第 24 卷第 3 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 24 No. 3
2004 年 8 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 2004

K-非常凸空间*

冼　军，　黎永锦
（中山大学数学系，广东 广州 510275）

摘　要：本文引入了一种新的 K 凸空间 K-非常凸空间，及其对偶空间 K－非常光滑空间，它们分别是非常凸空间和非常光滑空间的推广但又严格弱于非常凸空间和非常光滑空间，因此它们又有许多独特的性质. 本文讨论了它们的一些特性及与其它 K 凸性和 K 光滑性的关系，推广了[3]、[6]、[7]、[8]中的一些结果.

关键词：K-非常凸；K-非常光滑；中点局部 K 一致凸；弱中点局部 K 一致凸；K-严格凸.
分类号：AMS(2000) 46B09/CLC number：O177.2
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2004)03-0483-10

1　引言和定义

1997 年 Tegusi 等在[6]中引入了非常凸空间的概念，这篇文章我们把非常凸推广到 K-非常凸，并引进了其对偶概念 K-非常光滑，讨论了它们的一些特性及与其它 K 凸性和 K 光滑性的关系，并推广了[7]、[6]、[3]、[8]中的结论. 本文所涉及的空间 X 为实 Banach 空间，X^* 是 Banach 空间 X 的共轭空间，采用以下符号：

$$S(X)=\{x:x\in X,\|x\|=1\},\quad S(X^*)=\{x^*\in X^*,\|x^*\|=1,$$
$$d(x,A)=\inf_{y\in A}\|x-y\|,\quad S_x=\{f:f\in S(X^*),f(x)=1=\|x\|,$$

$A_f=\{x:x\in S(X),f(x)=1=\|f\|\}$. 对任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\in S(X)$，记

$$A(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})=\sup\left\{\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{k+1})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_k(x_1) & f_k(x_2) & \cdots & f_k(x_{k+1})\end{vmatrix};f_1,f_2,f_3,\cdots,f_k\in S(X^*)\right\}.$$

定义 1.1[6]　对任意 $x\in S(X)$，及 $S(X)$ 中的点列 $\{x_n\}$，对某个 $f\in S_x$ 当 $f(x_n)\to 1$ 时 $x_n\xrightarrow{\omega}x$，则称 X 为非常凸空间.

定义 1.2[7]　对任意 $x\in S(X)$，$\{f_n\}\subset S(X^*)$，当 $f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}1$ 时存在 $f\in S(X^*)$ 使

* 收稿日期：2001-09-03
基金项目：香港中山大学高等学术研究中心基金会资助项目(04M10)
作者简介：冼　军(1976-)，博士研究生.

得 $f_n \xrightarrow{\omega} f$,则称 X 为非常光滑空间.

定义 1.3[3] $\forall \varepsilon > 0, x \in S(X), \exists \delta \equiv \delta(x,\varepsilon)$,当 $x_1,\cdots,x_{K+1} \in S(X)$,$\| x - \dfrac{x_1 + \cdots + x_{K+1}}{K+1} \| < \delta$ 时有 $A(x_1,\cdots,x_{K+1}) < \varepsilon$,则称 X 为中点局部 K 一致凸空间.

定义 1.4[1] 若对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1} \in X$,当 $\| \sum_{i=1}^{k+1} x_i \| = \sum_{i=1}^{k+1} \| x_i \|$ 时,$x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$ 线性相关,则称 X 为 K- 严格凸空间.

定义 1.5[2] X 为 K- 严格凸空间且 $\forall x \in S(X)$ 当 $\{x_n\} \subset S(X)$ 及某个 $f \in S_x$,$f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$ 时 $\{x_n\}$ 为相对紧集,则称 X 为 K- 强凸空间.

定义 1.6[1] 若 X 是 K- 光滑空间且对 $\forall x \in S(X)$,$\{f_n\} \subset S(X^*) f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 1$ 时有 $\{f_n\}$ 为相对紧集,则称 X 为 K- 强光滑空间.

定义 1.7 若 X 是 K- 光滑空间且对 $\forall x \in S(X)$,$\{f_n\} \subset S(X^*)$ 当 $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 1$ 时,$\{f_n\}$ 为相对弱紧集,则称 X 为 K- 非常光滑空间.

定义 1.8 X 为 K- 严格凸空间且对 $\forall x \in S(X)$,$\{x_n\} \subset S(X)$ 及某个 $f \in S_x$,$f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$ 时,$\{x_n\}$ 为相对弱紧集,则称 X 为 K- 非常凸空间.

定义 1.9

$$\forall \varepsilon > 0, x \in S(X), f_1, f_2, \cdots, f_K \in S(X^*), \exists \delta \equiv \delta(\varepsilon, x, f_1, \cdots, f_K)$$

使当 $x_i \in S(X)(i = 1,2,\cdots,K+1)$,$\| x - \dfrac{x_1 + \cdots + x_{K+1}}{K+1} \| < \delta$ 时

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{K+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x_1) & f_K(x_2) & \cdots & f_K(x_{K+1}) \end{matrix} \right\| < \varepsilon,$$

则称 X 为弱中点局部 K 一致凸空间($\| \cdot \|$ 表示行列式的绝对值).

其它未给出的概念和符号可见[2]、[3]、[4]、[8].

2 几个重要引理

引理 2.1[6] a) X 是非常凸空间,则 X 为严格凸空间;

b) X 是非常光滑空间则 X 为光滑空间.

引理 2.2[1] a) 1- 严格凸与严格凸等价;b) X 为 K- 严格凸则 X 为 $(K+1)$- 严格凸.

引理 2.3[1] a) 1- 光滑与光滑等价;b) X 为 K- 光滑则 X 为 $(K+1)$- 光滑.

引理 2.4[1] X 为 K- 严格凸空间的充要条件为对任意 $f \in S(X^*)$ 有 $\dim A_f \leqslant K$(其中 $\dim A_f$ 表示 A_f 的线性维数).

引理 2.5 X 为 K- 非常凸空间,则对任意 $x \in S(X)$,$f \in S_x$ 及 $S(X)$ 中的 K 个点列 $\{x_1^n\}$,$\{x_2^n\}$,$\cdots$,$\{x_k^n\}$,当 $f(x_1^n) \to 1, \cdots, f(x_k^n) \to 1$ 时

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_1^n) & \cdots & f_1(x_K^n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1^n) & \cdots & f_K(x_K^n) \end{vmatrix} \to 0 \quad (n\to\infty)\ (\forall\ f_1,f_2,f_3,\cdots,f_K \in S(X^*)).$$

证明 若不然,则存在 $x\in S(X)$ 及某个 $f\in S_x$ 和 $S(X)$ 中的 K 个点列 $\{x_1^n\},\{x_2^n\},\cdots,\{x_k^n\}$ 且 $f(x_1^n)\to 1,\cdots,f(x_K^n)\to 1(n\to\infty)$,$\varepsilon_0>0$,$f_1,f_2,f_3,\cdots,f_K\in S(X^*)$ 和 $\{n\}$ 的子列不妨仍记为 $\{n\}$,使得

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_1^n) & \cdots & f_1(x_K^n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1^n) & \cdots & f_K(x_K^n) \end{matrix} \right\| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (*)$$

因为 $f(x_1^n)\to 1,\cdots,f(x_K^n)\to 1(n\to\infty)$ 由 K-非常凸空间的定义知 $\{x_1^n\},\cdots,\{x_K^n\}$ 均为相对弱紧集,所以存在 $\{n\}$ 的子列 $\{m\}$ 和 $x_i\in U(X)$ 使得 $x_1^m\xrightarrow{\omega}x_1,\cdots,x_K^m\xrightarrow{\omega}x_K(m\to\infty)$,易知 $x_i\in A_f(i=1,2,\cdots,K)$,又因为 X 是 K-严格凸的,所以由引理 2.4 知 $x,x_1,x_2,\cdots,x_k$ 线性相关,不妨设 $x=\sum\limits_{i=1}^{K}a_kx_i$. 再由 K-维体积的连续性知对任意 $f_1,f_2,f_3,\cdots,f_K\in S(X^*)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_1^m) & \cdots & f_1(x_K^m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1^m) & \cdots & f_K(x_K^m) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_K) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1) & \cdots & f_K(x_K) \end{matrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{matrix} f(x) & f(x_1) & \cdots & f(x_k) \\ f_1(x) & f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1) & \cdots & f_K(x_k) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} f(\sum\limits_{i=1}^{k}a_ix_i) & f(x_1) & \cdots & f(x_k) \\ f_1(\sum\limits_{i=1}^{k}a_ix_i) & f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(\sum\limits_{i=1}^{k}a_ix_i) & f_K(x_1) & \cdots & f_K(x_k) \end{matrix} \right\| = 0$$

而这与($*$)处矛盾,所以引理 2.5 成立.

引理 2.6 (1) 对任意 $x\in S(X)$,$f\in S_x$ 及 $S(X)$ 中的 K 个点列 $\{x_1^n\},\{x_2^n\},\cdots,\{x_k^n\}$,当 $f(x_1^n)\to 1,\cdots,f(x_k^n)\to 1$ 时

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_1^n) & \cdots & f_1(x_K^n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1^n) & \cdots & f_K(x_K^n) \end{vmatrix} \to 0(n\to\infty)\ (\forall\ f_1,f_2,f_3,\ \cdots\ ,f_K \in S(X^*)).$$

(2) 对任意 $\varepsilon>o$,$x\in S(X)$,$f\in S_x$,$f_1,f_2,f_3,\cdots,f_K\in S(X^*)$ 存在 $\delta\equiv\delta(f,x,\varepsilon,f_1,f_2,f_3,\ \cdots\ ,f_K)>0$,当 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in S(X)$,$f(x+x_1+\cdots+x_k)>(K+1)-\delta$ 时

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_K) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1) & \cdots & f_K(x_K) \end{matrix}\right\| < \varepsilon.$$

(1) 蕴含(2).

证明 用反证法. 若不然, $\exists\ \varepsilon_0 > 0, x \in S(X), f_1, f_2, f_3, \cdots, f_K \in S(X^*)$ 和某个 $f \in S_x$, 对 $\forall\ \delta_n$ 不妨取 $\frac{1}{n}$, $\exists\ x_1^n, x_2^n, \cdots, x_K^n \in S(X)$ 当 $f(x + x_1^n + \cdots + x_K^n) > 1 + K - \delta_n$ 时有

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_1^n) & \cdots & f_1(x_K^n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1^n) & \cdots & f_K(x_K^n) \end{matrix}\right\| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (\Delta)$$

由 $f(x + x_1^n + \cdots + x_K^n) > 1 + K - \delta_n$ 知

$$2 = 1 + \|x_1^n\| \geqslant 1 + f(x_1^n) > K + 1 - [f(x_2^n) + \cdots + f(x_K^n)] - \frac{1}{n}$$

$$\geqslant K + 1 - (\|x_2^n\| + \cdots + \|x_K^n\|) - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n},$$

所以 $1 + f(x_1^n) \xrightarrow{n\to\infty} 2$, 即 $f(x_1^n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$. 同理有 $f(x_2^n) \xrightarrow{n\to\infty} 1, \cdots, f(x_K^n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$, 所以由(1)知

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_1^n) & \cdots & f_1(x_K^n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1^n) & \cdots & f_K(x_K^n) \end{matrix}\right| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

而这与(Δ)处矛盾.

引理 2.7[1] a) 若 X^* 是 K-严格凸空间, 则 X 为 K-光滑空间;

b) 若 X^* 是 K-光滑空间, 则 X 为 K-严格凸空间.

3 主要结论及其证明

定理 3.1 a) 1-非常凸与非常凸等价, b) 1-非常光滑与非常光滑等价.

证明 a) 先证明 1-非常凸必为非常凸.

设对任意 $x \in S(X)$, $S(X)$ 中的点列 $\{x_n\}$, 对某个 $f \in S_x$ 有 $f(x_n) \to 1$, 由 1-非常凸性知 $\{x_n\}$ 是相对弱紧集, 即存在子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, $x' \in X$ 使 $x_{n_k} \xrightarrow{\omega} x'(K \to \infty)$. 于是 $f(x_{n_K}) \to f(x') = 1$, 易知 $f \in S_{x'}$, 于是 $2 = f(x) + f(x') \leqslant \|f\| \cdot \|x + x'\| \leqslant 2$, 所以 $\|x + x'\| = 2$, 再由 1-非常凸性知 X 为 1-严格凸的, 由引理 2.2 知即为严格凸的, 再由严格凸的定义知 $x = x'$, 所以 $x_{n_k} \xrightarrow{\omega} x(K \to \infty)$. 此时必有 $x_n \xrightarrow{\omega} x(n \to \infty)$.

事实上, 若不然, $\exists\ \varepsilon_0 > 0, g \in X^*, \{x_{n_K}\} \subset \{x_n\}$, 使得 $|g(x_{n_K} - x)| \geqslant \varepsilon_0(\Delta)$. 因 $f(x_{n_K})$

$\to 1$ 由 1- 非常凸性知 $\{x_{n_K}\}$ 为相对弱紧集，于是存在 $\{x_{n_{K_l}}\} \subset \{x_{n_K}\}$ 使 $x_{n_{k_l}} \xrightarrow{\omega} x(l \to \infty)$，而这与 (Δ) 式矛盾. 故必有 $x_n \xrightarrow{\omega} x(n \to \infty)$.

由引理 2.1，2.2 易知非常凸必为 1- 非常凸.

b) 先证明 1- 非常光滑必为非常光滑.

设 $\forall\, x \in S(X)$，$\{f_n\} \subset S(X^*)$，$f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} 1$，由 1- 非常光滑性知 $\{f_n\}$ 是相对弱紧集，于是 $\exists\ \{f_{n_K}\} \subset \{f_n\}$，$f \in X^*$，使得 $f_{n_K} \xrightarrow{\omega} f(K \to \infty)$，于是 $x(f_{n_K}) \to x(f) = f(x) = 1$. 由 X 的 1- 非常光滑性知 X 为 1- 光滑的，又由引理 2.3(a) 知 1- 光滑与光滑等价，所以 f 唯一必有 $f_n \xrightarrow{\omega} f(n \to \infty)$.

事实上，若不然，存在子列 $\{f_{n_K}\} \subset \{f_n\}$ 及 ε_0 和 $x^{**} \in X^{**}$ 使 $|x^{**}(f_{n_K} - f)| \geqslant \varepsilon_0$，又由 $f_{n_K}(x) \to 1$ 和 1- 非常光滑性知存在 $\{f_{n_{K_l}}\} \subset \{f_{n_K}\}$ 使 $f_{n_{K_l}} \xrightarrow{\omega} f$，而这与 $|x^{**}(f_{n_K} - f)| \geqslant \varepsilon_0$ 矛盾，故必有 $f_n \xrightarrow{\omega} f$，所以 1- 非常光滑必为非常光滑.

由引理 2.1 和 2.2 知非常光滑必为 1- 非常光滑.

以上定理 3.1 说明了 K- 非常凸为非常凸的推广，K- 非常光滑为非常光滑的推广，又由引理 2.1 和引理 2.2 易知有如下关系：

非常凸 $\Rightarrow K$- 非常凸 $\Rightarrow (K+1)$- 非常凸，非常光滑 $\Rightarrow K$- 非常光滑 $\Rightarrow (K+1)$- 非常光滑反之却不成立，在举例之前我们先给出定理 3.2.

定理 3.2 a) K- 强凸空间必为 K- 非常凸空间，

b) K- 强光滑空间必为 K- 非常光滑空间.

证明 由定义易知定理成立.

例 3.1 设 $K \geqslant 2$ 是整数，$i_1 < i_2 < \cdots < i_K$ 对每个 $x = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \in l_2$，定义范数 $\|x\|_{i_1,\cdots,i_K}{}^2 = (\sum_{j=1}^{K} |a_{i_j}|)^2 + \sum_{i \neq i_1,\cdots,i_K} a_i^2$. 由[9]知 $(l_2, \|\cdot\|_{i_1,\cdots,i_K})$ 是 K 一致凸空间，从而是局部 K 一致凸空间，由[2]知局部 K 一致凸空间为 K- 强凸空间，再由定理 3.2(a) 知此空间为 K- 非常凸空间，又局部 K 一致凸空间必为自反空间及 K- 强光滑与 K- 强凸的对偶性知 $(l_2, \|\cdot\|_{i_1,\cdots,i_K})^*$ 为 K- 强光滑空间，再由定理 3.2(b) 知 $(l_2, \|\cdot\|_{i_1,\cdots,i_K})^*$ 为 K- 非常光滑空间.

综上可知 $(l_2, \|\cdot\|_{i_1,\cdots,i_K})$ 为 K- 非常凸空间，$(l_2, \|\cdot\|_{i_1,\cdots,i_K})^*$ 为 K- 非常光滑空间，但 $(l_2, \|\cdot\|_{i_1,\cdots,i_K})$ 不是 $(K\text{-}1)$- 严格凸的，从而 $(l_2, \|\cdot\|_{i_1,\cdots,i_K})$ 不是 $(K\text{-}1)$- 非常凸，则由下面定理 3.5(b) 知 $(l_2, \|\cdot\|_{i_1,\cdots,i_K})^*$ 不是 $(K\text{-}1)$- 非常光滑的.

事实上，取 $e_{i_j} = (0, \cdots, 0, \underset{i_j}{1}, 0, \cdots)(j = 1, 2, \cdots, K)$，则 $\|e_{i_j}\|_{i_1,\cdots,i_K} = 1(j = 1, 2, \cdots, K)$ 且 $\{e_{i_j}\}_{j=1}^{K}$ 线性无关，但 $\|\sum_{j=1}^{K} e_{i_j}\|_{i_1,\cdots,i_K} = \sum_{j=1}^{K} \|e_{i_j}\|_{i_1,\cdots,i_K} = K$，所以由 K- 严格凸定义知 $(l_2, \|\cdot\|_{i_1,\cdots,i_K})$ 不是 $(K\text{-}1)$- 严格凸的.

定理 3.3 X 为 K- 强凸空间的充要条件为 X 是 K- 非常凸且有(H) 性.

证明 由[2]或[3]知 K- 强凸空间必有(H) 性，再由 K- 强凸及 K- 非常凸定义知定理 3.3 成立.

推论 3.1　若 X 具有(H)性,则 X 是 K- 强凸空间的充要条件为 X 是 K- 非常凸空间.

以下定理 3.4 和推论 3.2 的证明是平凡的.

定理 3.4　X 为 K- 强光滑空间的充要条件为 X 为 K- 非常光滑空间且具有(S)性.

推论 3.2[7]　X 为强光滑空间的充要条件为 X 为非常光滑空间且有(S)性.

定理 3.5　a) 若 X^* 是 K- 非常凸空间,则 X 是 K- 非常光滑空间;

b) 若 X^* 是 K- 非常光滑空间,则 X 是 K- 非常凸空间.

证明　a) 由 X^* 是 K- 非常凸性的定义知 X^* 是 K- 严格凸. 由引理 2.7 知 X 为 K- 非常光滑空间,对 $\forall\, x \in S(X)$, $\{f_n\} \subset S(X^*)$, $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 1$. 由 Hahn-Banach 定理知 $\exists\, f \in S(X^*)$ 使 $f(x) = 1 = x(f)$,因此有 $x \in S_f \subset S(X^*)$ 且 $x(f_n) = f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 1$,由 X^* 是 K- 非常凸空间知 $\{f_n\}$ 是相对弱紧集,因此 X 是 K- 非常光滑的.

b) 由 X^* 是 K- 非常光滑的知 X^* 是 K- 光滑的,由引理 2.7 知 X 为 K- 严格凸空间,若对任意 $x \in S(X)$, $S(X)$ 中的点列 $\{x_n\}$,及某个 $f \in S_x$, $f(x_n) \to 1$,则有 $f(x_n) = x_n(f) \xrightarrow{n\to\infty} 1$ 且 $\{x_n\} \subset S(X^{**})$. 因 X^* 是 K- 非常光滑的,故 $\{x_n\}$ 是相对弱紧集,所以 X 是 K- 非常凸空间.

定理 3.5 说明 K- 非常凸空间和 K- 非常光滑空间互为对偶空间.

推论 3.3　a) 自反的 Banach 空间 X 是 K- 非常凸的充要条件为 X^* 是 K- 非常光滑空间;

b) 自反的 Banach 空间 X 是 K- 非常光滑的充要条件为 X^* 是 K- 非常凸空间.

定理 3.6　X^* 为 K- 非常光滑空间,则 X 是自反空间.

证明　设 $f \in S(X^*)$,取 $\{x_n\} \subset S(X)$,使 $f(x_n) \to 1 = \|f\|$,于是 $x_n(f) = f(x_n) \to 1$ 且 $\{x_n\} \subset S(X^{**})$,因 X^* 是 K- 非常光滑,所以 $\{x_n\}$ 是相对弱紧集,于是存在子列 $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ 和 $x \in X$ 使 $x_{n_j} \xrightarrow{\omega} x$,因此 $f(x) = 1 = \|f\|$,再由 James 定理知 X 自反.

推论 3.4[8]　X^* 是非常光滑空间,则 X 是自反空间.

推论 3.5　X^* 是 K- 非常光滑的充要条件是 X 自反且 K- 非常凸.

推论 3.6　X^* 是 K- 强光滑空间,则 X 自反且 K- 非常凸.

推论 3.7[6]　X^* 是强光滑空间,则 X 自反且非常凸.

推论 3.8　X^{**} 是 K- 非常凸的空间,则 X 有 R-N 性.

推论 3.9[6]　X^{**} 是非常凸的空间,则 X 有 R-N 性.

定理 3.7　X 为自反的 K- 严格凸空间,则 X 为 K- 非常凸空间.

证明　$\forall\, x \in S(X)$, $\{x_n\} \subset S(X)$ 及某个 $f \in S_x$, $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$ 时,由 X 的自反性知 $\{x_n\}$ 为相对弱紧集,又 X 是 K- 严格凸空间,所以由 K- 非常凸空间定义知 X 为 K- 非常凸空间.

推论 3.10　自反空间 X 为 K- 严格凸空间的充要条件为 X 是 K- 非常凸空间.

定理 3.8　X 为 K- 非常凸空间,则 X 为弱中点局部 K 一致凸空间.

证明　因 X 为 K- 非常凸空间,则由引理 2.5 和引理 2.6 知对任意 $\varepsilon > o$, $x \in S(X)$, $f \in S_x$, $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_K \in S(X^*)$,存在 $\delta \equiv \delta(f, x, \varepsilon, f_1, f_2, f_3, \cdots, f_K) > 0$,当 $x_1, x_2, \cdots, x_K \in S(X)$, $f(x + x_1 + \cdots + x_K) > (K+1) - K(K+1)\delta$ 时

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_K) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1) & \cdots & f_K(x_K) \end{matrix}\right\| < (K+1)^{-1}\varepsilon. \tag{1}$$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1} \in S(X)$ 满足 $\| x-(K+1)^{-1}(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}) \| < \delta$，这样有

$$\begin{aligned} 1-(K+1)^{-1}f(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}) &= f(x-(K+1)^{-1}(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1})) \\ &\leqslant \| x-(K+1)^{-1}(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}) \| < \delta, \end{aligned}$$

故 $f(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}) > (K+1)-(K+1)\delta$，从而 $K+f(x_i) \geqslant f(x_1+x_2+\cdots+x_{K+1}) > (K+1)-(K+1)\delta$. 即 $f(x_i) \geqslant 1-(K+1)\delta (i=1,2,\cdots,K+1)$，因此

$$\begin{aligned} f(x+x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_{K+1}) &> 1+K[1-(K+1)\delta] \\ &= K+1-K(K+1)\delta. \end{aligned}$$

由(1)知对每个 $i (1 \leqslant i \leqslant K+1)$ 有

$$\begin{aligned} &\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_{i-1}) & f_1(x_{i+1}) & f_1(x_{i+2}) & \cdots & f_1(x_{K+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1) & \cdots & f_K(x_{i-1}) & f_K(x_{i+1}) & f_K(x_{i+2}) & \cdots & f_K(x_{K+1}) \end{matrix}\right\| \\ &\leqslant (K+1)^{-1}\varepsilon, \end{aligned} \tag{2}$$

记

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{K+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x_1) & f_K(x_2) & \cdots & f_K(x_{K+1}) \end{vmatrix},$$

不妨设 $D \neq 0$(否则证明显然成立)，于是关于 $t_1, t_2, \cdots, t_{k+1}$ 的线性方程组

$$\begin{cases} t_1+t_2+\cdots+t_{K+1}=1, \\ f_1(x_1)t_1+f_1(x_2)t_2+\cdots+f_1(x_{K+1})t_{K+1}=f_1(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_K(x_1)t_1+f_K(x_2)t_2+\cdots+f_K(x_{K+1})t_{K+1}=f_K(x) \end{cases} \text{有唯一解}$$

$$\begin{cases} t_1=D^{-1}D_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{K+1}=D^{-1}D_{K+1}, \end{cases}$$

其中

$$D_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{i-1}) & f_1(x) & f_1(x_{i+1}) & \cdots & f_1(x_{K+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x_1) & f_K(x_2) & \cdots & f_K(x_{i-1}) & f_K(x) & f_K(x_{i+1}) & \cdots & f_K(x_{K+1}) \end{vmatrix}$$

$$(i=1,2,\cdots,K+1).$$

将解代入第一个方程有 $D=\sum\limits_{i=1}^{K+1} D_i$，则由(2)式知 $|D| = |\sum\limits_{i=1}^{K+1} D_i| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{K+1} |D_i| < \varepsilon$，即

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_K) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1) & \cdots & f_K(x_K) \end{Vmatrix} < \varepsilon,$$

所以由定义知 X 为弱中点局部 K 一致凸空间.

定理 3.9　X 为弱中点局部 K 一致凸空间,则 X 为 K- 严格凸空间.

证明　若 X 不是 K- 严格凸空间,由 K- 严格凸定义知 $\exists\ x, x_1, x_2, \cdots, x_K \in S(X)$, $\| x + x_1 + x_2 + \cdots + x_K \| = K + 1$,但 $x, x_1, x_2, \cdots, x_K$ 线性无关,故对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant K+1)$ 其距离

$$d(x_i, \text{span}\{x, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_K\}) = a_i > 0.$$

于是由 Hahn-Banach 定理 $\exists\ f_i \in S(X^*)$ 使

$$f_i(x_i) = a_i, f_i(x) = f_i(x_j) = 0, \quad i \neq j(i, j = 1, 2, \cdots, K).$$

令 $x_0 = (K+1)^{-1}(x + x_1 + \cdots + x_K)$,则 $x_0 \in S(X)$ 且 $\| x_0 - (K+1)^{-1}(x + x_1 + \cdots + x_K) \| = 0$,但

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x) & f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_K) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_K(x) & f_K(x_1) & \cdots & f_K(x_K) \end{Vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \cdots a_K > 0,$$

而这与弱中点局部 K 一致凸定义矛盾.

推论 3.11[3]　若 X 是中点局部 K 一致凸空间,则 X 是 K- 严格凸空间.

4　几个例子

例 4.1　K- 非常光滑空间(K- 非常凸空间)而非 K- 强光滑空间(非 K- 强凸空间)的例子.

[10] 中 S. Troyanski 曾构造一空间 X 为 Hilbert 空间,$(e_i)_{i=0}^{\infty}$ 为 X 的直交规范基,对于 $x \in X$ 和 $x = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n + \cdots$.

令 $\| x \|_1^2 = \max\{|a_0|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_{2n}|^2 + \cdots, |a_1|^2 + |a_3|^2 + \cdots + |a_{2n+1}|^2 + \cdots\}$,则 $\| \cdot \|_1$ 与 X 中原范数等价.再令 $\| x \|_2 = (\| x \|_1^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |a_i|^2)^{1/2}$, $\| \cdot \|_2$ 也与原范数等价,并且$(X, \| \cdot \|_2)$ 为自反的严格凸空间,但无(H)性,由[1]知$(X, \| \cdot \|_2)^*$ 非 K- 强光滑,又由定理 3.7 知$(X, \| \cdot \|_2)$ 为 K- 非常凸,再由推论 3.3(b) 知$(X, \| \cdot \|_2)^*$ 是 K- 非常光滑空间.

所以$(X, \| \cdot \|_2)^*$ 为 K- 非常光滑而非 K- 强光滑空间,又由[2] 中定理 2.3 知$(X, \| \cdot \|_2)$ 非 K- 强凸,所以$(X, \| \cdot \|_2)$ 是 K- 非常凸而非 K- 强凸空间.

例 4.2　K- 强光滑空间(K- 非常光滑空间)而非 K 一致光滑,K- 强凸空间(K- 非常凸空间)而非 K 一致凸空间.

设 $1 < p < \infty$,Cesaro 序列空间定义为 Cesp $= \{x = (a_i); a_i \in R, i = 1, 2, \cdots, \| x \| =$

$[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i|)^p]^{1/p}<\infty\}$,在[11]中得Cesp*是强光滑的,从而是$K$-强光滑的,所以Cesp是$K$-强凸的,而[12]中指出Cesp非超自反,则由[12]知Cesp非K一致凸,所以Cesp*非K一致光滑.即Cesp* K-强光滑而非K一致光滑,Cesp是K-强凸而非K一致凸.

下面的例子将说明K-非常凸不能在l^p空间中得到提升.

例 4.3　设$X=\{(x,y);x,y\in R,\leqslant\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|\}$,$Y=X$,由[9]知$X,Y$均为2一致凸,由[3]知$X,Y$均为2-强凸,从而是2-非常凸,但$(X\oplus Y)_2$却不是2-严格凸.

事实上,在$(X\oplus Y)_2$中取

$$z_1=((1,0),(0,1));z_2=((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(1,0));\ z_3=((0,1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})),$$

则$\|z_1\|=\|z_2\|=\|z_3\|=\sqrt{2}$,$\|z_1+z_2+z_3\|=3\sqrt{2}$,但$z_1,z_2,z_3$不是线性相关的,因为令$a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3=0$有

$$a_1+\frac{a_2}{2}=0,\ a_3+\frac{a_2}{2}=0,\ a_1+\frac{a_3}{2}=0,\ a_2+\frac{a_3}{2}=0,$$

而由这可得$a_1=a_2=a_3=0$,所以由K-严格凸定义知$(X\oplus Y)_2$不是2-严格凸,从而更不是2-强凸,2-非常凸的.

感谢导师林伟教授、胡长松教授对本文的有益建议!

参考文献:

[1] 南朝勋,王建华. K-严格凸性与K-光滑性 [J]. 数学年刊,A辑,1990,**11**(3):321-324.
NAN Chao-xun, WANG Jian-hua. *K-strick convexity and K-smoothness* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 1990, **11**(3): 321－324. (in Chinese)

[2] 苏雅拉图,吴从炘. K-强凸性与K-强光滑性 [J]. 数学年刊,A辑,1998,**19**(3):373－378.
SUYALATU, WU Chong-xin. *K-strong convexity and K-strong smoothness* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 1998, **19**(3): 373－378. (in Chinese)

[3] 何仁义. K-强凸与局部K一致光滑空间 [J]. 数学杂志,1997,**17**(2):251－256.
HE Ren-yi. *K-strongly convex and locally K-uniformly smooth spaces* [J]. J. Math. (Wuhan), 1997, **17**(2): 251－256. (in Chinese)

[4] 冼军,胡长松. K-强凸空间的特征 [J]. 湖北师范学院学报,2000,**20**(3):25－28.
XIAN Jun, HU Chang-song. *Characterization of K-strongly convex spaces* [J] J. Hubei. Norm. Univ. (Natural Science), 2000, **20**(3): 25－28. (in Chinese)

[5] 王建华,王慕三. 紧局部完全凸空间 [J]. 科学通报,1991,**10**:796－797.
WANG Jian-hua, WANG Mu-san. *Compact locally fully convex spaces* [J]. Chinese Sci. Bull., 1991, **10**: 796－797. (in Chinese)

[6] TEGUIS, SUYALATU, LI Yong-jin. *Very convex Banach spaces* [J]. Northeast. Math. J., 1997, **13**(1): 1-4.

[7] 张子厚. 关于Banach空间的(S)性与(WS)性 [J]. 安徽师范大学学报,**1989**,2:15－19.
ZHANG Zi-hou. *About (S) property and (WS) property in Banach spaces* [J]. J. Anhui. Norm. Univ. Natur. Sci. Ed., 1989, **2**: 15－19. (in Chinese)

[8] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论 [M]. 上海：华东师范大学出版社，1986.
YU Xin-tai. *Geomery Theory of Banach Spaces* [M]. Shanghai: East China Normal Unviersity Press, 1986. (in Chinese)
[9] LIN Bor-Luh, YU Xin-tai. *On the K-uniform rotund and fully convex Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1985, **110**(2): 407—410.
[10] ISTRATESCU V I. *Strict Convexity and Complex Strict Convexity* [M]. New York and Basel., 1984.
[11] 张文耀. Cesaro 序列空间的几何性质 [J]. 华东师范大学学报，1984，**4**：36—40.
ZHANG Wen-yao. *Geometric properties of Cesaro sequence spaces* [J]. J. East China. Norm. Univ. Natur. Sci. Ed., 1984, **4**: 36—40. (in Chinese)
[12] 俞鑫泰. Cesaro 序列空间的一个注记 [J]. 华东师范大学学报，1990，**4**：19—21.
YU Xin-tai. *A note on Cesaro spaces* [J]. J. East China. Norm. Univ. Natur. Sci. Ed., 1990, **4**: 19—21. (in Chinese)

K -Very Convex Space and K -Very Smooth Space

XIAN Jun, LI Yong-jin
(Dept. of Math., Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: In this paper we introduce a new K convex space, that is K-very convex space with K smooth dual space. The new K convex space and K smooth space are strictly weaker than the old ones. We discuss their properties and the relationship with other K convexities or K smoothness. We generalize some known results.

Key words: K-very convex; K-very smooth; K-strictly convex; midpoint locally K uniformly convex; weakly midpoint locally K uniformly convex.