第 24 卷第 3 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 24 No. 3
2004 年 8 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 2004

# Hermite 矩阵方程*

杨昌兰[1]，　王龙波[2]

(1. 山东大学数学与系统科学学院，山东 济南 250061；2. 山东省青年干部管理学院，山东 济南 250000)

**摘　要**：本文讨论矩阵方程 $X^*AX=A$ 的求解，其中 $A$ 为 Hermite 矩阵，$X^*$ 为 $X$ 的转置矩阵. 文中给出解的表示式.

**关键词**：Hermite 矩阵；斜 Hermite 矩阵；转置共轭矩阵.

**分类号**：AMS(2000) 15A24/CLC number：O151.2

**文献标识码**：A　　　**文章编号**：1000-341X(2004)03-0500-03

我们在[1]中讨论了数域上以下矩阵方程的求解：

$$XAY=A, \tag{1}$$

其中 $A$ 是非退化矩阵，得出的结果是

**引理 1**　设 $A$ 为非退化矩阵，$P$ 为任意矩阵，且使 $A+P$ 和 $A-P$ 均为非退化矩阵，则

$$X=(A+P)(A-P)^{-1}, \tag{2}$$

$$Y=(A+P)^{-1}(A-P) \tag{3}$$

是(1)的解.

**引理 2**　设 $A$ 为非退化矩阵，$X,Y$ 为(1)的解，且 $X+E$ 和 $Y+E$ 为非退化矩阵，则存在矩阵 $P$，使 $A+P$ 和 $A-P$ 均为非退化矩阵，且(2)，(3)成立，这里 $E$ 为单位矩阵.

本文讨论复数域上矩阵方程

$$X^*AX=A \tag{4}$$

的一般解，这里 $A$ 为 Hermite 矩阵，$X^*$ 表示 $X$ 的转置共轭.

熟知，复矩阵 $A$ 称为 Hermite 的，如果 $A^*=A$；$A$ 称为斜 Hermite 的，如果 $A^*=-A$[2].

本文的主要结果是：

**定理 1**　设 $A$ 为非退化复 Hermite 矩阵，$P$ 为任一斜 Hermite 矩阵，且使 $A+P$ 和 $A-P$ 均为非退化，则

$$K=(A+P)^{-1}(A-P) \tag{5}$$

为方程(4)的解.

**证明**　在定理 1 的条件下，

---

* **收稿日期**：2001-09-03

**作者简介**：杨昌兰(1948- )，女，教授.

$$K^* = (A-P)^*((A+P)^{-1})^* = (A^*-P^*)(A^*+P^*)^{-1}$$
$$= (A+P)(A-P)^{-1}.$$

由引理 1,$K^*AK=A$,即 $K$ 为(4)的解. 证毕.

反之,我们有

**定理 2** 设 $A$ 为非退化复 Hermite 矩阵,$K$ 为方程(4)的非退化解,且 $E+K$ 和 $E+K^{-1}$ 均为非退化矩阵,则 $K$ 形如(5),其中 $P$ 为一个斜 Hermite 矩阵.

**证明** 由于 $K^*AK=A$,令

$$P = A(E-K)(E+K)^{-1}. \tag{6}$$

下面证明 $P$ 为斜 Hermite 矩阵. 事实上,

$$P^* = ((E+K)^{-1})^*(E-K)^*A^* = (E+K^*)^{-1}(E-K^*)A.$$

由 $K^*AK=A$,得 $K^*=AK^{-1}A^{-1}$,故

$$\begin{aligned}P^* &= (E+AK^{-1}A^{-1})^{-1}(E-AK^{-1}A^{-1})A\\ &= (AEA^{-1}+AK^{-1}A^{-1})^{-1}(AEA^{-1}-AK^{-1}A^{-1})A\\ &= A(E+K^{-1})^{-1}A^{-1}A(E-K^{-1})A^{-1}A\\ &= A(E+K^{-1})^{-1}(E-K^{-1})\\ &= A(E+K^{-1})^{-1}K^{-1}K(E-K^{-1})\\ &= A(K(E+K^{-1}))^{-1}(K-E) = A(K+E)^{-1}(K-E).\end{aligned}$$

因为 $(K+E)(K+E)^{-1}(K-E)=K-E$,故$(K+E)^{-1}(K+E)(K-E)=K-E$. 又由$(K+E)(K-E)=(K-E)(K+E)$,因而得到

$$(K+E)^{-1}(K-E)(K+E) = K-E,$$
$$(K+E)^{-1}(K-E) = (K-E)(K+E)^{-1},$$

故$(K+E)^{-1}$和 $K-E$ 可换,可推出

$$P^* = -A(E-K)(E+K)^{-1} = -P,$$

$P$ 为斜 Hermite 矩阵.

$$\begin{aligned}A+P &= A+A(E-K)(E+K)^{-1}\\ &= A(E+(E-K)(E+K)^{-1})\\ &= A((E+K)(E+K)^{-1}+(E-K)(E+K)^{-1})\\ &= A(E+K+E-K)(E+K)^{-1}\\ &= 2A(E+K)^{-1},\end{aligned}$$

故 $A+P$ 为非退化矩阵. 由(6),$P(E+K)=A(E-K)$,因而

$$P+PK = A-AK,\quad (A+P)K = A-P,\quad K = (A+P)^{-1}(A-P).$$

$K$ 形如(5),且 $P$ 为斜 Hermite 矩阵. 证毕.

以下考虑方程

$$XAX = A, \tag{7}$$

其中 $X$ 为 Hermite 矩阵解.

**定理 3** 设 $A$ 为非退化复 Hermite 矩阵,$P$ 为任一斜 Hermite 矩阵,且使 $A+P$ 和 $A-P$ 为非退化,满足 $AP=-PA$,则

$$K = (A + P)^{-1}(A - P)$$

为方程(7)的 Hermite 矩阵解.

**证明** 由定理 1，$K = (A + P)^{-1}(A - P)$ 为方程 $X^* AX = A$ 的解，下面证 $K^* = K$，即 $K$ 为(7)的 Hermite 解. 事实上，由 $AP + PA = 0$，可得 $A^2 + AP + PA + P^2 = A^2 - AP - PA + P^2$，即

$$(A + P)^2 = (A - P)^2,$$

$$(A + P)^{-1}(A - P) = (A + P)(A - P)^{-1}. \tag{8}$$

故由定理 1 的证明，由(8)，

$$K^* = (A + P)(A - P)^{-1} = K. \qquad \square$$

作为定理 3 的逆向定理，有

**定理 4** 设 $A$ 为非退化复 Hermite 矩阵，$K$ 为方程(7)的非退化 Hermite 解，且 $E + K$ 与 $E - K^{-1}$ 均为非退化矩阵，则 $K$ 形如

$$K = (A + P)^{-1}(A - P)$$

且适合 $AP + PA = 0$.

**证明** 由于 $K^* = K$，故 $K^* AK = A$，$K$ 为(4)的解. 由定理 2，故 $K$ 形如

$$K = (A + P)^{-1}(A - P),$$

其中 $P$ 为斜 Hermite 矩阵. 由 $K^* = K$，由定理 2 的证明，

$$(A + P)^{-1}(A - P) = (A + P)(A - P)^{-1},$$

因而 $(A + P)^2 = (A - P)^2$，即

$$A^2 + AP + PA + P^2 = A^2 - AP - PA + P^2, \quad AP + PA = 0.$$

## 参考文献：


[1] 杨昌兰. 一个二次矩阵方程的解 [J]. 工科数学，1997，**13**(1)：129－130.
YANG Chang-lan. *Solution to a second order matrix equation* [J]. Journal of Mathematics For Technology, 1997, **13**(1): 129－130. (in Chinese)

[2] LANCASTER P, TISMENEISKY M. *The Theory of Matrices with Applications. Second* [M]. Edition, Academic Press, Orlando, 1985, P15, 179.


# Hermitian Matrix Equation


YANG Chang-lan[1], WANG Long-bo[2]

(1. College of Math. & Sys. Sci., Shandong University, Ji'nan 250061, China;
2. Shandong Youth Administractive Cardres College, Ji'nan 250000, China)



**Abstract**: This paper considers the following matrix equation $X^* AX = A$, where $A$ is a Hermitian matrix.



**Key words**: Hermite matrix; Skew-Hermite matrix; conjugate transposed matrix.