第24卷第3期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 3
2004年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2004

关于紧覆盖分层强 s- 映射*

李进金， 李克典
(漳州师范学院数学系，福建 漳州 363000)

摘 要：本文给出了度量空间的紧覆盖分层强 s-映象的一些新刻画.

关键词：紧覆盖映射；分层强 s-映射；紧有限分解网；σ-局部可数集族.
分类号：AMS(2000) 54E99，54C10，54D55/CLC number：O189.1
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)03-0473-05

用怎样的映射恰好能揭示出度量空间与由 σ- 局部可数集族定义的空间之间的规律这一困惑人们多年的问题已由林寿在文[1]定义的分层强 s- 映射而得到解决. 可见分层强 s- 映射是处理 σ- 局部可数集族的一种有效工具. 文[1]与文[2]分别证明了下面定理A与定理B和定理C

定理 A[1] 正则空间 X 是度量空间的紧覆盖分层强 s- 映象当且仅当 X 具有 σ- 局部可数 k 网.

定理 B[2] 正则空间 X 是度量空间的序列覆盖分层强 s- 映象当且仅当 X 具有 σ- 局部可数 cs^*- 网.

定理 C[2] 正则空间 X 是度量空间的强序列覆盖分层强 s- 映象当且仅当 X 具有 σ- 局部可数 cs- 网.

但，一个很自然又很有趣的问题是

问题 定理A与定理B和定理C是否相互等价?换一句话说，具有 σ- 局部可数 k 网的正则空间是否等价于具有 σ- 局部可数 cs 网的正则空间?这一问题源于如下Foged的著名定理

定理 D[3] 具有 σ- 局部有限 k 网的正则空间等价于具有 σ- 局部有限 cs 网的正则空间.

尽管这一问题尚未解决，但本文给出了度量空间的紧覆盖分层强 s- 映象(或具有 σ- 局部可数 k 网的空间)的一些新刻画，它不仅拓广了文[1]与文[2]的主要结果，而且提供了解决这一问题的途径.

本文约定：空间是满足Hausdorff分离性公理的拓扑空间，映射为连续的满函数，N 表示自然数集并且 $\omega=\{0\}\cup N$. 对于空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 及映射 $f:X\to Y$，记 $f(\mathscr{P})=\{f(P):$

* 收稿日期：2001-04-09
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10271056)
作者简介：李进金(1960-)，男，博士，教授.

$P \in \mathscr{P}\}$，$\overline{\mathscr{P}} = \{\overline{P}: P \in \mathscr{P}\}$. 对于积空间 $\prod_{i \in N} X_i$，p_i 表示从 $\prod_{i \in N} X_i$ 到 X_i 的投影. 文中未定义的术语，符号均以[4]为准. 首先回忆一些基本的定义.

定义 1 设 $f: X \to Y$ 是映射.

(1) f 称为分层强 s- 映射[1]，如果存在以 X 为子空间的积空间 $\prod_{i \in N} X_i$ 满足：对于任意的 $y \in Y$，存在 y 在 Y 中的开邻域序列 $\{V_i\}$ 使每一 $p_i f^{-1}(V_i)$ 是 X_i 的可分子空间. 如果更设所有的 X_i 是度量空间，那么 f 称为可度量的分层强 s- 映射，简记 msss- 映射.

(2) f 称为子序列覆盖映射[5]，对于 Y 的每一收敛序列 S(包含它的极限点)，存在 X 中的紧子集 L 使得 $f(L)$ 是 S 的子序列.

(3) f 称为紧覆盖映射[6]，若 Y 的每一紧子集都是 X 的某个紧子集在 f 下的象.

(4) f 称为序列覆盖映射[7]，若 Y 的每一收敛序列(包含它的极限点)都是 X 的某一紧子集在 f 下的象.

(5) f 称为序列商映射[8]，对于 Y 的每一收敛序列 S(包含它的极限点)，存在 X 中的收敛序列 L 使得 $f(L)$ 是 S 的子序列.

定义 2 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1) 设 K 是空间 X 的紧子集，若存在有限闭集族 $\{K_n: n \leqslant m\}$ 及 $\{P_n: n \leqslant m\} \subset \mathscr{P}$ 使得 $K = \bigcup \{K_n: n \leqslant m\}$ 并且每一 $K_n \subset P_n$，则称 $\mathscr{P}$ 是 K 的 CFP 覆盖[9].

(2) $\mathscr{P}$ 称为 X 的强 k 网[10]，若对 X 中的每个紧子集 K，存在 $\mathscr{P}$ 的可数子族 $\mathscr{P}(K)$ 满足：对 K 的任意紧子集 L 和 X 中包含 L 的开集 V，存在 $\mathscr{P}(K)$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 使 $\mathscr{P}'$ 是 L 的 CFP 覆盖且 $\bigcup \mathscr{P}' \subset V$.

(3) $\mathscr{P}$ 称为 X 的紧有限分解网[11]，若对 X 中的每个紧子集 K 及 X 中包含 K 的开集 V，存在 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 使 $\mathscr{P}'$ 是 K 的 CFP 覆盖且 $\bigcup \mathscr{P}' \subset V$.

(4) $\mathscr{P}$ 称为 X 的序列有限分解网[11]，若对 X 中的每个含极限点的收敛序列 K 及 X 中包含 K 的开集 V，存在 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 使 $\mathscr{P}'$ 是 K 的 CFP 覆盖且 $\bigcup \mathscr{P}' \subset V$.

(5) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 k 网[12]，若对于 X 的任一紧子集 K 及包含 K 的开集 U，存在有限子集族 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$ 使得 $K \subset \bigcup \mathscr{P}' \subset U$.

(6) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 cs 网[13]，若对于 X 的任一收敛序列 $x_n \to x$ 及包含 x 的开集 U，存在 $P \in \mathscr{P}$ 及 $m \in N$ 使得 $\{x\} \cup \{x_n: n \geqslant m\} \subset P \subset U$.

(7) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 cs^* 网[14]，若对于 X 的任一收敛序列 $x_n \to x$ 及包含 x 的开集 U，存在 $P \in \mathscr{P}$ 及子序列 $\{x_{n_i}\}$ 使得 $\{x\} \cup \{x_{n_i}: i \in N\} \subset P \subset U$.

定理 3 对于空间 X，下列条件相互等价：

(1) X 是度量空间的紧覆盖 msss- 映象.

(2) X 具有 σ- 局部可数强 k 网.

(3) X 具有 σ- 局部可数紧有限分解网.

证明 (2)⇒(3) 由定义 2.

(3)⇒(2) 由[15]引理 3.8.

(1)⇒(3) 设空间 X 是度量空间的紧覆盖 msss- 映象，则存在度量空间 M 和紧覆盖 msss- 映射 $f: M \to X$. 由 f 是 msss- 映射，存在度量空间族 $\{M_i\}$ 满足定义 1(1) 的要求. 对于 i

$\in N$,M_i 具有 σ- 局部有限基 $\mathscr{P}_i$. 令 $\mathscr{R}_i=\{M\cap(\bigcap_{j\leqslant i}p_j^{-1}(P_j)):P_j\in\mathscr{P}_j,j\leqslant i\}$,$\mathscr{R}=\bigcup_{i\in N}\mathscr{R}_i$,则 $\mathscr{R}$ 是 M 的基. 对于 $x\in X$,存在 x 的开邻域序列 $\{V_i\}$ 使每一 $p_if^{-1}(V_i)$ 是 M_i 的可分子空间. 对于 $n\in N$,令 $V=\bigcap_{i\leqslant n}V_i$,则

$$|\{R\in f(\mathscr{R}_n):V\cap R\neq\varnothing\}|\leqslant\aleph_0,$$

从而 $f(\mathscr{R}_n)$ 是 X 的局部可数集族. 其次,由 f 是紧覆盖映射,$f(\mathscr{R})$ 是 X 的紧有限分解网. 所以 $f(\mathscr{R})$ 是 X 的 σ- 局部可数紧有限分解网.

(3)⇒(1) 设 X 具有 σ- 局部可数紧有限分解网 $\mathscr{P}=\bigcup\{\mathscr{P}_i:i\in N\}$,其中每一 $\mathscr{P}_i=\{P_\alpha:\alpha\in A_i\}$ 是 X 的关于有限交封闭的局部可数子集族且 $X\in\mathscr{P}_i\subset\mathscr{P}_{i+1}$. 由[1]定理 1.3 的证明,可构造度量空间 M 及 msss- 映射 $f:M\to X$. 下面证明这 msss- 映射是紧覆盖映射. 对于 X 的非空紧子集 K 及 $i\in N$,由[11]引理 3,可设由 $\mathscr{P}_i$ 的元组成的紧子集 K 的极小 CFP 覆盖族为 $\mathscr{F}_i=\{\mathscr{P}_{ij}:j\in N\}$,其中每一 $\mathscr{P}_{ij}=\{P_\alpha:\alpha\in A_{ij}\}$ 被 K 的紧有限分解 $\mathscr{F}_{ij}=\{F_\alpha:\alpha\in A_{ij}\}$ 一一加细. 对于 $n\in N$,置 $\mathscr{P}'_n=\bigwedge_{i,j\leqslant n}\mathscr{P}_{ij}$,$\mathscr{F}'_n=\bigwedge_{i,j\leqslant n}\mathscr{F}_{ij}$,则 $\mathscr{P}'_n\subset\mathscr{P}_n$ 且 $\mathscr{P}'_n$ 是 K 的极小 CFP 覆盖,$\mathscr{F}'_n\subset\mathscr{F}_n$ 且 $\mathscr{F}'_n$ 是 K 的紧有限分解且一一加细 $\mathscr{P}'_n$. 于是存在 A_n 的有限子集 A'_n 使得 $\mathscr{P}'_n=\{P'_\alpha:\alpha\in A'_n\}$ 及 $\mathscr{F}'_n=\{F'_\alpha:\alpha\in A'_n\}$. 置 $L=\{\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}A'_i:\bigcap_{i\in N}F'_{\alpha_i}\neq\varnothing$,则

(a) L 是紧集 $\prod_{i\in N}A'_i$ 中的闭集,从而 L 是 $\prod_{i\in N}A_i$ 中的紧集.

设 $\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}A'_i\backslash L$,则 $\bigcap_{i\in N}F'_{\alpha_i}=\varnothing$,从而存在 $i_0\in N$ 使 $\bigcap_{i\leqslant i_0}F'_{\alpha_i}=\varnothing$. 令 $W=\{(\beta_i)\in\prod_{i\in N}A'_i:\forall\ i\leqslant i_0,\beta_i=\alpha_i\}$,则 W 是 $\prod_{i\in N}A'_i$ 中包含 α 的开集且 $W\cap L=\varnothing$.

(b) $L\subset W$ 且 $f(L)\subset K$.

设 $\alpha=(\alpha_i)\in L$,取定 $x\in\bigcap_{i\in N}F'_{\alpha_i}$,则 $\{P'_{\alpha_i}:i\in N\}$ 是点 x 在 X 中的网[11],因此 $\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=x\in K$,于是 $L\subset M$ 且 $f(L)\subset K$.

(c) $K\subset f(L)$.

设 $x\in K$,对于 $i\in N$,存在 $\alpha_i\in A'_i$ 使 $x\in F'_{\alpha_i}$,设 $\alpha=(\alpha_i)$,则由(b)所证知 $\alpha\in L$,$f(\alpha)=x$,所以 $K\subset f(L)$.

综上所述,f 是紧覆盖映射. □

推论 4[16,17] 对于空间 X,下列条件等价:

(1) X 是度量空间的紧覆盖 ss- 映象.

(2) X 具有局部可数强 k 网.

(3) X 具有局部可数紧有限分解网.

如果更设 X 是正则空间,则它们还与下列条件等价:

(4) X 具有局部可数 k 网.

推论 5[1,2] 对于正则空间 X,则下列条件等价:

(1) X 是度量空间的紧覆盖 msss- 映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖 msss- 映象.

(3) X 是度量空间的子序列覆盖 msss- 映象.

(4) X 是度量空间的序列商 msss- 映象.

(5) X 具有 σ- 局部可数 cs^*- 网.

(6) X 具有 σ- 局部可数强 k 网.

(7) X 具有 σ- 局部可数紧有限分解网.

(8) X 具有 σ- 局部可数序列有限分解网.

(9) X 具有 σ- 局部可数 k 网.

证明 (1)⇒(2)⇒(3) 由定义 1.

(3)⇒(4) 由[4]命题 2.1.17 的证明可得.

(4)⇒(2) 由[4]命题 2.1.17.

(2)⇒(5) 与定理 3(1)⇒(3) 的证明类似.

(5)⇔(8) 由[11]引理 1.

(6)⇔(7) 由定理 3.

(5)⇒(9) 由[4]命题 2.7.15.

(9)⇒(7) 因 X 是正则空间,则 X 具有 σ- 局部可数 k 网等价于 X 具有 σ- 局部可数闭 k 网等价于 X 具有 σ- 局部可数强 k 网.

(7)⇒(1) 由定理 3.

推论 6[1] 对于正则空间 X,下列条件相互等价:

(1) X 是具有 σ- 局部可数 k 网的 k- 空间.(Fréchet 空间)

(2) X 是具有 σ- 局部可数 cs^* 网的 k- 空间.(Fréchet 空间)

(3) X 是具有 σ- 局部可数强 k 网的 k- 空间.(Fréchet 空间)

(4) X 是具有 σ- 局部可数紧有限分解网的 k- 空间.(Fréchet 空间)

(5) X 是具有 σ- 局部可数序列有限分解网的 k- 空间.(Fréchet 空间)

(6) X 是度量空间的紧覆盖商(伪开)msss- 映象.

(7) X 是度量空间的商(伪开)msss- 映象.

(8) X 是度量空间的序列覆盖商(伪开)msss- 映象.

(9) X 是度量空间的子序列覆盖商(伪开)msss- 映象.

(10) X 是度量空间的序列商、商(伪开)msss- 映象.

参考文献:

[1] 林 寿. 局部可数集族,局部有限集族与 Alexandroff 问题 [J]. 数学学报, 1994, **37**(4): 491—496.
LIN Shou. *Locally countable collections, Locally finite collections and Alexandroff's problems* [J]. Acta Math. Sinica, 1994, **37**(4): 491—496. (in Chinese)

[2] 李克典. 关于 msss-映射 [J]. 数学研究与评论, 2000, **20**(2): 223—226.
LI Ke-dian. *On msss-mappings* [J]. J. Math. Res. Exposition, 2000, **20**(2): 223—226. (in Chinese)

[3] FOGED L. *Characterizations of $\aleph$-spaces* [J]. Pacific J. Math., 1984, **110**: 59—63.

[4] 林 寿. 广义度量空间与映射 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.
LIN Shou. *Generalized Metric Spaces and Mappings* [M]. Beijing: Chinese Science Press, 1995. (in Chinese)

[5] LIN Shou, LIU Chuan, DAI Mu-min. *Images on locally separable metric spaces* [J]. Acta Math. Sini-

ca, New Series, 1997, **13**(1): 1—8.
[6] MICHAEL E. $\aleph_0$-*spaces* [J]. J. Math. Mech., 1966, **15**: 983—1002.
[7] SIWIEC F. *Sequence-covering and countably-bi-quotient mappings* [J]. Gen. Top. Appl., 1971, **1**: 143—154.
[8] BOONE J R, SIWIEC F. *Sequentially quotient mappings* [J]. Czech. Math. J., 1976, **26**: 174—182.
[9] 燕鹏飞. 度量空间的紧映象[J]. 数学研究, 1997, **30**(2): 185—187, 198.
YAN Peng-fei. *Compact-images of metric spaces* [J]. J. Math. Study, 1997, **30**(2): 185—187, 198.
[10] 刘川, 戴牧民. 度量空间的紧覆盖 s 象 [J]. 数学学报, 1996, **39**(1): 41—44.
LIU Chuan, DAI Mu-min. *The compact-covering s-images of metric spaces* [J]. Acta Math. Sinica, 1996, **39**(1): 41—44. (in Chinese)
[11] 燕鹏飞, 林寿. 度量空间的紧覆盖 s 映象 [J]. 数学学报, 1999, **42**(2): 241—244.
YAN Peng-fei, LIN Shou. *Compact-covering s-images of metric space* [J]. Acta Math. Sinica, 1999, **42**(2): 241—244. (in Chinese)
[12] O'MEARA P. *On paracompactness in function spaces with open topology* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, **29**: 183—189.
[13] GUTHRIE J A. *A characterization of* $\aleph_0$-*spaces* [J]. Gen. Top. Appl., 1971, **1**: 105—110.
[14] GAO Zhi-min. $\aleph$-*spaces are invariant under perfect mappings* [J]. Q and A in Gen. Top., 1987, **5**: 271—279.
[15] 林寿, 燕鹏飞, 刘川. k 网与 Michael 的两个问题 [J]. 数学进展, 1999, **28**: 143—150.
LIN Shou, YAN Peng-fei, LIU Chuan. *k-networks and Michael's two problems* [J]. Adv. Math. (China), 1999, **28**: 143—150. (in Chines)
[16] 李进金, 江守礼. 关于局部可数网与 ss 映射 [J]. 数学学报, 1999, **42**(5): 827—832.
LI Jin-jin, JIANG Shou-li. *On locally countable networks and strong s-mappings* [J]. Acta Math. Sinica, 1999, **42**(5): 827—832. (in Chinese)
[17] LIN Shou. *On a generalization of Michael's theorem* [J]. Northeastern Math. J., 1988, **4**(2): 162—168.

On Compact-Covering and Stratified Strong s -Mappings

LIN Jin-jin, LI Ke-dian
(Dept. of Math., Zhangzhou Teachers' College, Fujian 363000, China)

Abstract: In this paper, we give a series of propositions equivalent to the spaces which are the compact-covering stratified strong s-images of metric spaces.

Key words: compact-covering mappings; stratified strong s-mappings; compact-finite-partition networks; σ-locally countabl collections.