第24卷第3期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 3
2004年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2004

域上矩阵群逆的加法保持映射*

卜长江[1]， 曹重光[2]

(1. 哈尔滨工程大学应用数学系，黑龙江 哈尔滨 150001；2. 黑龙江大学数学系，黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要：在本文中，我们刻画了保持域上矩阵群逆的加法映射的形式.

关键词：域；加法映射；矩阵群逆

分类号：AMS(2000) 15A04,15A09/CLC number：O151.21

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)03-0503-05

近几十年，线性保持问题已经成为矩阵论研究中一个相当活跃的领域(见[1]). 从1991年起某些作者已经开始用加法映射代替线性映射研究加法保持问题，即确定保不变量的矩阵加群同态(见[2]—[7])，本文第二作者曹重光在文[4]中已经给出了群逆保持的加法映射的形式，不过那时是在域的特征不为2和3的条件得出的. 本文利用新的途径，直接运用保幂等的结果去掉了特征不为3的条件，得到了同样的结果.

本文我们假定 F 是特征不为2的域，$M_n(F)$ 记 F 上 n 阶方阵全体构成的矩阵代数. 如果对 $A\in M_n(F)$，存在 $X\in M_n(F)$ 使

$$AXA=A,\quad XAX=X,\quad AX=XA$$

成立，则称 X 为 A 的群逆，记 $X=A^{\#}$. 满足前两式的 X 称为 A 的(1,2)逆，记为 $X\in A^{(1,2)}$.

设 f 为 $M_n(F)$ 到自身的映射，f 称为加法的，即 $f(A+B)=f(A)+f(B)$ 对一切 $A,B\in M_n(F)$ 成立. f 称为保群逆的，即由 $B=A^{\#}$ 推出 $f(B)=f(A)^{\#}$，所有保群逆的加法映射构成的集合记为 S.

本文中我们还以 $GL_n(F)$ 记 n 阶一般线性群，E_{ij} 记 (i,j) 位置是1其余位置是0的矩阵，I_n 记 n 阶单位阵，D_{ij} 记 $E_{ij}+E_{ji}$，K_n 记集合 $\{A\in M_n(F)\mid A^3=A\}$，$[1,n]$ 记集合 $\{1,2,\cdots,n\}$.

引理1[7] $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 在 K_n 中彼此交换，则存在 $P\in GL_n(F)$，使 $P^{-1}A_iP=\mathrm{diag}(d_1^{(i)},d_2^{(i)},\cdots,d_n^{(i)})(\forall\, i\in[1,t])$，其中 $d_j^{(i)}=1$ 或 -1 或 $0(\forall\, j\in[1,n])$.

引理2[7] 设 $A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$C=(c_{ij})\in M_n(F)$ 满足 P-性质，即 $A,B,C\in K_n$，

$$-B\pm C\in(A\pm C)^{(1,2)},$$

* 收稿日期：2002-01-29

基金项目：黑龙江省自然科学基金资助项目(A01-07)，哈尔滨工程大学基础研究基金项目(HEUF04019)

作者简介：卜长江(1963-)，男，副教授.

$$(A+B\pm C)^3=4(A+B\pm C),$$
$$(A-B\pm C)^3=2(A-B\pm C),$$

则下述成立：

1) $c_{kk}=0,\forall\, k\in[1,n]$.

2) 若对某 $c_{st}\neq 0(s\neq t)$,则 $a_s=b_t=0$;或 $a_t=b_s=0$ 且 $a_sb_t=1$.

3) 若 $C\neq 0$,则存在置换阵 $T\in M_n(F)$,使

$$T^{-1}AT=I_p\oplus -I_q\oplus 0,$$

且

$$T^{-1}BT=-I_\rho\oplus 0_{p-\rho}\oplus I_\delta\oplus 0_{q-\delta}\oplus I_{p-\rho}\otimes -I_{q-\delta}\oplus 0,$$

其中 $p+q\leqslant n-1$.

引理 3 设 $f\in S$,则对 F 中任意的非零元 a 及互异的 $i,j\in[1,n]$ 有

1) $f(a^{-1}E_{jj})^{\#}=f(aE_{jj})$;

2) $f(I_n\mp aE_{ij})^{\#}=f(I_n\pm aE_{ij})$;

3) $f(E_{ii}-E_{jj}\pm aE_{ij})^{\#}=f(E_{ii}-E_{jj}\pm aE_{ij})$;

4) $f(a^{-1}E_{ii}\pm a^{-1}E_{jj})^{\#}=f(aE_{ii}\pm aE_{jj})$;

5) $f(-a^{-1}E_{ii}+a^{-1}E_{jj}\pm a^{-1}D_{ij})^{\#}=\dfrac{1}{2}f(-aE_{ii}+aE_{jj}\pm aD_{ij})$;

6) $f(E_{ji}-E_{ij})^{\#}=f(E_{ij}-E_{ji})$;

7) $f(-bE_{ii}\pm a^{-1}D_{ij})^{\#}=f(a^2bE_{jj}\pm aD_{ij})\quad\forall\, b\in F$;

8) $f(E_{ii}+2E_{jj}\pm 2E_{ij})^{\#}=f(E_{ii}+\dfrac{1}{2}E_{jj}\mp E_{ij})$;

9) $f(2E_{ii}+E_{jj}\mp D_{ij})^{\#}=f(E_{ii}+2E_{jj}\pm D_{ij})$;

10) $f(E_{ii}+E_{jj}\pm D_{ij})^{\#}=\dfrac{1}{4}f(E_{ii}+E_{jj}\pm D_{ij})$.

证明 由直接计算及 $f\in S$ 易证.

引理 4[7] 设 $A,B\in M_n(F)$,若 $A\in A^{(1,2)}$,$A\pm B\in(A\pm B)^{(1,2)}$,且存在非零的 x 使 $xB\in B^{(1,2)}$,则 $AB=BA$,特别当 $x=-1$ 时,$B=0$.

引理 5 设 $f\in S$,则下述条件等价.

1) $f=0$,

2) 存在互异的 $i,j\in[1,n]$,使 $f(E_{ii}+E_{jj})=0$,

3) 存在互异的 $i,j\in[1,n]$,使 $f(D_{ij})=0$,

4) 存在 $i\in[1,n]$,使 $f(E_{ii})=0$,

5) $f(I_n)=0$.

证明 1)⇒2) 显然.

2)⇒3) 由 $f(E_{ii}+E_{jj})=0$ 及引理 3 的(7)和(9)得

$$\begin{aligned}f(E_{jj}\pm D_{ij})&=f(E_{ii}+2E_{jj}\pm D_{ij})=f(2E_{ii}+E_{jj}\mp D_{ij})^{\#}\\&=f(E_{ii}\mp D_{ij})^{\#}=f(-E_{jj}\mp D_{ij})\Rightarrow f(E_{jj}\pm D_{ij})=0,\end{aligned}$$

从而 $f(D_{ij})=0$.

3)⇒4) 在引理 3 的 4) 和 5) 中取 $a=1$ 且应用 $f(D_{ij})=0$ 得

$$\frac{1}{2}f(-E_{ii}+E_{jj})=\frac{1}{2}f(-E_{ii}+E_{jj}+D_{ij})=f(-E_{ii}+E_{jj}+D_{ij})^{\#}$$
$$=f(-E_{ii}+E_{jj})^{\#}=f(-E_{ii}+E_{jj})$$
$$\Rightarrow f(-E_{ii}+E_{jj})=0 \text{ 即 } f(E_{ii})=f(E_{jj}).$$

应用 $f(D_{ij})=0$,上式及引理 3 的(1) 和(7) 可得

$$-f(E_{ii})=f(-E_{ii}+D_{ij})=f(E_{jj}+D_{ij})^{\#}=f(E_{jj})=f(E_{ii}),$$

故 $f(E_{ii})=0$.

4)⇒5) 对任意 $j\neq i$,在引理 3 的(5) 和(7) 中选取 $a=b=1$,并应用 $f(E_{ii})=0$ 得

$$f(\pm D_{ij})=f(-E_{ii}\pm D_{ij})=f(-E_{jj}\pm D_{ij})^{\#}=f(E_{jj}-E_{ii}\pm D_{ij})^{\#}$$
$$=\frac{1}{2}f(E_{jj}-E_{ii}\pm D_{ij})=\frac{1}{2}f(E_{jj}\pm D_{ij})$$

于是 $\frac{1}{2}f(E_{jj}\pm D_{ij})=f(\pm D_{ij})$,因此 $f(E_{jj})=0$. 由 j 的任意性有

$$f(I_n)=f(\sum_{k=1}^{n}E_{kk})=\sum_{k=1}^{n}f(E_{kk})=0.$$

5)⇒1) 对任意的 $a\in F$ 和互异的 $i,j\in[1,n]$,由 $f(I_n)=0$ 及引理 3 的(2) 得

$$-f(aE_{ij})=f(I_n-aE_{ij})=f(I_n+aE_{ij})^{\#}=f(aE_{ij})^{\#}$$

故有

$$-f(aE_{ij})\in f(aE_{ij})^{(1,2)} \tag{1}$$

应用引理 3 的 3) 和 4) 得

$$\begin{cases}f(E_{ii}-E_{jj})\in f(E_{ii}-E_{jj})^{(1,2)}\\ f(E_{ii}-E_{jj}\pm aE_{ij})\in f(E_{ii}-E_{jj}\pm aE_{ij})^{(1,2)}\end{cases} \tag{2}$$

在引理 4 中取 $A=f(E_{ii}-E_{jj}),B=f(aE_{ij})$ 并应用(1) 和(2) 式得

$$f(aE_{ij})=0 \tag{3}$$

将(3) 式代入引理 3 的 4) 和 5) 得

$$\frac{1}{2}f(aE_{jj}-aE_{ii})=\frac{1}{2}f(aE_{jj}-aE_{ii}+aD_{ij})=f(a^{-1}E_{jj}-a^{-1}E_{ii}+a^{-1}D_{ij})^{\#}$$
$$=f(a^{-1}E_{jj}-a^{-1}E_{ii})^{\#}=f(aE_{jj}-aE_{ii})$$

从而

$$f(aE_{ii})=f(aE_{jj}) \tag{4}$$

综合(3)、(4) 及引理 3 的(7) 得

$$-f(aE_{jj})=f(-aE_{jj}+aD_{ij})=f(a^{-1}E_{ii}+a^{-1}D_{ij})^{\#}$$
$$=f(a^{-1}E_{ii})^{\#}=f(aE_{ii})=f(aE_{jj})$$

故

$$f(aE_{jj})=0 \tag{5}$$

所以由 i,j 和 a 的任意性,应用(3) 和(5) 式得 $f=0$.

引理 6 设 $0\neq f\in S$,则存在 $P\in GL_n(F)$ 使

$$P^{-1}f(E_{kk})P=\varepsilon E_{kk},\forall\, k\in[1,n],\varepsilon=\pm 1.$$

证明 对于任意互异的 $i,j\in[1,n]$,在引理 4 中取 $A=f(E_{ii}),B=f(E_{jj})$ 且应用引理

3 的(1)、(4) 知 $f(E_{11}),f(E_{22}),\cdots,f(E_{nn})\in K_n$ 彼此交换，于是由引理 1 和引理 5，存在可逆阵 Q，使

$$Q^{-1}f(E_{kk})Q=\mathrm{diag}(c_1^{(k)},c_2^{(k)},\cdots,c_n^{(k)})\quad \forall\, k\in[1,n] \tag{6}$$

其中 $c_i^{(k)}=1$ 或 0 或 -1.

对于任意互异的 $i,j\in[1,n]$，由引理 3 的 1)，5)，7)，10) 得 $f(E_{ii}),f(E_{jj})$ 和 $f(D_{ij})$ 具有引理 2 的 P- 性质，故 $Q^{-1}f(E_{ii})Q$、$Q^{-1}f(E_{jj})Q$ 和 $Q^{-1}f(D_{ij})Q$ 具有 P- 性质，应用(6)，$f\neq 0$，引理 5 和引理 2 的 3) 得

$$1\leqslant 秩\, f(E_{11})=秩\, f(E_{22})=\cdots=秩\, f(E_{nn})\leqslant n-1, \tag{7}$$

且

$$c_s^{(i)}c_s^{(j)}\in\{-1,0\}\quad \forall\, s,i,j\in[1,n],i\neq j. \tag{8}$$

易见

$$1\leqslant 秩\, f(E_{11})=秩\, f(E_{22})=\cdots=秩\, f(E_{nn})\leqslant 2.$$

如果秩 $f(E_{kk})=2,\forall\, k\in[1,n]$，则 $\sum\limits_{s=1}^{n}|c_s^{(k)}|=2$，$|c_s^{(k)}|$ 表示 $c_s^{(k)}$ 非零元个数 1 或 0. 从而 $\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|c_s^{(k)}|=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}|c_s^{(k)}|=2n$，于是由(8) 得 $\sum\limits_{k=1}^{n}|c_s^{(k)}|=0$，由 s 的任意性有

$$f(I_n)=\sum_{k=1}^{n}f(E_{kk})=\mathrm{diag}\Big(\sum_{k=1}^{n}c_1^{(k)},\sum_{k=1}^{n}c_2^{(k)},\cdots,\sum_{k=1}^{n}c_n^{(k)}\Big)=0,$$

这与引理 5 及 $f\neq 0$ 矛盾.

如果秩 $f(E_{kk})=1,\forall\, k\in[1,n]$ 由引理 3 的 3) 和引理 5 易证结论成立.

定理 设 $n\geqslant 2,f\in S$ 当且仅当 f 有如下三种形式之一：

1) $f=0$.

2) $f(X)=\varepsilon PX^{\tau}P^{-1}\quad \forall\, X=(x_{ij})\in M_n(F)$，其中 $\varepsilon=\pm 1,P\in GL_n(F),X^{\tau}=(\tau(x_{ij}))$，$\tau$ 是 F 的域单同态.

3) $f(X)=\varepsilon P(X^{\tau})^{\mathrm{T}}P^{-1}\quad \forall\, X\in M_n(F)$，其中 ε,P,τ 同上.

证明 充分性显然，下证必要性.

任取幂等阵 A，显然有 $A=Q_A(I_r\oplus 0)Q_A^{-1}$，令 $f_A(X)=f(Q_AXQ_A^{-1}),\forall\, X\in M_n(F)$，易见 $f_A\in S$.

如果 $f\neq 0$，由引理 5 及引理 6 得到：存在 $R_A\in GL_n(F)$ 使

$$f_A(E_{ii})=\varepsilon R_AE_{ii}R_A^{-1},\forall\, i\in[1,n],\quad \varepsilon=\pm 1,$$

于是

$$\varepsilon f(A)=\varepsilon f(Q_A(I_r\oplus 0)Q_A^{-1})=\varepsilon f_A(I_r\oplus 0)=R_A(I_r\oplus 0)R_A^{-1},$$

故知 εf 为 $M_n(F)$ 的保幂等的加法算子，应用[4] 的定理 2.1 知 f 为如下三种形式之一：

(i) $f(X)=\varepsilon\sigma(\mathrm{tr}X),\forall\, X\in M_n(F)$，其中 σ 是从 F 到 $M_n(F)$ 的加群同态且 $\sigma(1)=0$.

(ii) $f(X)=\varepsilon P(X^{\tau}+\sigma(\mathrm{tr}X))P^{-1},\forall\, X=(x_{ij})\in M_n(F)$，其中 $P\in GL_n(F),X^{\tau}=(\tau(x_{ij}))$，$\sigma$ 同(i) 中定义，τ 是 F 的域单同态.

(iii) $f(X)=\varepsilon P((X^{\tau})^{\mathrm{T}}+\sigma(\mathrm{tr}X))P^{-1},\forall\, X\in M_n(F)$，其中 P,τ,σ 同上.

任取 a 为 F 中的非零元，令 $X=I_n+E_{21}+(1-a^{-1})E_{12}$，则 $X^{-1}=X^{\#}$ 从而 $f(X^{-1})=$

$f(X)^{\#}$,若为形式(i),则 $\varepsilon\sigma(n-2+2a)=[\varepsilon\sigma(n)]^{\#}$,由此推出 $\sigma=0$,即 $f=0$;若 f 为形式(ii),则 $\epsilon((X^{-1})^{\tau}+2\sigma(a))=(\epsilon X^{\tau})^{\#}$,由此推出 $\sigma=0$,故 f 有定理的结论 2) 中的形式,类似可证当 f 取(iii) 时,可证得 f 有定理的结论 3) 中的形式.

参考文献:

[1] LI C K, TSING N K. *Linear preserver problems: a brief introduction and Some special techniques* [J]. Linear Algebra Appl., 1992, **162**-**164**: 217-235.

[2] OMLADIČ M, ŠEMRL P. *Spectrum-preserving additive maps* [J]. Linear Algebra Appl., 1991, **153**: 67-72.

[3] OLADIČ M, ŠEMRL P. *Additive mappings preserving operators of rank one* [J]. Linear Algebra Appl., 1993, **182**: 239-256.

[4] CAO Chong-guang, ZHANG Xian. *Additive operators preserving idempotente matrices over fields and applications* [J]. Linear Algebra Appl., 1996, **248**: 327-338.

[5] ZHANG Xian, CAO Chong-guang, BU Chang-jiang. *Additive maps preserving M-P inverses of matrics over fields* [J]. Linear. Multilinear Algebra, 1999, **46**: 199-211.

[6] BELL J, SOUROUR A R. *Additive rank-one mapping on triangular matrix algebras* [J]. Linear Algebra Appl., 2000, **312**: 13-33.

[7] 张 显,曹重光. 保不变量的矩阵加群同态[M]. 哈尔滨出版社, 2001.
ZHANG Xian, CAO Chong-guang. *Homomophisms between Matrix Additive Group which Preserver Invariats* [M]. Harbin Press, 2001. (in Chinese)

Additive Maps Preserving Group Inverses of Matrics over Fields

BU Chang-jiang[1], CAO Chong-guang[2]

(1. Dept. of Appl. Math., Harbin Engineering University, Heilongjiang 150001, China;
2. Dept. of Math., Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

Abstract: In this paper, we characterize the forms of additive maps which preserves group inverses of matrics over fields.

Key words: field; additive map; group inverse of matrics.