G(x) \cap (-D) \neq \varnothing\}$. 易知, S 是凸集, F,G 在 S 上分别是 C- 凸的和 D- 凸的.

定义 2.4 设 $\bar{x} \in S$. 如果存在 $\bar{y} \in F(\bar{x})$, 使 $(F(S)-\bar{y}) \cap (-\mathrm{int}C) = \varnothing$, 则称 $\bar{x}$ 为 (VP) 的弱有效解. 称 $(\bar{x},\bar{y})$ 为 (VP) 的弱极小元.

3 最优性必要条件

定理 3.1 设 $(\bar{x},\bar{y})$ 为 (VP) 的弱极小元, 则 $D^2F(\bar{x},\bar{y})(S,S) \cap \Omega = \varnothing$. 其中 $\Omega = \{(y,v) \in 2^{Y \times Y} \mid (y,v) \in (-\mathrm{int}C \cup \{0\}) \times (-\mathrm{int}C)\}$

证明 假设不然, 则对某 $(x',u') \in S \times S$, 存在 $(y',v') \in D^2F(\bar{x},\bar{y})(x',u') \cap \Omega$. 根据定义 2.3(b), $[(x',y'),(u',v')] \in T_2(\mathrm{graph}F,(\bar{x},\bar{y}))$, 从而存在 $(x_n,y_n) \in \mathrm{graph}F$ 和 $\lambda_n \to +0$ 使

$$(x_n, y_n) = (\bar{x}, \bar{y}) + \lambda_n(x', y') + \frac{1}{2}\lambda_n^2(u', v') + [O_1(\lambda_n^2), O_2(\lambda_n^2)]\},$$

其中 $\| O_1(\lambda_n^2) \| / \lambda_n^2 \to 0$, $\| O_2(\lambda_n^2) \| / \lambda_n^2 \to 0$. 因而

$$y_n = \bar{y} + \lambda_n y' + \frac{1}{2}\lambda_n^2 v' + O_2(\lambda_n^2)\}. \tag{1}$$

(a) 若 $y' \neq 0$,则 $y' \in -\mathrm{int}C$. 设 $\alpha_n = \frac{1}{2}\lambda_n v' + O_2(\lambda_n)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$,因而式(1)可写成 $y_n = \bar{y} + \lambda_n(y' + \alpha_n)$. 因为 $y' \in -\mathrm{int}C$,所以存在正整数 N_1,当 $n \geqslant N_1$ 时,$y' + \alpha_n \in -\mathrm{int}C$. 由于 C 是凸锥,故 $y_n - \bar{y} \in -\mathrm{int}C, (n \geqslant N_1)$.

(b) 若 $y' = 0, v' \in -\mathrm{int}C$,则(1)式可写成 $y_n = \bar{y} + \frac{1}{2}\lambda_n^2(v' + t_n)$. 其中 $t_n = \dfrac{O_2(\lambda_n^2)}{\frac{1}{2}\lambda_n^2} \to 0, (n \to \infty)$. 因而存在正整数 N_2,当 $n \geqslant N_2$ 时,$v' + t_n \in -\mathrm{int}C$. 由于 C 是凸锥,故 $y_n - \bar{y} \in -\mathrm{int}C, (n \geqslant N_2)$.

综上所述,取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,则当 $n \geqslant N$ 时,$y_n - \bar{y} \in -\mathrm{int}C$. 又因 $y_n \in F(x_n) \subset F(S)$,从而 $(F(S) - \bar{y}) \cap (-\mathrm{int}C) \neq \varnothing$,这与 $(\bar{x}, \bar{y})$ 为(VP)的弱极小元矛盾. □

定理 3.2 设 $(\bar{x}, \bar{y})$ 为(VP)的弱极小元,$D^2F(\bar{x}, \bar{y})$ 在 $E \times E$ 上是 $C \times C$-凸的,$D^2F(\bar{x}, \bar{y})$ 在 $E \times E$ 上是 $D \times D$-凸的,则存在 $(y_1^*, y_2^*) \in C^+ \times C^+$, $(z_1^*, z_2^*) \in D^+ \times D^+$ 且 $[(y_1^*, y_2^*), (z_1^*, z_2^*)] \neq [(0,0), (0,0)]$,使

$$\langle y_1^*, y \rangle + \langle y_2^*, v \rangle + \langle z_1^*, z \rangle + \langle z_2^*, w \rangle \geqslant 0,$$

其中 $(y, v) \in D^2F(\bar{x}, \bar{y})(x, u)$, $(z, w) \in D^2G(\bar{x}, \bar{y})(x, u)$, $(x, u) \in S \times S$.

证明 记 $P(x, u) = D^2F(\bar{x}, \bar{y})(x, u)$, $H(x, u) = D^2G(\bar{x}, \bar{y})(x, u)$. 集 A 为 $\{[(y_1, y_2), (z_1, z_2)] \in (Y \times Y) \times (Z \times Z) \mid$ 存在 $(x, u) \in S \times S$ 使得对某 $(y, v) \in P(x, u)$ 和 $(z, w) \in H(x, u)$, $(y, v) <_{C\times C} (y_1, y_2)$, $(z, w) <_{D\times D} (z_1, z_2)\}$. 显然,$[(0,0), (0,0)] \notin A$.

下证 A 是凸集. 设 $[(y_1, y_2), (z_1, z_2)], [(y'_1, y'_2), (z'_1, z'_2)] \in A$,则存在 $(x, u) \in S \times S$, $(x', u') \in S \times S$ 使对某 $(y, v) \in P(x, u)$, $(z, w) \in H(x, u)$, $(y', v') \in P(x', u')$, $(z', w') \in H(x', u')$,得

$$(y, v) <_{C\times C} (y_1, y_2) \text{ 和 } (z, w) <_{D\times D} (z_1, z_2), \tag{2}$$

$$(y', v') <_{C\times C} (y'_1, y'_2) \text{ 和 } (z', w') <_{D\times D} (z'_1, z'_2). \tag{3}$$

因为 $P(x, u)$, $H(x, u)$ 是凸映射,所以对任意的 $\alpha \in [0,1]$,得

$$\begin{aligned} \alpha(y, v) + (1-\alpha)(y', v') &\in \alpha P(x, u) + (1-\alpha)P(x', u') \\ &\subset P(\alpha(x, u) + (1-\alpha)(x', u')) + C \times C, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \alpha(z, w) + (1-\alpha)(z', w') &\in \alpha H(x, u) + (1-\alpha)H(x', u') \\ &\subset H(\alpha(x, u) + (1-\alpha)(x', u')) + D \times D. \end{aligned} \tag{5}$$

因而由(4)式及(5)式知,存在 $(\bar{y}, \bar{v}) \in P(\alpha x + (1-\alpha)x', \alpha u + (1-\alpha)u')$, $(\xi, \eta) \in C \times C$, $(y_0, v_0) \in H(\alpha x + (1-\alpha)x', \alpha u + (1-\alpha)u')$, $(\zeta, \tau) \in D \times D$ 使得

$$\alpha(y, v) + (1-\alpha)(y', v') = (\bar{y}, \bar{v}) + (\xi, \eta), \tag{6}$$

$$\alpha(z, w) + (1-\alpha)(z', w') = (y_0, v_0) + (\zeta, \tau). \tag{7}$$

从而由(6)式,(7)式,(2)式及(3)式得

$$(\bar{y},\bar{v})=\alpha(y,v)+(1-\alpha)(y',v')-(\xi,\eta)\leqq_{C\times C}\alpha(y,v)+(1-\alpha)(y',v')$$
$$=(\alpha y+(1-\alpha)y',\alpha v+(1-\alpha)v')<_{C\times C}(\alpha y_1+(1-\alpha)y'_1,\alpha y_2+(1-\alpha)y'_2)$$
$$(y_0,v_0)=\alpha(z,w)+(1-\alpha)(z',w')-(\zeta,\tau)\leqq_{D\times D}\alpha(z,w)+(1-\alpha)(z',w')$$
$$=(\alpha z+(1-\alpha)z',\alpha w+(1-\alpha)w')<_{D\times D}(\alpha z_1+(1-\alpha)z'_1,\alpha z_2+(1-\alpha)z'_2).$$

而 S 是凸集，故 $\alpha x+(1-\alpha)x'\in S,\alpha u+(1-\alpha)u'\in S$，因此

$$[(\alpha y_1+(1-\alpha)y'_1,\alpha y_2+(1-\alpha)y'_2),(\alpha z_1+(1-\alpha)z'_1,\alpha z_2+(1-\alpha)z'_2)]$$
$$=\alpha[(y_1,y_2),(z_1,z_2)]+(1-\alpha)[(y'_1,y'_2),(z'_1,z'_2)]\in A,$$

即 A 是凸集，由于 $\mathrm{int}C\neq\varnothing,\mathrm{int}D\neq\varnothing$，所以 $\mathrm{int}A\neq\varnothing$. 根据凸集分离定理，存在 $(y_1^*,y_2^*)\in C^+\times C^+,(z_1^*,z_2^*)\in D^+\times D^+$ 且 $[(y_1^*,y_2^*),(z_1^*,z_2^*)]\neq[(0,0),(0,0)]$ 使得

$$\langle(y_1^*,y_2^*),(y_1,y_2)\rangle+\langle(z_1^*,z_2^*),(z_1,z_2)\rangle\geqslant 0,\forall\ [(y_1,y_2),(z_1,z_2)]\in A. \tag{8}$$

设 $(x,u)\in S\times S,(y,v)\in P(x,u),(z,w)\in H(x,u),(c_1,c_2)\in\mathrm{int}C\times\mathrm{int}C,(d_1,d_2)\in\mathrm{int}D\times\mathrm{int}D$，则对 $\forall\ \varepsilon>0,[(y+\varepsilon c_1,v+\varepsilon c_2),(z+\varepsilon d_1,z+\varepsilon d_2)]\in A$，从而由(8)式得

$$\langle(y_1^*,y_2^*),(y+\varepsilon c_1,v+\varepsilon c_2)\rangle+\langle(z_1^*,z_2^*),(z+\varepsilon d_1,z+\varepsilon d_2)\rangle\geqslant 0. \tag{9}$$

在(9)式中令 $\varepsilon\to+\infty$，得 $\langle(y_1^*,y_2^*),(c_1,c_2)\rangle+\langle(z_1^*,z_2^*),(d_1,d_2)\rangle\geqslant 0,\forall\ (c_1,c_2)\in\mathrm{int}C\times\mathrm{int}C,(d_1,d_2)\in\mathrm{int}D\times\mathrm{int}D.$

因而

$$\langle(y_1^*,y_2^*),(c_1,c_2)\rangle+\langle(z_1^*,z_2^*),(d_1,d_2)\rangle\geqslant 0,$$
$$\forall\ (c_1,c_2)\in C\times C=\mathrm{cl}C\times\mathrm{cl}C=\mathrm{clint}C\times\mathrm{clint}C,(d_1,d_2)\in D\times D$$
$$=\mathrm{cl}D\times\mathrm{cl}D=\mathrm{clint}D\times\mathrm{clint}D.$$

故得 $(y_1^*,y_2^*)\in C^+\times C^+,(z_1^*,z_2^*)\in D^+\times D^+,[(y_1^*,y_2^*),(z_1^*,z_2^*)]\neq[(0,0),(0,0)]$.

在(9)式中令 $\varepsilon\to 0^+$，得 $\langle(y_1^*,y_2^*),(y,v)\rangle+\langle(z_1^*,z_2^*),(z,w)\rangle\geqslant 0$，

即

$$\langle y_1^*,y\rangle+\langle y_2^*,v\rangle+\langle z_1^*,z\rangle+\langle z_2^*,w\rangle\geqslant 0,$$
$$\forall\ (x,u)\in S\times S,(y,v)\in P(x,u),(z,w)\in H(x,u).$$

参考文献：

[1] BAIER J, JAHN J. *On subdifferentials of set-valued maps* [J]. JOTA, 1999, **100**(1): 233－240.

[2] CORLEY H W. *Optimality conditions for maximizations of set-valued functions* [J]. JOTA, 1988, **58**(1): 1－10.

[3] LIN Lai-jiu. *Optimization of set-valued functions* [J]. JMAA, 1994, **186**(1): 30－51.

[4] LI Z F. *Benson proper efficiency in the vector optimization of set-valued maps* [J]. JOTA, 1998, **98**(3): 623－649.

[5] BHATIA D. *Lagrangian duality for preinvex set-valued functions* [J]. JMAA, 1997, **214**(2): 599－612.

[6] LI Z. *A theorem of the alternative and its application to the optimization of set-valued maps* [J]. JOTA, 1999, **100**(2): 365－375.

[7] BOLINTINEANU S, MAGHRI M E. *Second-order efficiency conditions and sensitivity of efficient*

points [J]. JOTA, 1998, **98**(3): 569—592.

[8] AGHEZZAF B, HACHIMI M. *Second-order optimality conditions in multiobjective optimization problems* [J]. JOTA, 1999, **102**(1): 37—50.

Necessary Conditions for Second-Order Optimality of Vector Optimization of Set-Valued Maps

JIA Ji-hong

(Dongguan University of Technology, Guangdong 523106, China)

Abstract: In this paper, the concept of second-order tangent set of set-valued maps is given in the Euclidean space. Based on the second-order tangent set, the second-order tangent derivative of set-valued maps is defined. Then, two necessary conditions for second-order optimality for the weak minimal in the vector optimization of set-valued maps are obtained.

Key words: second-order tangent set; second-order tangent derivative; weak minimal.