第24卷第3期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 3
2004年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2004

一类离散型 Bellman-Bihari 不等式及其应用*

高庆龄
(山东教育学院数理系，山东 济南 250013)

摘　要：本文建立了一类新的更为广泛的非线性离散不等式.所得结果改进并推广了文[1,2]中的有关结果.并利用所得结果考虑了差分方程 $\Delta^2u(n)+f(n,u(n),\Delta u(n))=0$ 解的渐进性质,其中$(n,u,v)\in N\times R\times R, N=1,2,\cdots$.

关键词：非线性；离散型不等式；渐近性.
分类号：AMS(2000) 34D40,34K40/CLC number：O175
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2004)03-0493-07

1 引 言

近年来,人们对离散不等式的研究和应用引起了极大兴趣,并已有一些好的结果[1,2,4,5].本文通过建立一类新的更为广泛的非线性离散不等式,改进并推广了文[1,2]中的有关结果.并利用所得结果考虑了差分方程 $\Delta^2u(n)+f(n,u(n),\Delta u(n))=0$ 解的渐进性质,其中$(n,u,v)\in N\times R\times R, N=1,2,\cdots$.

2 主要结果

定义　函数 $g:[0,\infty)\to(0,\infty)$,如果 $g(u)(u\geqslant 0)$是连续单调不减函数,且$\frac{1}{v}g(u)\leqslant g(\frac{u}{v})$,$u\geqslant 0,v\geqslant 1$,则称 g 属于函数类 F,记为 $g\in F$.

引理1　假设

i) $u(n),g(n)$是定义于 N 上的实值非负函数,$N=1,2,\cdots$;

ii) $f(n)\geqslant 1,n\in N$,单调不减;

iii) $\Omega,h\in F$.

如果有不等式

$$u(n)\leqslant f(n)+h(\sum_{s=1}^{n-1}g(s)\Omega(u(s))),\tag{1}$$

* 收稿日期：2001-12-24
作者简介：高庆龄(1971-),硕士,讲师.

则有

$$u(n) \leqslant f(n)[1 + h(G^{-1}(\sum_{s=1}^{n-1} g(s)))], \tag{2}$$

其中 $G(u) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}s}{\Omega(1 + h(s))}, u > 0, g(0)\Omega(u(0)) = 0. G^{-1}(u)$ 是 $G(u)$ 的反函数.

证明 由(1)式及条件 iii)得,

$$\frac{u(n)}{f(n)} \leqslant 1 + h(\sum_{s=1}^{n-1} g(s)\Omega(\frac{u(s)}{f(s)})). \tag{3}$$

设 $V(n) = \sum_{s=1}^{n-1} g(s)\Omega(\frac{u(s)}{f(s)})$,且 $n = 1, V(1) = 0$. 则

$$\Delta V(n) = V(n+1) - V(n) = g(n)\Omega(\frac{u(n)}{f(n)}),$$

所以由(3)式得 $g(n)\Omega(\frac{u(n)}{f(n)}) \leqslant g(n)\Omega(1 + h(V(n)))$,即 $\frac{\Delta V(n)}{\Omega(1 + h(V(n)))} \leqslant g(n)$.

令 $V(n) \leqslant z \leqslant V(n+1)$,则 $\Omega(1 + h(V(n))) \leqslant \Omega(1 + h(z)) \leqslant \Omega(1 + h(V(n+1)))$,所以

$$\int_{V(n)}^{V(n+1)} \frac{\mathrm{d}z}{\Omega(1 + h(V(n)))} = \frac{\Delta V(n)}{\Omega(1 + h(V(n)))} \geqslant \int_{V(n)}^{V(n+1)} \frac{\mathrm{d}z}{\Omega(1 + h(z))},$$

$$\int_{V(n)}^{V(n+1)} \frac{\mathrm{d}z}{\Omega(1 + h(z))} \leqslant g(n),$$

从而有 $\sum_{s=1}^{n-1} \int_{V(s)}^{V(s+1)} \frac{\mathrm{d}z}{\Omega(1 + h(z))} \leqslant \sum_{s=1}^{n-1} g(s)$,即 $G(V(n)) - G(V(1)) \leqslant \sum_{s=1}^{n-1} g(s)$. 所以对任意的 n,我们有

$$G(V(n)) \leqslant G(V(1)) + \sum_{s=1}^{n-1} g(s),$$

故 $V(n) \leqslant G^{-1}(\sum_{s=1}^{n-1} g(s))$,所以 $u(n) \leqslant f(n)[1 + h(G^{-1}(\sum_{s=1}^{n-1} g(s)))]$,即(2)式成立.

定理 1 设

i) $u(n), g(n)(1 \leqslant i \leqslant m)$ 是定义于 N 上的非负实值函数, $N = 1, 2, \cdots$.

ii) $f(n) \geqslant 1, n \in N$,单调不减.

iii) $h_i, \Omega_i \in F, i = 1, 2, \cdots, m$.

如果

$$u(n) \leqslant f(n) + \sum_{i=1}^{m} h_i(\sum_{s=1}^{n-1} g_i(s)\Omega_i(u(s))), \tag{4}$$

则当 $n \in N$ 时,有

$$u(n) \leqslant f(n) \prod_{i=1}^{m} [1 + h_i(\varphi_i(n))], \tag{5}$$

其中

$$\varphi_i(n) = G_i^{-1}[\sum_{s=1}^{n-1} g_i(s) \prod_{k=1}^{i-1} (1 + h_k(\varphi_k(s)))],$$

$$G_i(u) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}s}{\Omega_i(1 + h_i(s))} \quad, u > 0, i = 1, 2, \cdots, m,$$

$$\prod_{i=1}^{0}(1+h_i(\varphi_i(s)))=1.$$

证明 对 m 用数学归纳法.

当 $m=1$ 时，由引理 1 知(5)式成立. 假设 $m=k$ 时，(5)式成立，下证 $m=k+1$ 时，(5)式也成立.

当 $m=k+1$ 时，(4)式化为 $u(n)\leqslant A(n)+\sum_{i=1}^{k}h_i(\sum_{s=1}^{n-1}g_i(s)\Omega_i(u(s)))$，其中

$$A(n)=f(n)+h_{k+1}(\sum_{s=1}^{n-1}g_{k+1}(s)\Omega_{k+1}(u(s))),\tag{6}$$

则 $A(n)$ 满足 $f(n)$ 所满足的条件. 由归纳假设得

$$u(n)\leqslant A(n)\prod_{i=1}^{k}[1+h_i(\varphi_i(n))].\tag{7}$$

把(6)式代入(7)式，得

$$u(n)\leqslant f(n)\prod_{i=1}^{k}[1+h_i(\varphi_i(n))]\prod_{i=1}^{k}[1+h_i(\varphi_i(n))]h_{k+1}(\sum_{s=1}^{n-1}g_{k+1}(s)\Omega_{k+1}(u(s))).$$

类似于引理 1 所用的方法，我们有

$$u(n)\leqslant f(n)\prod_{i=1}^{k}[1+h_i(\varphi_i(n))][1+h_{k+1}(G_{k+1}^{-1}(\sum_{s=1}^{n-1}g_{k+1}(s)\prod_{i=1}^{k}[1+h_i(\varphi_i(s))]))],$$

即 $u(n)\leqslant f(n)\prod_{i=1}^{k+1}[1+h_i(\varphi_i(n))]$，所以 $m=k+1$ 时(5) 式也成立. 由数学归纳法知定理 1 成立.

注 1 定理 1 将文[6]中的有关结果由连续型非线性不等式推广到离散型不等式，并且所得结果更具有一般性.

引理 2 假设

i) $u(n),w_j(n),m_j(n)(1\leqslant j\leqslant q)$ 是定义于 N 上的实值非负函数，$N=\{1,2,\cdots\}$，$f(n)\geqslant 1,n\in N$ 且单调不减.

ii) $h_j\in F,1\leqslant j\leqslant q$，如果

$$u(n)\leqslant f(n)+\sum_{j=1}^{q}\sum_{s=1}^{n-1}w_j(s)\sum_{p=1}^{s-1}m_j(p)h_j(u(p)),\tag{8}$$

则有

$$u(n)\leqslant f(n)\prod_{j=1}^{q}E_j(n),\tag{9}$$

其中

$$E_j(n)=H_j^{-1}(H_j(1)+\overline{W_j(n)}\sum_{s=1}^{n-1}(\prod_{k=1}^{j-1}E_k(s))m_j(s)),\tag{10}$$

$$\overline{W}_j(n)=\sum_{s=1}^{n-1}w_j(s),H_j(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}s}{h_j(s)},\quad u>0,u_0>0,\tag{11}$$

$H_j^{-1}(u)$ 是 $H_j(u)$ 的反函数，$j=1,2,\cdots,q$. $\prod_{j=1}^{0}E_j(n)=1$.

证明 对 q 用数学归纳法. 当 $q=1$ 时，由(8)式得

$$u(n) \leqslant f(n) + \sum_{s=1}^{n-1} w_1(s) \sum_{p=1}^{s-1} m_1(p) h_1(u(p)). \tag{12}$$

因为 $\sum_{s=1}^{n-1} w_1(s) \sum_{p=1}^{s-1} m_1(p) h_1(u(p) \leqslant \sum_{s=1}^{n-1} m_1(s) h_1(u(s)) \sum_{s=1}^{n-1} w_1(s) = \overline{W}_1(n) \sum_{s=1}^{n-1} m_1(s) h_1(u(s))$，所以由(12)式得 $u(n) \leqslant f(n) + \overline{W}_j(n) \sum_{s=1}^{n-1} m_1(s) h_1(u(s))$，则对任意固定的自然数 N_0，当 $1 \leqslant n \leqslant N_0$ 时，下式成立

$$\frac{u(n)}{f(n)} \leqslant 1 + \sum_{s=1}^{n-1} \overline{W}_1(N_0) m_1(s) h_1(\frac{u(s)}{f(s)}).$$

由离散型 Bihari 不等式[2] 得

$$\frac{u(n)}{f(n)} \leqslant H_1^{-1}(H_1(1) + \sum_{s=1}^{n-1} \overline{W}_1(N_0) m_1(s)) = \overline{E}_1(n), \quad 1 \leqslant n \leqslant N_0.$$

取 $n = N_0$ 得 $u(N_0) \leqslant f(N_0) \overline{E}_1(N_0) = f(N_0) E_1(N_0)$，用 n 代替 N_0，即得(9)式.

假设 $q = k$ 时，(9)式成立，当 $q = k + 1$ 时，由(8)式得

$$u(n) \leqslant D(n) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{n-1} w_j(s) \sum_{p=1}^{s=1} m_j(p) h_j(u(p)),$$

其中 $D(n) = f(n) + \sum_{s=1}^{n-1} w_{k+1}(s) \sum_{p=1}^{s=1} m_{k+1}(p) h_{k+1}(u(p))$，则 $D(n)$ 满足 $f(n)$ 所满足的条件. 由归纳假设得

$$\begin{aligned} u(n) &\leqslant D(n) \prod_{j=1}^{k} E_j(n) \\ &= f(n) \prod_{j=1}^{k} E_j(n) + \prod_{j=1}^{k} E_j(n) \sum_{s=1}^{n-1} W_{k+1}(s) \sum_{p=1}^{s-1} m_{k+1}(p) h_{k+1}(u(p)). \end{aligned}$$

同理由上述方法可得 $u(n) \leqslant f(n) \prod_{j=1}^{q} E_j(n), \quad n \geqslant 1$. 所以 $q = k + 1$ 时，(9)式也成立. 由数学归纳法知引理 2 成立.

定理 2 设

i) $u(n), v_i(n), w_j(n), m_j(n)$ $(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant q)$ 是定义在 N 上的实值非负函数，$N = \{1, 2, \cdots\}$；

ii) $f(n) \geqslant 1, n \in N$，单调不减；

iii) $g_i(u), h_j(u) \in F$，$i = 1, 2, \cdots, m$；$j = 1, 2, \cdots, q$.

如果有不等式

$$u(n) \leqslant f(n) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{n-1} v_i(s) g_i(u(s)) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{s=1}^{n-1} w_j(s) \sum_{p=1}^{s-1} m_j(p) h_j(u(p)), \tag{13}$$

则

$$u(n) \leqslant f(n) \prod_{i=1}^{m} F_i(n) \prod_{j=1}^{q} E_j(n), \tag{14}$$

其中 $F_i(u) \leqslant G_i^{-1}(G_i(1) + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{i-1} F_k(s) \prod_{j=1}^{q} E_j(s) v_i(s)$，$G_i(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}s}{g_i(s)}$，$u > 0$，$u_0 > 0$，$G_i^{-1}$ 为 G_i 的反函数，$i = 1, 2, \cdots, m$ $\prod_{i=1}^{n} F_i(n) = \prod_{j=1}^{0} E_j(n) = 1$，$E_j(n) \overline{W}_j(n)$ 满足(10)、(11)式.

证明 对 m 用数学归纳法,当 $m=1$ 时,由(13)式得

$$u(n)\leqslant D(n)+\sum_{j=1}^{q}\sum_{s=1}^{n-1}w_j(s)\sum_{p=1}^{s=1}m_j(p)h_j(u(p)),$$

其中 $D(n)=f(n)+\sum_{s=1}^{n-1}v_1(s)g_1(u(s))$,则 $D(n)$ 满足 $f(n)$ 所满足的条件,由引理 2 得

$$u(n)\leqslant D(n)\prod_{j=1}^{q}E_j(n)=f(n)\prod_{j=1}^{q}E_j(n)+\prod_{j=1}^{q}E_j(n)\sum_{s=1}^{n=1}v_1(s)g_1(u(s)).$$

类似于引理 2 的归纳第一步得

$$u(n)\leqslant f(n)\prod_{j=1}^{q}E_j(n)G_1^{-1}(G_1(1)+\sum_{s=1}^{n=1}\prod_{j=1}^{q}E_j(s)v_1(s)),$$

即 $u(n)\leqslant f(n)F_1(n)\prod_{j=1}^{q}E_j(n)$,故 $m=1$ 时,(14) 式成立.

假设 $m=k$ 时(14) 式成立. 当 $m=k+1$ 时,我们有

$$u(n)\leqslant A(n)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{n-1}v_i(s)g_i(u(s))+\sum_{j=1}^{q}\sum_{s=1}^{n-1}w_j(s)\sum_{p=1}^{s=1}m_j(p)h_j(u(p)),$$

其中 $A(n)=f(n)+\sum_{s=1}^{n-1}v_{k+1}(s)g_{k+1}(u(s))$. 则 $A(n)$ 满足 $f(n)$ 所满足的条件,由归纳假设得

$$\begin{aligned}u(n)&\leqslant A(n)\prod_{i=1}^{k}F_i(n)\prod_{j=1}^{q}E_j(n)\\&=f(n)\prod_{i=1}^{k}F_i(n)\prod_{j=1}^{q}E_j(n)+\prod_{i=1}^{k}F_i(n)\prod_{j=1}^{q}E_j(n)\sum_{s=1}^{n-1}v_{k+1}(s)g_{k+1}(u(s)).\end{aligned}$$

同理可得

$$u(n)\leqslant f(n)\prod_{i=1}^{m}F_i(n)\prod_{j=1}^{q}E_j(n).$$

故 $m=k+1$ 时,(14)式也成立. 所以由数学归纳法知,对于一切 $m\in N$,(14)式均成立.

注 2 当 $g_i(u)=u^{\alpha_i},h_j(u)=u^{\beta_j},\alpha_i\in(0,1],\beta_i\in(0,1],i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,q$ 时,则定理 2 变为 $u(n)\leqslant f(n)\prod_{i=1}^{m}F_i(n)\prod_{j=1}^{q}E_j(n)$,其中

$$E_j(n)=\begin{cases}[1+(1-\beta_j)\overline{W}_j(n)\sum_{s=1}^{n-1}m_j(s)\prod_{k=1}^{j-1}E_k(s)]^{\frac{1}{1-\beta_j}}, & \beta_j\in(0,1),\\ \exp[\overline{W}_j(n)\sum_{s=1}^{n-1}m_j(s)\prod_{k=1}^{j-1}E_k(s)], & \beta_j=1,\end{cases}$$

$$F_i(n)=\begin{cases}[1+(1-\alpha_j)\sum_{s=1}^{n-1}v_i(s)\prod_{k=1}^{i-1}F_k(s)\prod_{j=1}^{q}E_j(s)]^{\frac{1}{1-\alpha_j}}, & \alpha_j\in(0,1),\\ \exp[\sum_{s=1}^{n-1}v_i(s)\prod_{k=1}^{i-1}F_k(s)\prod_{j=1}^{q}E_j(s)], & \alpha_j=1.\end{cases}$$

定理 2 推广并改进了[1,2]中的有关结果.

考虑差分方程

$$\Delta^2u(n)+f(n,u(n),\Delta u(n))=0 \tag{15}$$

的解的渐进性质,其中 $(n,u,v)\in N\times R\times R$, $N=1,2,\cdots$.

定理 3 如果

i) $|f(n,u,v)| \leqslant \varphi(n) g(\frac{|u|}{n}) + \psi(n)|v|$，其中 $g(u) \in F$，$\varphi(n)$，$\psi(n)$ 是 N 上的实值非负函数.

ii) $\sum_{s=1}^{\infty} \varphi(s) = k_1 < \infty$，$\sum_{s=1}^{\infty} \psi(s) = k_2 < \infty$，则满足初始条件 $u(1) = C_1$，$u(2) = C_2$ 的解 $u(n)$ 有 $\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n-1} f(s,u(s),\Delta u(s)) = \alpha(C_1,C_2)$，令 $\beta = C_2 - \alpha(C_1,C_2)$，则对任意的常数 b，有 $u(n) = b + \beta n + 0(n)$，$n \to \infty$.

证明 对(15)式连续相加，得 $\Delta u(n) = C_2 - \sum_{s=1}^{n-1} f(s,u(s),\Delta u(s))$，对上式连续相加，并对第三项交换求和顺序，

$$u(n) = C_1 + (n-1)C_2 - \sum_{s=1}^{n-1}(n-s-1) f(s,u(s),\Delta u(s)),$$

设 $A(n) = \sum_{s=1}^{n-1} \varphi(s) g(\frac{|u(s)|}{s})$，$B(n) = \sum_{s=1}^{n-1} \psi(s)|\Delta u(s)|$，则由条件 i)得

$$\Delta u(n) \leqslant |C_2| + A(n) + B(n), \tag{16}$$

$$|\frac{\Delta u(n)}{n}| \leqslant K + A(n) + B(n), \tag{17}$$

其中 $K \geqslant |C_1| + |C_2|$，且 $K \geqslant 1$，设 $D(n) = K + A(n) + B(n)$，则(16)，(17)变为

$$\Delta u(n) \leqslant D(n), \quad \frac{|u(n)|}{n} \leqslant D(n).$$

又因为 $\Delta A(n) = \varphi(n) g(\frac{|u(n)|}{n})$，$\Delta B(n) = \psi(n)|\Delta u(n)|$ 且 $\Delta A(n) \leqslant \varphi(n) g(v(n))$，$\Delta B(n) = \psi(n) D(n)$，所以 $\Delta D(n) = \Delta A(n) + \Delta B(n) \leqslant \varphi(n) g(v(n)) + \psi(n) D(n)$，所以 $D(n) \leqslant K + \sum_{s=1}^{n-1} \varphi(s) g(D(s)) + \sum_{s=1}^{n-1} \psi(s) D(s)$.

设 $E(n) = K + \sum_{s=1}^{n-1} \varphi(s) g(D(s))$，则 $E(n)$ 单调不减，且 $D(n) \leqslant E(n) + \sum_{s=1}^{n-1} \psi(s) D(s)$，所以

$$D(n) \leqslant E(n)\exp(\sum_{s=1}^{n-1}\psi(s)) = K\exp(\sum_{s=1}^{n-1}\psi(s)) + \exp(\sum_{s=1}^{n-1}\psi(s)) \sum_{s=1}^{n-1}\varphi(s) g(D(s)).$$

由定理 2 得 $D(n) \leqslant K\exp(\sum_{s=1}^{n-1}\psi(s)) G^{-1}(\sum_{s=1}^{n-1}\varphi(s))$，其中 $G(u) = \int_1^u \frac{ds}{g(s)}$，$u \geqslant 1$.

由条件 ii) 得 $D(n) \leqslant K e^{K_2} G^{-1}(K_1) \leqslant K_3$，所以 $|\Delta u(n)| \leqslant K_3$，$\frac{|u(n)|}{n} \leqslant K_3$ 且 $\sum_{s=1}^{n-1} |f(s, u(s), \Delta u(s))| \leqslant \sum_{s=1}^{n-1} \varphi(s) g(\frac{|u(s)|}{s}) + \sum_{s=1}^{n-1} \psi(s)|\Delta u(s)| \leqslant K_1 g(K_3) + K_2 K_3$，所以

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n-1} f(s,u(s),\Delta u(s)) = \alpha(C_1,C_2),$$

又 $\lim_{n\to\infty} \Delta u(n) = C_2 - \alpha(C_1,C_2) = \beta$，由 stolz 定理，我们有 $\lim_{n\to\infty} \frac{u(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \Delta u(n) = \beta$.

所以对任意的常数b,有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u(n)-(b+\beta n)}{n}=\beta-\beta=0$,故$u(n)=b+\beta n+0(n)(n\to\infty)$.

参考文献:

[1] WANG Ji-zhong, MENG Fan-wei, LI Ji-bao. *Asymptotic behavior of solutions of second order nonlinear difference equations* [J]. Kodai Math., 1996, **19**(2): 200—206.

[2] DEMIDOVIC V B. *A stability test for difference equations* [J]. Diferentsial'nye urarneniya, 1969, **5**: 1247—1255. (in Russian)

[3] SZMANDA B. *Nonoscillation, oscillation and growth of solutions of nonlinear difference equations* [J]. Math. Anal. Appl., 1985, **109**: 22—30.

[4] MENG Fan-wei. *Boundedness of solutions of higher order of a class nonlinear difference equations* [J]. Ann. Differential Equations, 1988, **4**(4).

[5] YEH CC. *Discrete inequalities of the Gronwall-Bellman type in n independent variables* [J]. Math. Anal. Appl., 1985, **106**: 282—285.

[6] DEO S G, MUROESHAR M G. *A note on Gronwall's inequality* [J]. Bull. London Math. Soc., 1971, **3**: 34—36.

[7] PACHPATTE B G. *A note on Gronwall-Bellman inequality* [J]. Math. Anal. Appl., 1973, **44**: 758—762.

A Class of Discrete Type Bellman-Bihari Inequalities and Their Application

GAO Qing-ling

(Dept. of Math. & Phys., Shandong Educational College, Ji'nan 250013, China)

Abstract: Some new Bellman-Bihari inequalities of discrete type are established, which generalize and improve some known results on the solutions of the difference equation

$\Delta^2u(n)+f(n,u(n),\Delta u(n))=0$ where $(n,u,v)\in N\times R\times R$, $N=1,2,\cdots$.

Key words: nonlinear; discrete inequality; asymptotic property.