第24卷第3期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 3
2004年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2004

Jacobson 猜想成立的某些充分条件*

陈良云[1,2], 张永正[3]

(1. 东北师范大学数学系, 吉林 长春 130024; 2. 南开大学数学系, 天津 300071;
3. 哈尔滨师范大学数学系, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要:Jacobson 在文献[1]给出了一个猜想:若$(L,[p])$为限制李代数,且$x^{[p]^{n(x)}}=x$, $\forall x\in L,n(x)>0$,则L是交换李代数.至今为止,人们还不知此猜想是否正确.本文分别证明这个猜想在p映射为p半线性映射或者域F为代数闭域条件下的正确性.

关键词:限制李代数; Jacobson 猜想; p半线性映射; 半单元素.

分类号:AMS(2000) 17B40/CLC number: O152.5

文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2004)03-0508-05

1 引 言

尽管 I. N. Herstein 在文献[2]已证明:设R为结合环,$\forall x\in R,x^{n(x)}=x,n(x)>1$,则$R$是可换的.但从环到李代数,此方法行不通. G. P. Hochschild 在文献[3]已证明:若F为代数闭域,$(L,[p])$为有限维限制李代数,且$[p]$为非退化,则L是交换李代数.

本文证明了下列两个命题,并得到了一些p映射的性质.

(1) 若$(L,[p])$为域F上的有限维限制李代数,p映射为p半线性映射,且$x^{[p]^{n(x)}}=x,\forall x\in L,n(x)>0$,则$L$是交换李代数.

(2) 若$(L,[p])$为代数闭域F上的有限维限制李代数,且$x^{[p]^{n(x)}}=x,\forall x\in L,n(x)>0$,则$L$是交换李代数.

本文总设基域F的特征数为素数$p>2$.

定义 1.1[4] 设L为域F上的李代数,如果在L中有一个映射$[p]:x\to x^{[p]},x\in L$,满足以下三个条件:

1) $(\alpha x)^{[p]}=\alpha^p x^{[p]},\forall x\in L,\alpha\in F$;

2) $\mathrm{ad}x^{[p]}=(\mathrm{ad}x)^p,\forall x\in L$;

3) $(x+y)^{[p]}=x^{[p]}+y^{[p]}+\sum_{i=1}^{p-1}s_i(x,y),\forall x,y\in L$,其中$s_i(x,y)$满足等式

---

* 收稿日期:2002-03-14

基金项目:国家自然科学基金(10271076)和教育部科学技术重点研究项目(03060)资助项目.

作者简介:陈良云(1974-),博士,讲师.

$$(\mathrm{ad}(x\otimes X+y\otimes 1))^{p-1}(x\otimes 1)=\sum_{i=1}^{p-1}s_i(x,y)\otimes X^{i-1}\in L\otimes_F F[X].$$

则称$(L,[p])$为限制李代数,$[p]$为p映射.

定义 1.2[4] 限制李代数$(L,[p])$的元素x称为半单元素,如果$x=\alpha_1 x^{[p]}+\cdots+\alpha_m x^{[p]^m}$,$\alpha_i\in F$,$F$为特征$p$的基域.

定义 1.3[4] 如果$\forall\, x\neq 0, x^{[p]}\neq 0$,则称$[p]$为非退化映射.

定义 1.4[4] 设$f:L\to L, f(\alpha x+y)=\alpha^p x^{[p]}+y^{[p]}, \forall\, x,y\in L,\alpha\in F$,则称$f$为$p$半线性映射.

定义 1.5[4] 如果$\forall\, x\in L$,$\mathrm{ad}x:L\to L$是半单自同态,则称限制李代数L为ad半单的.

2 在$[p]$映射为p半线性映射条件下推证猜想的正确性及其推广

引理 2.1 若$x\in L, x^{[p]^{n(x)}}=x$,则$\forall\, k\in N, x^{[p]^{kn(x)}}=x$.

证明 $x^{[p]^{kn(x)}}=(\cdots x^{[p]^{n(x)}}\cdots)^{[p]^{n(x)}}=\cdots=x^{[p]^{n(x)}}=x.$ □

引理 2.2[5] 如果$[p]$为$L\to L$的p半线性映射,则$\forall\, k\in N,[p]^k$也是p半线性映射.

引理 2.3 设$(L,[p])$为域F上的有限维限制李代数,$[p]$映射为p半线性映射,且$\forall\, x\in L, x^{[p]^{n(x)}}=x$,则域$F$为完全域.

证明 设L的一组基为$x_1,\cdots,x_n$,由已知可得:$x_i^{[p]^{n(x_i)}}=x_i, 1\leqslant i\leqslant n$. 令$m=n(x_1)n(x_2)\cdots n(x_n)$.则由引理2.1知$x_i^{[p]^m}=x_i$.

再由引理2.2知,若$[p]$为p半线性映射,则$\forall\, k\in N,[p]^k$也是p半线性映射.$\forall\, x\in L$,$\exists\,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in F$使得$x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$.因此$x=x^{[p]^{m\cdot n(x)}}=(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n)^{[p]^{m\cdot n(x)}}=(\alpha_1x_1)^{[p]^{m\cdot n(x)}}+(\alpha_2x_2)^{[p]^{m\cdot n(x)}}+\cdots+(\alpha_nx_n)^{[p]^{m\cdot n(x)}}=(\alpha_1)^{p^{m\cdot n(x)}}x_1^{[p]^{m\cdot n(x)}}+\cdots+(\alpha_n)^{p^{m\cdot n(x)}}x_n^{[p]^{m\cdot n(x)}}=(\alpha_1)^{p^{m\cdot n(x)}}x_1+\cdots+(\alpha_n)^{p^{m\cdot n(x)}}x_n$.

又由于$x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$,且$x_1,x_2,\cdots,x_n$是线性无关的,则$\alpha_i=\alpha_i^{p^{m\cdot n(x)}}$.故$F$为完全域. □

定理 2.4 设$(L,[p])$为域F上的有限维限制李代数,$[p]$映射为p半线性映射,且$\forall\, x\in L, x^{[p]^{n(x)}}=x$.则$\forall\, x\in L$,存在$m\in N$使得$x^{[p]^m}=x$.

证明 由引理2.3知,域F为完全域.又由于F为特征p的,则$\forall\,\alpha\in F, i\in N, \alpha^{p^i}=\alpha$.设$L$的一组基为$x_1,\cdots,x_n$,则$\forall\, x\in L$,$\exists\,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in F$,使得$x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$.令$m=n(x_1)n(x_2)\cdots n(x_n)$.则由引理2.1知$x_i^{[p]^m}=x_i$.再由引理2.2知,若$[p]$为$p$半线性映射,则$\forall\, k\in N,[p]^k$也是$p$半线性映射.因此$x^{[p]^m}=(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n)^{[p]^m}=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=x$.即,$\forall\, x\in L$,存在$m\in N$使得$x^{[p]^m}=x$. □

引理 2.5[5] 设$x,y\in L, x^{[p]^m}=x, y^{[p]^m}=y, \forall\,\alpha\in F, \alpha^{p^m}=\alpha$.则下列条件等价:

(1) $[x,y]=0$;

(2) $(\alpha x+y)^{[p]^m}=\alpha x+y, \forall\,\alpha\in F$.

运用以上知识,证明Jacobson猜想在p半线性映射条件下的正确性.

定理 2.6 设$(L,[p])$为域F上的有限维限制李代数,$[p]$映射为p半线性映射,且$\forall x \in L$, $x^{[p]^{n(x)}} = x$. 则L是交换李代数.

证明 由引理2.2,2.3知,$(\alpha x + y)^{[p]^m} = \alpha x + y, \forall \alpha \in F$. 因此由引理2.5,$[x,y] = 0$. 即$L$是交换李代数. □

以下是Jacobson猜想的推广:

引理 2.7[1] 设L为域F上的限制李代数,$\forall x \in L, \alpha \in F, x^{[p]} = \alpha x$,且$\alpha \neq 0$为固定的,则$L$是可换的.

定理 2.8 若$(L,[p])$为域F上的有限维限制李代数,$[p]$映射为p半线性映射,且$\forall x \in L, \alpha(x) \in F$, $x^{[p]} = \alpha(x)x$,则L是可换的.

证明 由引理2.7知,只须证明$\alpha(x)$为常数即可. 由$\forall x \in L, x^{[p]} = \alpha(x)x$得,$(x+y)^{[p]} = \alpha(x,y)(x+y) = \alpha(x,y)x + \alpha(x,y)y$. 由于$[p]$为$p$半线性映射知,$(x+y)^{[p]} = \alpha(x)x + \alpha(y)y$. 故$\alpha(x) = \alpha(y) = \alpha(x,y)$. 由$x,y$的任意性知$\alpha(x)$为常数. □

3 当F为代数闭域时,推证猜想的正确性及Jacobson猜想的推广

定理 3.1 设$(L,[p])$为域F上的有限维限制李代数,且$\forall x \in L$, $x^{[p]^{n(x)}} = x$. 则$\mathrm{ad}x$是半单的.

证明 $\forall x \in L$,代数$F[\mathrm{ad}x] \subseteq \mathrm{End}_F(L)$且$x^{[p]^{n(x)}} = x$, 则$(\mathrm{ad}x)^{p^{n(x)}} = \mathrm{ad}x$. 由于$L$为有限维,设$\{\mathrm{id}L, \mathrm{ad}x, (\mathrm{ad}x)^2, \cdots, (\mathrm{ad}x)^n\}$是$F[\mathrm{ad}x]$的一组基. 如果$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\mathrm{ad}x)^i$是幂零的,则存在$k$使得$0 = f^{p^{kn(x)}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{p^{kn(x)}} ((\mathrm{ad}x)^i)^{p^{kn(x)}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{p^{kn(x)}} (\mathrm{ad}x)^i$,故$\alpha_i = 0, 1 \leqslant i \leqslant n$. 即$f = 0$,则$\mathrm{ad}x$是半单的. □

定理 3.2 若$(L,[p])$为代数闭域F上的有限维限制李代数,$\forall x \in L, x^{[p]^{n(x)}} = x, n(x) \neq 1$. 则$L$是交换李代数.

证明 由定理3.1知,$\mathrm{ad}x$是半单的. 设y是$\mathrm{ad}x$的属于特征值λ的特征向量,故有$[x,y] = \lambda y$或$[y,x] = -\lambda y$. 由于$\mathrm{ad}x$是半单的,故有$x = \sum_{i=1}^{k} x_i, [y,x_i] = \mu_i x_i$. 当$i \neq j$时,$\mu_i \neq \mu_j$. 于是$-\lambda y = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i$. 由于$y$是$\mathrm{ad}y$的属于0的特征向量,于是$k = 1, \lambda = \mu_1 = 0$. 故$L$是可换的,即猜想在代数闭域条件下是正确的. □

以下推证交换李代数的其它充分条件及猜想的推广:

引理 3.3[4] 设$(L,[p])$是域F上的有限维限制李代数,则下列条件等价:

1) $[p]$是非退化的,F是完全域;

2) $[p]$是单射,F是完全域;

3) $[p]$是满射.

定理 3.4 设$(L,[p])$是完全域F上的有限维限制李代数,$[p]$映射为非退化,则$\forall x \in L, x$是半单元素.

证明　若 $0 \neq x \in L$，由引理 3.3 知，$[p]$ 一定是一一映射. 由于 L 是有限维的，则 $x, x^{[p]}, \cdots, x^{[p]^m}, \cdots$ 是线性相关(否则，L 的维数是无穷的). 不妨设 $x^{[p]^m} = \alpha_1 x + \alpha_2 x^{[p]} + \cdots + \alpha_m x^{[p]^{m-1}}$ 成立的最小自然数为 m，则 $x, x^{[p]}, \cdots, x^{[p]^{m-1}}$ 必线性无关，且 x 是 L 的半单元素.

这是因为，若 $\alpha_1 \neq 0$，则 $x = 1/\alpha_1 (x^{[p]^m} - \alpha_2 x^{[p]} - \cdots - \alpha_m x^{[p]^{m-1}})$. 因此 x 是 L 的半单元素. 若 $\alpha_1 = 0$，令 $\beta_i = (1/\alpha_i)^{1/p}, 2 \leqslant i \leqslant m-1$，则由 $x^{[p]^m} = \alpha_1 x + \alpha_2 x^{[p]} + \cdots + \alpha_m x^{[p]^{m-1}}$ 知 $x^{[p]^m} - \alpha_2 x^{[p]} - \cdots - \alpha_m x^{[p]^{m-1}} = 0$，即 $(x^{[p]^{m-1}} - \beta_2 x - \cdots - \beta_m x^{[p]^{m-2}})^{[p]} = 0$.

又由 $[p]$ 是双射知 $x^{[p]^{m-1}} - \beta_2 x - \cdots - \beta_m x^{[p]^{m-2}} = 0$，即 $x^{[p]^{m-1}} = \beta_2 x + \cdots + \beta_m x^{[p]^{m-2}}$ 这与 m 取法矛盾. 故 $\alpha_1 \neq 0$，则 $\forall\, x \in L$，x 是 L 的半单元素. □

定义 3.1　若 $0 \neq x \in L, x^{[p]^k} \neq 0, \forall\, k \in N$，则称 $[p]$ 为强非退化的. 显然若 $[p]$ 是强非退化的，则 $[p]$ 一定是非退化的. 反之，则不一定成立.

定理 3.5　完全域 F 上的有限维限制李代数 $(L, [p])$，则 $\forall\, x \in L$，x 是半单元素当且仅当 $[p]$ 是强非退化的.

证明　($\Leftarrow$) 由于 $[p]$ 是强非退化，则 $[p]$ 也是非退化的且 F 为完全域，则由定理 3.4 知 $\forall\, x \in L$，x 是半单元素.

($\Rightarrow$) 假设存在 $x \neq 0$，使得 $x^{[p]^k} = 0$，其中 $k = \min\{m \in N \mid x \in L, x^{[p]^m} = 0\}$，则 $x^{[p]^{k-1}} \neq 0$，故可以断定 x 不是半单元素. 这是因为假设 x 是半单元，则不妨设 $x = \alpha_1 x^{[p]} + \cdots + \alpha_m x^{[p]^m}, \alpha_i \in F$. 则 $x^{[p]^{k-1}} = (\alpha_1 x^{[p]} + \cdots + \alpha_m x^{[p]^m})^{[p]^{k-1}} = 0$，这与 $x^{[p]^{k-1}} \neq 0$ 矛盾，故命题成立. □

推论 3.6　完全域 F 上的有限维限制李代数 $(L, [p])$，$\forall\, x \in L$，x 是半单元素，则 $[p]$ 是非退化的.

引理 3.7　设 $(L, [p])$ 为域 F 上的有限维限制李代数，$\forall\, x \in L, x^{[p]^{n(x)}} = \alpha x$，$\alpha$ 固定，则域 F 是完全域.

证明　$\forall\, x \in L, (\beta x)^{[p]^{n(x)}} = \beta^{p^{n(x)}} x^{[p]^{n(x)}} = \beta^{p^{n(x)}} \alpha x$，所以 $\beta^{p^{n(x)}} \alpha = \alpha \beta$. 则 $\beta = \beta^{p^{n(x)}}, \forall\, \beta \in F$. 故域 F 为完全域. □

推论 3.8　设 $(L, [p])$ 为有限维限制李代数，$\forall\, x \in L, x^{[p]^{n(x)}} = \alpha x$，$\alpha$ 固定，则 $[p]$ 是非退化的.

证明　由 $x^{[p]^{n(x)}} = \alpha x$ 知 $x = 1/\alpha, x^{[p]^{n(x)}}$，即 x 是半单元素，且 F 为完全域，则由推论 3.6 知 $[p]$ 是非退化的. □

以下是 Jacobson 猜想的推广：

引理 3.9[3]　若 F 为代数闭域，$(L, [p])$ 为有限维限制李代数，且 $[p]$ 为非退化，则 L 是交换李代数.

定理 3.10　若 F 为代数闭域，$(L, [p])$ 为有限维限制李代数，$\forall\, x \in L, x^{[p]^{n(x)}} = \alpha x$，$\alpha$ 固定，则 L 是交换李代数.

证明　由推论 3.8 和引理 3.9 可得定理 3.10. □

参考文献：

[1] JACOBSON N. *Lie Algebras* [M]. Dover., Publ., New York, 1979.

[2] HERSTEIN I N. *Non Communicative Ring* [M]. Carus Math. Monographs #15, Math. Assn. of America, 1968.

[3] HOCHSCHILD G P. *Representations of restrited Lie alggebras of characteristic p* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**: 603－605.

[4] STRADE H, FARSTEINER R. *Modular Lie Algebras and Their Representations*[M]. New York: Marcel Dekker. Inc., 1988, 300.

[5] FARSTEINER R. *Restricted Lie algebras with semilinear p-mappings* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1984, **91**: 41－45.

[6] SELIGMAN G B. *Modular Lie Algebras* [M]. Springer-Verlag, Berlin, Heidelbeg, New York, 1967.

[7] JIANG Cui-bo, MENG Dao-ji. *Some complete Lie algebras* [J]. J. Algebra, 1996, **186**: 807－817.

[8] MENG Dao-ji, WANG S Q. *On the construction of complete Lie algebras* [J]. J. Algebra, 1995, **176**: 621－637.

[9] BLOCK R E, WILSON R L. *The simple restricted Lie algebrasof rank two* [J]. Ann. of Math., 1982, **115**: 93－168.

[10] STRADE H. *Darstellungen auflosbarer restricted Lie algebras* [J]. Ann. of Math., 1978, **232**: 15－32.

Some Sufficient Conditions for Jacobson's Conjecture

CHEN Liang-yun[1,2], ZHANG Yong-zheng[3]

(1. Dept. of Math., Northeast Normal University, Changchun 130024, China;

2. Dept. of Math., Nankai University, Tianjin 300071, China;

3. Dept. of Math., Haerbin Normal University, Heilongjiang 150080, China)

Abstract: Jacobson conjectured that every restricted Lie algebra $(L,[p])$ satisfying the requirement $x^{[p]^{n(x)}}=x$ and $n(x)>0$ for every $x\in L$ is abelian. So far, people haven't still known whether the conjecture is true. There are some sufficient conditions for Jacobson's conjecture in the paper.

Key words: restricted Lie algebras; Jacobson's conjecture; semisimple elements; p-semilinear mappings.