第24卷第2期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 2
2004年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2004

# 小度数或大度数图中的匹配唯一图*

马海成[1]， 赵海兴[2]
(1. 青海民族学院数学系，青海 西宁 810007；2. 青海师范大学数学系，青海 西宁 810008)

**摘　要**：本文完全刻画了每个顶点的度数小于等于2的图 $G$ 或每个顶点的度数大于等于 $|V(G)|-3$ 的图 $G$ 中的匹配唯一图.

**关键词**：匹配多项式；路树；匹配唯一性.
**分类号**：AMS(2000) 05C75/CLC number：O157.5
**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-341X(2004)02-0369-05

## 1 引 言

本文仅考虑有限的，无向的简单图. 设 $G$ 是有 $n$ 个顶点的图，$G$ 的一个匹配是指 $G$ 的一个生成子图，它的每个分支或是孤立点或是孤立边. $t$- 匹配是指具有 $t$ 条边的匹配. 文[1]定义图 $G$ 的匹配多项式为：

$$M(G,W)=\sum_{t\geqslant 0}P(G,t)x^{n-2t}y^{t},$$

这里 $P(G,t)$ 是 $G$ 的 $t$- 匹配的数目，矢量 $W=(x,y)$ 且 $x,y$ 分别表示顶点和边的权重. 如果我们置 $y=-1$，便得到[1]中定义的图 $G$ 的匹配多项式：

$$\mu(G,x)=\sum_{t\geqslant 0}(-1)^{t}P(G,t)x^{n-2t}.$$

很明显，这两个多项式相互确定，因此以下概念对它们而言是一致的. 若两个图 $G$ 和 $H$ 有 $\mu(G,x)=\mu(H,x)$，则称图 $G$ 和 $H$ 是匹配等价的. 若与图 $G$ 匹配等价的任何图 $H$，都有 $H\cong G$，则称图 $G$ 是匹配唯一的.

自从 Farrell E J 研究图的匹配唯一性以来，已经找到了许多匹配唯一图[2-5]，但由于所用的方法大多是比较两个图的匹配多项式的系数，因而这项工作难度较大，进展缓慢，仍有大量的问题尚未解决. 本文充分利用匹配多项式 $\mu(G,x)$ 的根的信息，完整地刻画了每个顶点的度数小于等于2的图 $G$ 或每个顶点的度数大于等于 $|V(G)|-3$ 的图 $G$ 中的匹配唯一图.

在本文中，用 $K_1$ 表示一个孤立点. 用 $P_n(n\geqslant 2)$ 表示有 $n$ 个点的路. 用 $C_m(m\geqslant 3)$ 表示有

* 收稿日期：2001-10-17
基金项目：教育部科学技术研究重点项目(03134)资助课题.
作者简介：马海成(1965- )，副教授.

$m$ 个点的圈. 用 $T_{i,j,k}$ 表示只有一个 3 度点，三个 1 度点，且这个 3 度点到三个 1 度点的距离分别为 $i,j,k$ 的树. 用 $A$ 表示一些数 3 组成的可重集，用 $B$ 表示大于等于 1 的自然数组成的可重集，用 $C$ 表示一些大于等于 3 的自然数组成的可重集，其中 $A,B,C$ 在本文中可为空集. 没有说明的记号和术语参见[1]. 我们的主要结果是下面的定理：

**定理** 设图 $G$ 的每个顶点的度数小于等于 2，则图 $G$ 是匹配唯一的当且仅当 $G$ 是下列图之一：

1) $G \cong rK_1 \cup sP_3 \cup [\cup_{i\in B} P_{2i}]$，这里 $r,s$ 是非负整数，且 $r,s,|B|$ 不全为零.

2) $G \cong [\cup_{i\in A} P_i] \cup_{j\in B} P_{2j}] \cup [\cup_{k\in C} C_k]$，其中 $C \cap D$ 是空集，这里 $D = \{x+1 \mid x \in A \cup B'\}$，$B' = \{2j \mid j \in B\}$，$A,B,C$ 不全为空集.

## 2 若干引理

**引理 1**[1] 设图 $G$ 有连通 $k$ 个分支 $G_1,G_2,\cdots,G_k$，则

$$\mu(G,x) = \prod_{i=1}^{k} \mu(G_i,x).$$

**引理 2**[1] 设 $u \in V(G)$，则

$$\mu(G,x) = x\mu(G\backslash u,x) - \sum_{i\sim u} \mu(G\backslash\{u,i\},x),$$

其中 $\sum$ 是对所有邻接于点 $u$ 的顶点 $i$ 求和，$i \sim u$ 表示 $iu \in E(G)$.

**引理 3** (1) $\mu(P_{2m+1},x) = \mu(P_m,x)\mu(C_{m+1},x)$，$(m \geqslant 2)$.

(2) $\mu(T_{1,1,n},x) = \mu(K_1,x)\mu(C_{n+2},x)$.

(3) $\mu(T_{1,2,2},x)\mu(P_3,x) = \mu(K_1,x)\mu(P_2,x)\mu(C_6,x)$.

(4) $\mu(T_{1,2,3},x)\mu(C_3,x) = \mu(K_1,x)\mu(C_9,x)$.

(5) $\mu(T_{1,2,4},x)\mu(C_3,x)\mu(C_5,x) = \mu(K_1,x)\mu(C_{15},x)$.

**证明** (1) 对 $P_{2m+1}$ 的最中间一点和 $C_{m+1}$ 的任一点应用引理 2.

(2) 对 $T_{1,1,n}$ 的距 3 度点距离为 1 的一个悬挂点和 $C_{n+2}$ 的任一点应用引理 2.

(3)—(4) 由于 $\mu(K_1,x) = x$，$\mu(P_2,x) = x^2-1$，$\mu(P_3,x) = x^3-2x$，$\mu(C_3,x) = x^3-3x$，$\mu(C_5,x) = x^5-5x^3+5x$，$\mu(C_6,x) = x^6-6x^4+9x^2-2$，$\mu(C_9,x) = x^9-9x^7+27x^5-30x^3+9x$，$\mu(C_{15},x) = x^{15}-15x^{13}+90x^{11}-275x^9+450x^7-378x^5+140x^3-15x$，$\mu(T_{1,2,2},x) = x^6-5x^4+5x^2-1$，$\mu(T_{1,2,3},x) = x^7-6x^5+9x^3-3x$，$\mu(T_{1,2,4},x) = x^8-7x^6+14x^4-8x^2+1$.

以上结论可以直接验证. □

熟知，对任意图 $G$，匹配多项式 $\mu(G,x)$ 的根都是实数[1]. 我们用 $\gamma(G)$ 表示 $\mu(G,x)$ 的最大根.

**引理 4**[1] 若 $u \in V(G)$，且 $G$ 连通，则 $\gamma(G)$ 大于 $\gamma(G\backslash u)$.

**引理 5** (1) 若 $m > n$，则 $\gamma(P_m) > \gamma(P_n)$.

(2) 若 $m > n \geqslant 3$，则 $\gamma(C_m) = \gamma(P_{2m-1}) > \gamma(P_{2n-1}) = \gamma(C_n)$.

(3) $\gamma(T_{1,1,n}) = \gamma(C_{n+2}) = \gamma(P_{2n+3})$.

(4) $\gamma(T_{1,2,2})=\gamma(C_6)=\gamma(P_{11})$.

(5) $\gamma(T_{1,2,3})=\gamma(C_9)=\gamma(P_{17})$.

(6) $\gamma(T_{1,2,4})=\gamma(C_{15})=\gamma(P_{29})$.

**证明** 由引理 4 得(1). 由引理 3,取各等式两边的最大根得(2)—(6). □

**引理 6**[6] 设 $T$ 是一棵树,则 $T$ 的最大特征根小于 2 当且仅当 $T\in\Omega$. 其中

$$\Omega=\{K_1,P_n,T_{1,1,n},T_{1,2,2},T_{1,2,3},T_{1,2,4}\}.$$

**定义 1**[1] 设 $G$ 是一个连通图,$u\in V(G)$,定义图 $G$ 的从点 $u$ 出发的路树 $T(G,u)$ 如下:

$V(T(G,u))=\{G$ 中从点 $u$ 开始的路(包括点 $u$)$\}$.

$E(T(G,u))=\{(P_1,P_2)\mid P_1,P_2$ 是 $G$ 中从点 $u$ 开始的路,且一条路是另一条路的极大真子路$\}$.

**引理 7** 对任意连通图 $G$,$\gamma(G)$ 等于它的任意顶点的路树的最大特征根.

**证明** 设 $u\in V(G)$,$G$ 关于点 $u$ 的路树为 $T=T(G,u)$,则由[1]的定理 6.1.1,推论 2.1.4 有

$$\frac{\mu(G\backslash u,x)}{\mu(G,x)}=\frac{\varphi(T\backslash u,x)}{\varphi(T,x)}$$

且 $\mu(G,x)$ 整除 $\varphi(T,x)$. 这里 $\varphi(T,x)$ 是树 $T$ 的特征多项式. 由于 $\mu(G,x)$ 的最大根大于 $\mu(G\backslash u,x)$ 的最大根,$\varphi(T,x)$ 的最大根大于 $\varphi(T\backslash u,x)$ 的最大根,故结论成立. □

**定义 2**[7] 图 $G$ 称为几乎正则图,若 $G$ 中任何两个点的度数之差的绝对值不超过 1.

**引理 8**[7] 若图 $G$ 和 $H$ 匹配等价,而 $G$ 是几乎正则图,则 $H$ 也是几乎正则图,且 $H$ 和 $G$ 有相同的度序列.

**引理 9**[3] $rK_1,P_3,P_{2n},C_m(m\geqslant 3)$ 都是匹配唯一的,其中 $r$ 为正整数.

## 3 定理的证明

**引理 10** 图 $G=rK_1\cup sP_3\cup[\bigcup_{i\in B}P_{2i}]$ 是匹配唯一的. 这里 $r,s$ 是非负整数且 $r,s,|B|$ 不全为零.

**证明**(对 $|B|+s$ 用数学归纳法) 由引理 9 知 $|B|+s=0$ 时,结论成立.

考虑 $G$ 的最长的一条路 $P_k$,$k=2m$ 或 3. 设 $H$ 是 $G$ 的一个匹配等价图,则 $\gamma(H)=\gamma(P_k)$. 设 $H_1$ 是 $H$ 的一个连通分支,使 $\gamma(H)$ 是 $\mu(H_1,x)$ 的一个根. 由引理 7 和引理 6 得:$H_1$ 关于任意点的路树 $T(H_1,u)\in\Omega$. 由 $k=2m$ 或 3 以及引理 5 知:$H_1$ 关于任意点的路树 $T(H_1,u)$ 是一条路. 因而 $H_1$ 只能是一个圈或是一条路. 由引理 5(2) 知:$H_1$ 只能是一条路. 由引理 5(1) 知:

$$H_1\cong P_k$$

即

$$H\cong P_k\cup H_2$$

由归纳假设,若 $k=2m$,

$$H_2\cong rK_1\cup sP_3\cup[\bigcup_{i\in B\backslash\{m\}}P_{2j}];$$

若 $k=3$,

$$H_2 \cong rK_1 \cup (s\text{-}1)P_3 \cup [\bigcup_{i\in B} P_{2j}].$$

因而 $H \cong G$. □

**引理 11** 图 $G = [\bigcup_{i\in A} P_i] \cup [\bigcup_{j\in B} P_{2j} \cup [\bigcup_{k\in C} C_k]$，若 $C \cap D$ 是空集，则 $G$ 是匹配唯一的，其中 $D = \{x+1 | x \in A \cup B'\}$，$B' = \{2j | j \in B\}$，$A,B,C$ 不全为空集.

**证明**(对 $|A| + |B| + |C|$ 用数学归纳法) 由引理 9 知 $|A| + |B| + |C| = 1$ 时，结论成立.

设 $H$ 是 $G$ 的一个匹配等价图，由引理 8 知 $H$ 是一些圈和路的并. 考虑

$$n = \max\{A \cup B' \cup C'\}, \quad B' = \{2j | j \in B\}, C' = \{2k-1 | k \in C\}.$$

1) 若 $n = 2m$ 为偶数. 必有 $m \in B$. 由于 $\gamma(G) = \gamma(P_{2m})$，比较 $\gamma(G)$ 和 $\gamma(H)$，由引理 5(1)，(2) 知 $H$ 一定有一条长为 $2m$ 的路. 即

$$H \cong P_{2m} \cup H_1,$$

由归纳假设，

$$H_1 \cong [\bigcup_{i\in A} P_i] \cup [\bigcup_{j\in B\setminus\{m\}} P_{2j}] \cup [\bigcup_{k\in C} C_k],$$

从而 $H \cong G$.

2) 若 $n = 2m-1$ 为奇数. 当 $n = 3$ 时，$C = \varnothing$，由引理 10 结论成立. 当 $n = 2m-1 \geqslant 5$ 时，必有 $m \in C$. 由于 $\gamma(G) = \gamma(C_m) = \gamma(P_{2m-1})$ 及引理 5 知，$H$ 不含有长于 $m$ 的圈和长于 $2m-1$ 的路，且 $H$ 必含一个长为 $m$ 的圈或长为 $2m-1$ 的路. 假设 $H$ 含有一个长为 $2m-1$ 的路 $P_{2m-1}$，即

$$H = P_{2m-1} \cup H_1.$$

由 $\mu(G,x) = \mu(H,x) = \mu(C_m,x)\mu(P_{m-1},x)\mu(H_1,x)$，推出

$$[\bigcup_{i\in A} P_i] \cup [\bigcup_{j\in B} P_{2j}] \cup [\bigcup_{k\in C\setminus\{m\}} C_k] \text{ 匹配等价于 } P_{m-1} \cup H_1.$$

由归纳假设

$$[\bigcup_{i\in A} P_i] \cup [\bigcup_{j\in B} P_{2j}] \cup [\bigcup_{k\in C\setminus\{m\}} C_k] \cong P_{m-1} \cup H_1,$$

则 $m-1 \in A \cup B'$. 此时 $m \in D$，从而有 $m \in C \cap D$ 与题设矛盾. 于是 $H$ 必含有一个长为 $m$ 的圈，即

$$H = C_m \cup H_1,$$

从而

$$H_1 \text{ 匹配等价于} [\bigcup_{i\in A} P_i] \cup [\bigcup_{j\in B} P_{2j}] \cup [\bigcup_{k\in C\setminus\{m\}} C_k].$$

由归纳假设得 $H \cong G$. □

**定理的证明** 由引理 3 得定理的必要性. 由引理 10 和引理 11 得定理的充分性. □

**引理 12**[1] 设 $G$ 是有 $n$ 个顶点的图，则 $\mu(G,x) = \sum_{m=0}^{[n\setminus 2]} P(\overline{G},m)\mu(K_{n-2m},x)$，这里 $\overline{G}$ 是 $G$ 的补图.

**推论 1** 图 $G$ 匹配唯一当且仅当它的补图 $\overline{G}$ 匹配唯一.

**推论 2** 设 $G$ 有 $n$ 个顶点且每个顶点的度数是大于等于 $n-3$ 的图，则 $G$ 是匹配唯一的当且仅当它的补图 $\overline{G}$ 是定理中所描述的图之一.

**推论 3** 设 $G$ 是有 $n$ 个顶点的 $k-$ 正则图，当 $k = 0,1,2,n-1,n-2$ 或 $n-3$ 时，$G$ 是

匹配唯一的.

最后,我们提一个问题:是否所有的正则图都是匹配唯一的?

## 参考文献:


[1] GODSIL C D. *Algebraic Combinatorics* [M]. New York. London: Chapman and Hall, 1993.

[2] FARRELL E J. *An introduction to matching polynomials*[J]. Combinatoria Theory, 1979, **27**(B): 76—86.

[3] 郭知熠,俞玉森. 关于两类图的匹配唯一性 [J]. 应用数学, 1989, **2**: 25—32.
GUO Zhi-yi, YU Yu-sen. *On the matching uniqueness of graph families* [J]. Math. Appl., 1989, **2**: 25—32. (in Chinese)

[4] 李改杨. 几类图的匹配唯一性 [J]. 应用数学, 1992, **3**: 53—59.
LI Gai-yang. *The matching uniqueness of several graph families* [J]. Math. Appl., 1992, **3**: 53—59. (in Chinese)

[5] BEEZER R A, FARRELL E J. *The matching polynomials of a regular graph* [J]. Discrete Math., 1995, **137**: 7—8.

[6] CVETKOVIC D M, DOOB M, SACHS H. *Spectra of Graphs* [M]. New York: Academic Press, 1980, 73—77.

[7] FARRELL E J, GUO J M. *On circuit characterizations of nearly regular graph* [J]. Match, 1990, **25**: 115—130.


# The Matching Unique Graphs with Large Degree or Small Degree


MA Hai-cheng[1], ZHAO Hai-xing[2]

(1. Dept. of Math., Qinghai Nationalities College, Xi'ning 810007, China;
2. Dept. of Math., Qinghai Normal University, Xi'ning 810008, China)



**Abstract**: In this paper, all matching unique graphs are obtained for a graph $G$ in which the degree of any vertex is either $\leqslant 2$ or $\geqslant |V(G)|-3$.



**Key words**: matching polynomial; path-tree; the matching unique.