第 24 卷第 2 期
2004 年 5 月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 24 No. 2
May 2004

分次强素根与分次广义诣零根的构造*

王 尧[1,2]， 任艳丽[2]
(1. 南开大学数学科学学院，天津 300071 2. 鞍山师范学院数学系，辽宁 鞍山 114005)

摘 要：对于半群分次环的分次强素根和分次广义诣零根，分别给出它们的构造.

关键词：分次强素根；gsm-系；分次广义诣零根；分次幂零元.
分类号：AMS(2000) 16W50/CLC number：O153.3
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)02-0338-05

设 M 是一个半群. 一个结合环(未必有 1)称为 M-分次环，如果 R 有一族子加群 $\{R_x|x\in M\}$，使得 $R=\bigoplus\limits_{x\in M}R_x$(加群直和)且 $R_xR_y\subseteq R_{xy},\forall\ x,y\in M$. M-分次环 R 的一个理想 I 称为分次理想，若 $I=\bigoplus\limits_{x\in M}(R_x\cap I)=\bigoplus\limits_{x\in M}I_x$，其中 $I_x=R_x\cap I,\forall\ x\in M$. 或等价地，若 $r=\sum\limits_{x\in M}r_x\in I$，则 $r_x\in I,\forall\ x\in M$. 令 $h(R)=\bigcup\limits_{x\in M}R_x$，称为 R 的齐次元集，其中的元素称为 R 的齐次元. 当 $I=\bigoplus\limits_{x\in M}I_x$ 是 R 的分次理想时，$h(I)=\bigcup\limits_{x\in M}I_x$，$h(R/I)=\{f+I|f\in h(R)\}$. 对于任意 $r\in R=\bigoplus\limits_{x\in M}R_x$，$r$ 可以唯一地写成 $r=\sum\limits_{x\in M}r_x$，其中 $r_x\in R_x$，且只有有限个 $r_x\neq 0$，的形式. 对于 M-分次环 R 的任何齐次元素 $a\in h(R)$，由 a 在 R 中生成的理想 $(a)=Za+Ra+aR+RaR$，a 在 R 中的左零化子 $\mathrm{ann}_l(a)=\{r\in R|ra=0\}$ 和右零化子 $\mathrm{ann}_r(a)=\{r\in R|ar=0\}$，都是 R 的分次理想[1].

1 分次强素根的构造

设 $R=\bigoplus\limits_{x\in M}R_x$ 是一个 M-分次环. 称 R 是分次(右)强素环，如果 R 的每一个非零分次理想 I 都包含一个有限齐次元集 $F\subseteq h(I)$，使得对一切 $a\in h(R)$，若 $Fa=0$，就有 $a=0$. 称 R 的一个分次理想 I 是分次(右)强素的，如果分次商环 R/I 是分次强素环. R 的一切分次(右)强素理想之交定义为 R 的分次(右)强素根[2]，记为 $S_G(R)$. 即 $S_G(R)=\bigcap\{P|P$ 是 R 的分次强素理想$\}$. 关于分次强素根，已有许多研究[2-4]. 但对于 $S_G(R)$ 能否如分次素根那样[5]给出其中的元素刻划，至今还未见讨论. 本节的目的就是解决这个问题.

命题 1.1 设 $I=\bigoplus\limits_{x\in M}I_x$ 是 M-分次环 $R=\bigoplus\limits_{x\in M}R_x$ 的分次理想. 则 I 是分次强素理想当且仅

* 收稿日期：2001-12-10
基金项目：辽宁省教育厅科研基金项目(2024201051)
作者简介：王 尧(1962-)，博士，教授.

当对任何齐次元 $b \notin h(I)$，存在有限齐次元集 $F \subseteq h((b))$，其中 (b) 为由 b 生成的分次理想，使得对一切 $a \in h(R)$，若 $Fa \subseteq h(I)$ 就有 $a \in h(I)$.

证明 设 $I = \bigoplus_{x \in M} I_x$ 是 M- 分次环 $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$ 的分次强素理想，则 R/I 是分次强素环. 因此对任何 $b \notin h(I)$，$((b)+I)/I \neq \{\bar{0}\}$. 于是存在有限齐次元素集 $\bar{F} = \{f_1 + I, \cdots, f_n + I\} \subseteq ((b)+I)/I$，其中 $f_i \in h((b))$，$i = 1, \cdots, n$，使得对一切 $\bar{a} \in h(R/I)$，若 $\bar{F}\bar{a} = \bar{0}$ 就有 $\bar{a} = \bar{0}$. 即对任何 $a \in h(R)$，若 $Fa \subseteq h(I)$，其中 $F = \{f_1, \cdots, f_n\} \subseteq h((b))$，就有 $a \in h(I)$.

反之，假设对任何齐次元素 $b \notin h(I)$，存在有限齐次元集 $F \subseteq h((b))$，使得对一切 $a \in h(R)$，若 $Fa \subseteq h(I)$ 就有 $a \in h(I)$. 现在，对 R/I 的任何非零分次理想 J/I，则有 $b \in h(J)$ 但 $b \notin h(I)$. 依假设，存在齐次元集 $F \subseteq h((b)) \subseteq h(J)$，使得对一切 $a \in h(R)$，若 $Fa \subseteq h(I)$，就有 $a \in h(I)$. 令 $\bar{F} = \{f_i + I \mid f_i \in F\}$，则 $\bar{F}$ 是 $h(J/I)$ 的有限集，且对任何 $\bar{a} \in h(R/I)$，若 $\bar{F}\bar{a} = \bar{0}$，即 $Fa \subseteq h(I)$，由上面讨论知 $a \in h(I)$，即 $\bar{a} = \bar{0}$. 故 R/I 是分次强素环，因此 I 是分次强素理想.

定义 1.2 设 $P = \bigoplus_{x \in M} P_x$ 是 $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$ 的一个分次理想，G 是 R 的一个齐次元集，称 (G, P) 是 R 的一个 gsm- 系，如果 (1) $G \cap P \subseteq \{0\}$；(2) 对任何 $g \in G$，存在有限齐次元子集 $F \subseteq h((g))$，使得对一切齐次元 $a \notin h(P)$，有 $Fa \cap G \neq \varnothing$.

易见，$R = \bigoplus_{x \in M} R_x$ 的一个分次理想 $I = \bigoplus_{x \in M} I_x$ 是分次强素理想当且仅当 $(h(R) \backslash h(I), I)$ 是一个 gsm- 系.

定理 1.3 对任何 M- 分次环 $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$，$S_G(R) = \{r = \sum_{x \in M} r_x \in R \mid$ 如果存在 gsm- 系 (G_x, P_x) 使得 $r_x \in G_x$，则必 $0 \in G_x, \forall x \in M\}$.

证明 设 $r = \sum_{x \in M} r_x \in S_G(R)$，则每一个 $r_x \in S_G(R)$. 对任一 $x \in M$，假设有 gsm- 系 (G_x, P_x) 使得 $r_x \in G_x$. 若 $0 \notin G_x$，则 $G_x \cap P_x = \varnothing$. 由 Zorn 引理，可以选取一个分次理想 Q_x，使得 $P_x \subseteq Q_x$ 且 $G_x \cap Q_x = \phi$ 是极大的. 这样就有 $r_x \notin Q_x$. 下证下 Q_x 是一个分次强素理想，从而 $r_x \notin S_G(R)$，得到一个矛值.

设 $b \notin h(Q_x)$，则 $Q_x + (b)$ 真包含 Q_x，因而 $(Q_x + (b)) \cap G_x \neq \varnothing$. 故存在 $d \in G_x$ 使得 $(d) \subseteq Q_x + (b)$. 依 gsm- 系的定义，存在一个有限齐次元集 $F_x = \{f_1, \cdots, f_n\} \subseteq h((d))$ 使得 $F_x c \cap G_x \neq \varnothing$，对一切 $c \notin h(P_x)$. 因为 $F_x \subseteq Q_x + (b)$，所以每一个 f_i 具有形式 $f_i = q_i + b_i$，对某 $q_i \in h(Q_x)$，$b_i \in h((b))$. 令 $F'_x = \{b_1, \cdots, b_n\}$，则 $F'_x \subseteq (b)$. 设 $a \in h(R)$ 使得 $F'_x a \subseteq h(Q_x)$，则 $F_x a \subseteq h(Q_x)$. 若 $a \notin h(Q_x)$，则由 $P_x \subseteq Q_x$ 知 $a \notin h(P_x)$. 于是由刚才讨论知 $F_x a \cap G_x \neq \varnothing$. 这与 $G_x \cap Q_x = \varnothing$ 矛盾. 故 $a \in h(Q_x)$. 据命题 1.1 知 Q_x 是一个分次强素理想.

另一方面，设 $r = \sum_{x \in M} r_x \notin S_G(R)$，则必有 R 的某一分次强素理想 P，使得 $r \notin P$，从而有某一 $r_x \notin P$. 于是存在一个 gsm- 系 $(h(R) \backslash h(P), P)$，使得 $r_x \in h(R) \backslash h(P)$. 但 $0 \notin h(R) \backslash h(P)$. 故 $r \notin \{r = \sum_{x \in M} r_x \in R \mid$ 如果存在 gsm- 系 (G_x, P_x) 使得 $r_x \in G_x$，则必 $0 \in G_x, \forall x \in M\}$.

2 分次广义诣零根的构造

设 $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$ 是 M- 分次环，$I = \bigoplus_{x \in M} I_x$ 是 R 的一个分次理想. 如果对任意 $a, b \in h(R)$，由

$ab \in I$ 可以推出 $a \in I$ 或 $b \in I$，则称 I 是 R 的一个分次完全素理想.

易见，R 的分次理想 P 是分次完全素理想 $\Leftrightarrow R/P$ 没有非零齐次零因子.

定义 2.1 设 $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$ 是一个 M- 分次环. 称 $N_G^g(R) = \bigcap \{P \mid P$ 是 R 的分次完全素理想$\}$ 为 R 的分次广义诣零根. 当 $N_G^g(R) = 0$ 时，称 R 是 N_G^g- 半单的.

定义 2.2 设 $I = \bigoplus_{x \in M} I_x$ 是 M- 分次环 $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$ 的一个分次理想，$G \subseteq h(R)$. 称 (G, I) 是 R 的一个 gcm- 系，如果 (1) $G \cap P \subseteq \{0\}$；(2) 对任何 $a \in G$ 和 $b \notin h(I)$，总有 $ab \in G$.

类似于定理 1.3 可证得 $N_G^g(R)$ 的元素刻划如下

定理 2.3 设 $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$ 是 M- 分次环，则 $N_G^g(R) = \{r = \sum_{x \in M} r_x \in R \mid$ 如果存在 gcm- 系 (G_x, I_x) 使得 $r_x \in G_x$，则 $0 \in G_x, \forall\, x \in M\}$.

为了给出 $N_G^g(R)$ 的另一个构造，我们先做一些准备.

定义 2.4 称 M- 分次环 $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$ 的一个元素 $r = \sum_{x \in M} r_x$ 是分次幂零元，如果它的每一个齐次分量 r_x 都是幂零元.

命题 2.5 设 M- 分次环 $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$ 没有非零齐次幂零元，$0 \neq a \in h(R)$. 则有

(1) $\mathrm{ann}_r(a) = \mathrm{ann}_l(a)$；

(2) $a \notin \mathrm{ann}_l(a)$；

(3) 若 $r \in R$ 且 $ra \in \mathrm{ann}_l(a)$，则 $r \in \mathrm{ann}_l(a)$；

(4) 分次商环 $R/\mathrm{ann}_l(a)$ 没有非零齐次幂零元.

证明 (1) 设 $r = \sum_{x \in M} r_x \in R$ 使得 $ra = 0$，即 $\sum_{x \in M} r_x a = 0$，则有 $r_x a = 0, \forall\, x \in M$. 因而 $(ar_x)^2 = ar_x ar_x = 0, \forall\, x \in M$. 由假设 R 没有非零齐次幂零元知 $ar_x = 0, \forall\, x \in M$，从而 $ar = 0$. 同理，若 $ar = 0$，则有 $ra = 0$. 这说明 $\mathrm{ann}_r(a) = \mathrm{ann}_r(a)$.

(2) 由 $a^2 \neq 0$ 即知.

(3) 设 $r = \sum_{x \in M} r_x$ 且 $ra \in \mathrm{ann}_l(a)$，即 $ra^2 = 0$，则有 $r_x a^2 = 0, \forall\, x \in M$. 随之有 $(ar_x a)^2 = ar_x a^2 r_x a = 0$，故依假设知 $ar_x a = 0, \forall\, x \in M$. 这样又有 $(r_x a)^2 = 0$，因而 $r_x a = 0, \forall\, x \in M$. 故 $r = \sum_{x \in M} r_x \in \mathrm{ann}_l(a)$.

(4) 不妨设有 $b \in h(R)$ 使得 $b^2 \in \mathrm{ann}_l(a)$. 于是有 $b^2 a = 0$，从而 $(bab)^2 = 0$. 由假设知 $bab = 0$，故有 $(ba)^2 = 0$，进而 $ba = 0$，于是有 $b \in \mathrm{ann}_l(a)$.

定理 2.6 $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$ 是 N_G^g- 半单的 $\Leftrightarrow R = \bigoplus_{x \in M} R_x$ 没有非零的分次幂零元 $\Leftrightarrow R = \bigoplus_{x \in M} R_x$ 没有非零齐次幂零元.

证明 设 $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$ 是 N_G^g- 半单的，即 $N_G^g(R) = 0$，则 $R \cong_{gr} R/\{0\} = R/\bigcap P_\alpha \cong_{gr} \sum_s R/P_\alpha$(亚直和)，其中 P_α 取遍 R 的一切分次完全素理想. 由于每一个 R/P_α 没有非零齐次零因子，故 R/P_α 没有非零齐次幂零元. 所以 R 没有非零齐次幂零元.

反之，设 $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$ 没有非零齐次幂零元，我们证明，对于任一 $0 \neq a \in h(R)$，都有一个分次完全素理想 $P(a)$，使得 $a \notin P(a)$. 这样就有 $N_G^g(R) = \{0\}$.

令 $\Omega(a) = \{I$ 是 R 的分次理想 $\mid a \notin h(I)$，如果 $ra \in I$，则 $r \in I$，且 R/I 没有非零齐次幂

零元素}. 由命题 2.5 知 $\operatorname{ann}_l(a) \in \Omega(a) \neq \varnothing$. 易见 $\Omega(a)$ 中任何升链之并仍在 $\Omega(a)$ 中. 这样由 zorn 引理知 $\Omega(a)$ 中存在一个极大元 $P(a)$.

任取 $b \in h(R)$ 且 $b \notin h(P(a))$. 令 $Q = \{s \in R | bs \in P(a)\}$. 则 $Q \supseteq P(a)$, 且 $Q/P(a) = \operatorname{ann}_r(b + P(a))$ 是齐次元 $b + P(a)$ 在 $R/P(a)$ 中的右零化子. 由命题 2.5(1) 知 $\operatorname{ann}_l(b + P(a)) = \operatorname{ann}_r(b + P(a))$ 是 $R/P(a)$ 的分次理想. 因为 $b \notin h(P(a))$, 故 $ba \notin P(a)$, 所以 $a \notin Q$. 如果 $ra \in Q$, 则 $bra \in P(a)$, 从而 $br \in P(a)$, 进一步有 $r \in Q$. 再由命题 2.5(4) 知 $R/Q \cong_{gr} (R/P(a))/(Q/P(a))$ 没有非零齐次幂零元素. 因此 $Q \in \Omega(a)$. 由 $P(a)$ 的极大性知 $Q = P(a)$, 故 $R/P(a)$ 没有非零齐次零因子. 因此 $P(a)$ 是 R 的分次完全素理想.

现在, 对于任何 M- 分次环 $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$, 作

$$\{0\} = N_0^g \subseteq N_1^g \subseteq N_2^g \subseteq \cdots \subseteq N_i^g \subseteq N_{i+1}^g \subseteq \cdots,$$

其中当 N_i^g 已经定义时, N_{i+1}^g 定义为 R 的由一切满足 $a^k \in N_i^g$, 对某正整数 $k = k(a)$, 的齐次元素 $a \in h(R)$ 生成的 R 的分次理想. 令 $M(R) = \bigcup_{i=0}^{\infty} N_i^g$. 易见 $M(R)$ 是 R 的分次理想.

定理 2.7 对任何 M- 分次环 $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$, $N_G^g(R) = M(R)$.

证明 首先, 对任意 $a \in h(R)$. 若 $a^k \in M(R)$, 则 $a^k \in N_i^g$, 对某 i. 因此 $a \in N_{i+1}^g \subseteq M(R)$. 其次, 若 P 是 R 的任意一个分次完全素理想, 则 $M(R) \subseteq P$. 事实上, $N_0^g = \{0\} \subseteq P$. 现在假设 $N_i^g \subseteq P$, 则由 N_{i+1}^g 的定义, 它是由一切满足 $a^k \in N_i^g$, 对某正整数 $k = k(a)$, 的齐次元 $a \in h(R)$ 生成的分次理想, 随之 $a^k \in P$, 故 $a \in P$. 这推出 $N_{i+1}^g \subseteq P$, 从而 $M(R) = \bigcup_{i=0}^{\infty} N_i^g \subseteq P$. 因此 $M(R) \subseteq \bigcap P = N_G^g(R)$, 其中 P 取遍 R 的一切分次完全素理想.

另一方面, 设 $0 \neq a \in h(R)$ 且 $a \notin M(R)$. 令

$H(a) = \{I$ 是 R 的分次理想 | 对任意正整数 $n, a^n \notin h(I)$; 且 R/I 是 N_G^g- 半单的$\}$,

则由定理 2.6 知 $M(R) \in H(a) \neq /$, 且 $H(a)$ 中任何升链之并仍在 $H(a)$ 中. 由 zorn 引理, $H(a)$ 中有极大元 $P(a)$. 对任一齐次元 $b \in h(R)$, $b \notin P(a)$, 定义 $T_b = \{r \in R | br \in P(a)\}$, 则 $P(a) \subseteq T_b \neq \phi$, T_b 对加法封闭. 由于 a 是齐次元, 且 $P(a)$ 为分次理想, 故若 $r = \sum_{x \in M} r_x \in T_b$, 则有 $r_x \in T_b$. 因为对任意 $s \in h(T_b)$ 及任意 $t \in h(R)$, $bs \in P(a)$, 所以 $bst \in P(a)$, $st \in T_b$, 且 $(sb)^2 \in P(a)$. 据 $P(a)$ 的性质和定理 2.6 知 $sb \in P(a)$, 从而 $sbt \in P(a)$, 随之 $(bts)^2 \in P(a)$, 故 $bts \in P(a)$, 即有 $ts \in T_b$. 这证明了 T_b 是 R 的分次理想.

下证对任一齐次元 $b \notin P(a)$, 有 $T_b = P(a)$. 分两种情况讨论.

(一) 设 $b = a^m$, 对某正整数 m. 此时对任意正整数 n, 必有 $a^n \notin T_b$. 这是因为, 若有某 $a^n \in T_b$, 则 $ba^n \in P(a)$, 于是 $a^{m+n} \in P(a)$, 此与 $P(a)$ 的性质矛盾. 再设 $c + T_b$ 是 R/T_b 的齐次幂零元素, 即 $c \in h(R)$ 且 $c^k \in T_b$, 对某正整数 k, 则有 $bc^k \in P(a)$. 当 $k = 1$ 时, $bc \in P(a)$. 当 $k > 1$ 时, 由 $bc^k \in P(a)$ 有 $(c^{k-1}bc)^2 \in P(a)$. 据 $P(a)$ 的性质知 $c^{k-1}bc \in P(a)$, 从而 $(c^{k-1}b)^2 \in P(a)$, 进而 $c^{k-1}b \in P(a)$, $bc^{k-1} \in P(a)$. 应用数学归纳法知有 $bc \in P(a)$. 因此, 不论 k 为何值, 总有 $c \in T_b$, 故 $c + T_b$ 是 R/T_b 的零元. 这证明 $T_b \in H(a)$. 再由 $P(a) \subseteq T_b$ 及 $P(a)$ 的极大性知 $T_b = P(a)$.

(二) 设 $b \neq a^m$, 对任意正整数 m. 此时我们断定亦有 $a^n \notin T_b$, 对任意正整数 n. 事实上,

设有某 $a^n \in T_b$，则 $ba^n \in P(a)$，于是有 $a^n b \in P(a)$，即 $b \in T_{a^n}$. 但由前一种情况的证明知 $T_{a^n} = P(a)$，故 $b \in P(a)$，此与假设 $b \notin P(a)$ 矛盾. 因此，由(一) 可得 $T_b = P(a)$.

最后，设有齐次元 $u, v \in h(R)$，$uv \in P(a)$ 而 $u \notin P(a)$，则 $v \in T_u = P(a)$. 这说明 $P(a)$ 是 R 的分次完全素理想，且 $a \notin P(a)$. 这样，$a \notin \bigcap P = N_G^g(R)$，其中 P 取遍 R 的一切分次完全素理想. 从而 $N_G^g(R) \subseteq M(R)$. □

参考文献：

[1] KARPILOVSKY G. *The Jacobson Radical of Classical Rings* [M]. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 53. London: Longman Scientific and Technical, 1991.

[2] BEATTIE M, STEWART P. *Graded radicals of graded rings* [J]. Acta. Math. Hungar, 1991, **58**(3—4): 261—272.

[3] NASTASESCY C, VAN OYSTAEYEN F. *The strongly prime radical of graded rings* [J]. Bull. Soc. Math. Bely., Ser. B, 1984, **36**: 243—251.

[4] PARMENTER M M, PASSMAN D S, STEWART P N. *The strongly prime radical of crossed products* [J]. Comm. Algebra, 1984, **12**(9—10): 1099—1113.

[5] 王尧，任艳丽. 分次根、弱分次根与自反根 [J]. 数学学报，1999，**42**(1)：71—76.
WANG Yao, REN Yan-li. *The graded radicals, weakly graded radicals and reflected radicals* [J]. Acta Math. Sinica, 1999, **42**(1): 71—76. (in Chinese)

[6] PARMENTER M, STEWART P, WIEGANDT R. *On the Groenwald-Heyman strongly prime radical* [J]. Quaest Math., 1984, **7**: 225—240.

[7] MCCOY N. *Completely prime and completely semi-prime ideals* [J]. Collog Math. Soc. Janos Bolyai 6, Ring, Modules and Radicals, Hungary, 1971.

[8] 胡先惠，吴品三. 结合环的近似诣零根与广义诣零根 [J]. 数学学报，1988，**31**(5)：645—650.
HU Xian-hui, WU Pin-san. *The generalized nil radical and near nil radical of associative rings* [J]. Acta Math. Sinica, 1988, **31**(5): 645—650. (in Chinese)

The Constructions of Graded Strongly Prime Radical and Graded Generalized Nil Radical

WANG Yao[1,2], REN Yan-li[2]

(1. School of Math. Sci., Nankai University, Tianjin 300071, China;
2. Dept. of Math., Anshan Normal University, Liaoning 114005, China)

Abstract: For any semigroup-graded ring $R = \bigoplus_{x \in M} R_x$, the constructions of graded strongly prime radical and graded generalized nil radical of R are given.

Key words: graded strongly prime radical; gsm-system; graded generalized nil radical; graded nilpotent element.