第24卷第3期 数学研究与评论 Vol.24 No.3
2004年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug.2004

简单自反 DTS (v,λ) 的存在谱*

田子红， 康庆德
（河北师范大学数学与信息科学学院，河北 石家庄 050016）

摘 要：一个 Directed 三元系 DTS$(v,\lambda)=(X,\mathscr{B})$是自反的，如果它与它的逆$(X,\mathscr{B}^{-1})$同构，其中$\mathscr{B}^{-1}=\{(z,y,x);(x,y,z)\in\mathscr{B}\}$. 继已给出 SCDTS$(v,\lambda)$的存在谱之后，又给出简单 SCDTS$(v,\lambda)$的存在谱.

关键词：可迁三元组；Directed 三元系；简单设计；λZ_v^* 的分拆.
分类号：AMS(2000) 05B07/CLC number：O157.2
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2004)03-0525-16

1 引 言

设X是一个v元集，$v\geqslant 3$. X的一个可迁三元组是由三个有序对(x,y)，(y,z)与(x,z)构成的集合，记为(x,y,z)，其中x,y,z为X中的不同元. X上的一个有向(Directed)三元系$\mathscr{B}$由X的一些可迁三元组(简称区组)构成，使得X上每个由不同元素组成的有序对都恰在$\mathscr{B}$的λ个区组中出现，此三元系简记为DTS$(v,\lambda)=(X,\mathscr{B})$. 显然，$|\mathscr{B}|=\frac{\lambda v(v-1)}{3}$. 已经知道[1]，DTS$(v,\lambda)$存在的充要条件为$\lambda v(v-1)\equiv 0 \pmod 3$，且$v\geqslant 3$. 有向三元系DTS$(v,\lambda)$是无序三元系TS$(v,\lambda)$的有序化. 所谓TS$(v,\lambda)$是指对子$(X,\mathscr{A})$，其中$X$为$v$元集，$\mathscr{A}$为$X$上一些无序三子集(亦称区组)构成的族，使得$X$上每个由不同元素构成的无序对恰出现在$\mathscr{A}$的$\lambda$个区组中. 易见，$|\mathscr{A}|=\frac{\lambda v(v-1)}{6}$. 一个区组集中不含重复区组的区组设计称为简单设计.

给定一个DTS$(v,\lambda)=(X,\mathscr{B})$，定义$\mathscr{B}^{-1}=\{B^{-1}=(z,y,x);B=(x,y,z)\in\mathscr{B}\}$，显然，$(X,\mathscr{B}^{-1})$也是一个$DTS(v,\lambda)$，称其为$(X,\mathscr{B})$的逆. 若存在$X$上的置换$f$，使得$f(\mathscr{B})=\{f(B);B\in B\}=\mathscr{B}^{-1}$，则称此DTS$(v,\lambda)$为自反的，记为SCDTS$(v,\lambda)=(X,\mathscr{B},f)$，这里$f(B)=(f(x),f(y),f(z))$，$B=(x,y,z)\in\mathscr{B}$. 易知，要说明一个DTS$(v,\lambda)=(X,\mathscr{B})$为自反的，只须证明，对于任意区组$B=(x,y,z)\in\mathscr{B}$，在给定的置换$f$下均有$f(B)^{-1}=(f(z),f(y),f(x))\in\mathscr{B}$.

自反DTS(v,λ)的存在性问题是由C. J. Colbourn与A. Rosa在《当代设计理论》一书的第

* 收稿日期：2002-06-03
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10371031)；河北省自然科学基金资助项目(103146)
作者简介：田子红(1966-)，女，博士，副教授.

四章[1] 中作为公开问题提出的. 在文[2] 中,康庆德等已经给出 SCDTS$(v,1)$ 的存在谱为 $v(v-1)\equiv 0 \pmod 3$,且 $v\neq 6$. 文[3] 中,我们给出了自反 DTS(v,λ) 的存在谱:$\lambda v(v-1)\equiv 0 \pmod 3$,$\lambda\leqslant 3(v-2)$,$(v,\lambda)\neq(6,1)$. 本文中,我们将研究简单 SCDTS$(v,\lambda)$ 的存在性.

2 λZ_v^* 及其分拆

记 $Z_v=\{0,1,\cdots,v-1\}$ 为模 v 剩余类环,而 λZ_v^* 表示 Z_v 中全部非零元各重复 λ 次的多重集. Z_v 中的非零元 d,亦称为差,而有序对集 $\{(x,x+d);x\in Z_v\}$ 称为此差所对应的有序对族.

对于 Z_v 中不同的两个非零元 a,c,令 $b\equiv c-a \pmod v$,称 $[a,b,c]$ 为一个差三元组(注意 a,b,c 的排列是有序的,且允许 $a=b$). 它对应的可迁三元组族是 $\{(x,x+a,x+c);x\in Z_v\}$,其中,每个区组的三个有序对 $(x,x+a)$,$(x+a,x+c)$,$(x,x+c)$ 所对应的差均为 $a,b=c-a$ 及 c.

定义:"λZ_v^* 的分拆 $S\cup D$"

将 λZ_v^* 中 $\lambda(v-1)$ 个元(亦称为差)分拆为两族,其中第一族的元组成若干个两两不同的差三元组构成 S,第二族的元以单个的差出现构成 D,称 $S\cup D$ 为 λZ_v^* 的分拆. 特别地,我们将考察两类特殊的分拆 $S\cup D$:

A 型分拆:若"$[a,b,c]\in S$,则 $[b,a,c]\in S$";

B 型分拆:若"$[a,b,c]\in S$,则 $[-b,-a,-c]\in S$".

以下,我们对于奇数 v 给出 λZ_v^* 的几种不同的分拆 $S\cup D$,并指出相应的数值 $d=|D|$. 不难看出,在所给的各种分拆中,除去 Partition 6 的最后一种是 B 型分拆外,其余均为 A 型分拆.

Partition 1. $3Z_v^*$ ($v\geqslant 3$,奇数)

$$S=\{[i,i,2i];i\in Z_v^*\},D=\emptyset,d=|D|=0.$$

Partition 2. $2\lambda Z_v^*$ ($\lambda\geqslant 1,v=6s+1,s\geqslant 1$). 令

$$\left.\begin{array}{l} a(i,j)=2i+1-2j,b(i,j)=5s-i+2j \\ M(i,j)=[a(i,j),b(i,j),a(i,j)+b(i,j)] \end{array}\right\}0\leqslant j\leqslant i\leqslant s-1,$$

$$\left.\begin{array}{l} u(i,j)=2i+2-2j,v(i,j)=3s-1-i+2j \\ N(i,j)=[u(i,j),v(i,j),u(i,j)+v(i,j)] \end{array}\right\}0\leqslant j\leqslant i\leqslant s-2,$$

这里运算皆为 Z_v 中的. 显然 $M(i,j),N(i,j)$ 为 λZ_v^* 中差三元组. 进而定义

$$T_j=\{M(i,j),\overline{M}(i,j);0\leqslant j\leqslant i\leqslant s-1\}\cup\{N(i,j),\overline{N}(i,j);0\leqslant j\leqslant i\leqslant s-2\},$$

$$T_j'=\{[-a,-b,-c];[a,b,c]\in T_j\},$$

其中 $\overline{M}=[b,a,c]$,如果 $M=[a,b,c]$. 记号 $\overline{N}$ 亦如此.

由下表所列的取值范围易知,对固定的 j,每个 T_j(或 T_j') 中全部差三元组两两不同,都是 $2\lambda Z_v^*$ 分拆中的差三元组.

表 2.1

差	取值范围
$a(i,j)=2i+1-2j$	$[1,2(s-j)-1]_1$
$b(i,j)=5s-i+2j$	$[4s+2j+1,5s+j]$
$a(i,j)+b(i,j)=5s+i+1$	$[5s+j+1,6s]$
$u(i,j)=2i+2-2j$	$[2,2(s-j)-2]_0$
$v(i,j)=3s-1-i+2j$	$[2s+2j+1,3s+j-1]$
$u(i,j)+v(i,j)=3s+1+i$	$[3s+j+1,4s-1]$

为方便，此表中(及以下)均以$[\alpha,\beta]$表示 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 的全部整数，以$[\alpha,\beta]_0$ 表示$[\alpha,\beta]$中的全部偶数，$[\alpha,\beta]_1$ 表示$[\alpha,\beta]$中的全部奇数.

进而可以说明，对 $0\leqslant j\leqslant s-1$，全部共 $2s$ 个 T_j 与 T_j' 中的差三元组也都彼此不同. 现在，我们可以按照 λ 的不同取值范围给出 $2\lambda Z_v^*$ 的分拆 $S\cup D$ 如下($0\leqslant k\leqslant s-1$)：

表 2.2

λ	S	$d=\|D\|$
$1\leqslant\lambda\leqslant s$ (令 $\lambda=k+1$)	$\bigcup\limits_{j=0}^{k}T_j$	$d_{11}=6(k+1)^2$
$s<\lambda\leqslant 2s$ (令 $\lambda=s+k+1$)	$(\bigcup\limits_{j=0}^{s-1}T_j)\cup(\bigcup\limits_{j=0}^{k}T_j')$	$d_{12}=6[s^2+(k+1)^2]$
$\lambda>2s$	$\bigcup\limits_{j=0}^{s-1}(T_j\cup T_j')$	$d_{13}=12s(\lambda-s)$

其中集合 D 是由 $2\lambda Z_v^*$ 中去掉 S 所含全部差后构成的. 而 $d=|D|=2\lambda(v-1)-3|S|$，其计算过程不再赘述. 为后边使用方便，这里 d 被分别标注了不同的下标 i,j，其中 $i\equiv v(\mathrm{mod}\ 6)$，而当 $1\leqslant\lambda\leqslant s, j=1$；当 $s<\lambda\leqslant 2s, j=2$；当 $\lambda>2s, j=3$.

以下 Partition 3 及 Partition 4，构作方法与 Partition 2 类似，故我们只列出相应的表 1 及表 2.

Partition 3. $2\lambda Z_v^*(\lambda\geqslant 1, v=6s+3, s\geqslant 1)$

表 3.1($0\leqslant j\leqslant i\leqslant s-1$)

差	取值范围
$a(i,j)=2i+1-2j$	$[1,2(s-j)-1]_1$
$b(i,j)=3s+1-i+2j$	$[2s+2j+2,3s+j+1]$
$a(i,j)+b(i,j)=3s+i+2$	$[3s+j+2,4s+1]$
$u(i,j)=2i+2-2j$	$[2,2(s-j)]_0$
$v(i,j)=5s+1-i+2j$	$[4s+2j+2,5s+j+1]$
$u(i,j)+v(i,j)=5s+3+i$	$[5s+j+3,6s+2]$

表 3.2

λ	S	$d=\lvert D\rvert$
$1\leqslant\lambda\leqslant s$ (令 $\lambda=k+1$)	$\bigcup_{j=0}^{k}T_j$	$d_{31}=(6k+4)(k+1)$
$s<\lambda\leqslant 2s$ (令 $\lambda=s+k+1$)	$(\bigcup_{j=0}^{s-1}T_j)\cup(\bigcup_{j=0}^{k}T_j')$	$d_{32}=6s^2-2s+(6k+4)(k+1)$
$\lambda>2s$	$\bigcup_{j=0}^{s-1}(T_j\cup T_j')$	$d_{33}=12s(\lambda-s-1)+4\lambda$

Partition 4. $2\lambda Z_v^*(\lambda\geqslant 1, v=6s+5, s\geqslant 1)$

表 4.1

差	取值范围
$a(i,j)=2i+1-2j$	$[1,2(s-j)+1]_1$
$b(i,j)=5s+3-i+2j$	$[4s+2j+3,5s+j+3]$
$a(i,j)+b(i,j)=5s+i+4$	$[5s+j+4,6s+4]$
$u(i,j)=2i+2-2j$	$[2,2(s-j)]_0$
$v(i,j)=3s+1-i+2j$	$[2s+2j+2,3s+j+1]$
$u(i,j)+v(i,j)=3s+3+i$	$[3s+j+3,4s+2]$

其中 i,j 的取值范围,对于 $a(i,j),b(i,j)$ 是 $0\leqslant j\leqslant i\leqslant s$,$u(i,j),v(i,j)$ 中是 $0\leqslant j\leqslant i\leqslant s-1$.

表 4.2

λ	S	$d=\lvert D\rvert$
$1\leqslant\lambda\leqslant s$ (令 $\lambda=k+1$)	$\bigcup_{j=0}^{k}T_j$	$d_{51}=(6k+2)(k+1)$
$s<\lambda\leqslant 2s$ (令 $\lambda=s+k+1$)	$(\bigcup_{j=0}^{s-1}T_j)\cup(\bigcup_{j=0}^{k}T_j')$	$d_{52}=6s^2-4s+(6k+2)(k+1)$
$\lambda>2s$	$\bigcup_{j=0}^{s-1}(T_j\cup T_j')$	$d_{53}=12s(\lambda-s-2)+8\lambda$

Partition 5. $(2\lambda+3)Z_v^*(\lambda\geqslant 1, v\geqslant 7$ 为奇数$)$

由 Partition 1,存在 $3Z_v^*$ 的分拆 $S_1\cup\emptyset$,由 Partition 2-4,存在 $2\lambda Z_v^*$ 的分拆 $S_2\cup D$. 令 $S=S_1\cup S_2$,则 $S\cup D$ 即为$(2\lambda+3)Z_v^*$ 的分拆(注意:S_1 中差三元组皆形为$[i,i,2i]$,而 S_2 中差三元组的三个差均不同,故 S_1 与 S_2 之间无公共差三元组),且对 $v=6s+i, s\geqslant 1, i=1,3,5$,我们分别可得$\lvert D\rvert=d_{ij}$,这里诸 $d_{ij}(i=1,3,5,j=1,2,3)$分别为 Partition 2-4 中所标注的.

Partition 6. $(3(v-2)-\lambda)Z_v^*(\lambda\in\{2,4,6,8,10\}, v\geqslant 7$ 为奇数$)$

鉴于下节的需要(主要是为控制 d 的大小),我们需对这种情形的某些 λ 值另给出一种构

造.为此,首先对于 $2Z_v^*$ 分别给出它的五种不同分拆,即 $2Z_v^*=S_{pq}\cup D_{pq}$,其中 $p\equiv v(\mathrm{mod}\ 6)$,$q=1,2,3,4,5$.我们统一记

$$S_{pq}=\{[a(i),b(i),a(i)+b(i)],[b(i),a(i),b(i)+a(i)]\}_i\cup$$
$$\{[\bar{a}(j),\bar{b}(j),\bar{a}(j)+\bar{b}(j)],[\bar{b}(j),\bar{a}(j),\bar{b}(j)+\bar{a}(j)]\}_j.$$

具体的分拆见下表 5,其中 $v=6s+p$,$s\geqslant 1$.对相同的 p 值,我们仅列出对应的 q 值并略去集合 D_{pq}(即 $2Z_v^*$ 去掉 S_{pq} 的全部差所构成的集合).

表 5　$2Z_v^*$ 的五种不同分拆

p	q	$a(i)$	$b(i)$	i	$\bar{a}(j)$	$\bar{b}(j)$	j
1	1	$2i+1$	$5s-i$	$[0,s-1]$	$2j+2$	$3s-1-j$	$[0,s-2]$
	2	$2i+1$	$3s-i$	$[0,s-1]$	$2j+2$	$5s-j$	$[0,s-2]$
	3	$2i+1$	$5s-i+1$	$[0,s-2]$	$2j+2$	$3s-j$	$[0,s-1]$
	4	$6s-2i$	$s+i+1$	$[0,s-1]$	$6s-1-2j$	$3s+j+2$	$[0,s-2]$
	5	$6s-2i$	$3s+i+1$	$[0,s-1]$	$6s-1-2j$	$s+j+1$	$[0,s-2]$
3	1	$2i+1$	$3s-i+1$	$[0,s-1]$	$2j+2$	$5s-j+1$	$[0,s-1]$
	2	$2i+1$	$5s-i+1$	$[0,s-1]$	$2j+2$	$3s-j$	$[0,s-1]$
	3	$2i+1$	$3s-i$	$[0,s-1]$	$2j+2$	$5s-j$	$[0,s-1]$
	4	$6s-2i+2$	$3s+i+2$	$[0,s-1]$	$6s+1-2j$	$s+j+2$	$[0,s-1]$
	5	$6s-2i+2$	$s+i+2$	$[0,s-1]$	$6s+1-2j$	$3s+j+3$	$[0,s-1]$
5	1	$2i+1$	$5s-i+3$	$[0,s]$	$2j+2$	$3s-j+1$	$[0,s-1]$
	*2	$2i+3$	$3s+1-i$	$[0,s-1]$	$2j+2$	$5s-j+2$	$[0,s-2]$
	*3	$2i+3$	$3s-i+2$	$[0,s-2]$	$2j+2$	$5s-j+3$	$[0,s-1]$
	4	$6s-2i+4$	$s+i+2$	$[0,s]$	$6s+3-2j$	$3s+j+4$	$[0,s-1]$
	*5	$6s-2i+2$	$3s+i+4$	$[0,s-1]$	$6s+3-2j$	$s+j+3$	$[0,s-2]$

*说明:当 $v=6s+5$,我们分别对 $q=2,3,5$ 增加以下差三元组

S_{52}:$\{[1,6s+3,6s+4],[6s+3,1,6s+4],[2s,3s+3,5s+3],[3s+3,2s,5s+3]\}$;

S_{53}:$\{[1,2s+2,2s+3],[2s+2,1,2s+3],[2s+1,3s+3,5s+4],$
$[3s+3,2s+1,5s+4]\}$;

S_{55}:$\{[2,6s+4,1],[6s+4,2,1],[3s+2,4s+5,s+2],[4s+5,3s+2,s+2]\}$.

显然,对于 $3(v-2)Z_v^*$ 可给出分拆 $S\cup D$,使得 $D=\emptyset$,即 S 为 Z_v^* 上全部差三元组构成的集合,于是 $|S|=(v-1)(v-2)$.现若存在 λZ_v^* 的分拆 $S_p'\cup D_p'$,$p\equiv v(\mathrm{mod}\ 6)$,则可给出 $(3(v-2)-\lambda)Z_v^*$ 的分拆 $S_p\cup D_p$,其中 $S_p=S\backslash\{S_p'\cup N\}$,而 N 为适当选取 Z_v^* 中元(可重复)与 D_p'

中元拼合组成的一些差三元组，并将由 Z_v^* 中选出的那些元构成的集合记为 D_p. 以下对下节需要的一些 λ 值（$\lambda\in\{2,4,6,8,10\}$）以表 6（见下页）给出这种分拆，其中 $v=6s+p,s\geqslant 1$.

在表 6 的最后一行中，如果 $S_{5q}=\bigcup_{a,b,c}\{[a,b,c],[b,a,c]\}$，则$\overline{S_{5q}}=\bigcup_{a,b,c}\{[a,b,c],[-b,-a,-c]\}$. 显然，$\overline{S_{5q}}$是 B 型分拆. 由表 6 最后一列可见

$$d_1=|D_1|\leqslant\frac{3\lambda}{2},d_3=|D_3|=\lambda,d_5=|D_5|\leqslant\frac{\lambda}{2}+3.$$

上面所有分拆，除最后一种外均为 A 型分拆.

3 简单 SCDTS(v,λ)的存在谱

由 DTS(v,λ)的存在谱及区组不重复的要求，易知简单 SCDTS(v,λ)存在的必要条件是

$$\lambda v(v-1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3),\lambda\leqslant 3(v-2) \qquad (*)$$

引理 1 如果存在简单 TS(v,λ)，则存在简单 SCDTS$(v,t\lambda)$，其中 $t=1,2,3$.

证明 设$(X,\mathscr{A})$是一个简单 TS(v,λ). 令

$\mathscr{B}_1=\{(z,y,x),(x,y,z);\{x,y,z\}\in\mathscr{A}\}$,

$\mathscr{B}_2=\{(z,y,x),(x,y,z),(y,x,z),(z,x,y);\{x,y,z\}\in\mathscr{A}\}$,

$\mathscr{B}_3=\{(z,y,x),(x,y,z),(y,x,z),(z,x,y),(x,z,y),(y,z,x);\{x,y,z\}\in\mathscr{A}\}$,

其中 $\mathscr{A}$ 的每个无序三元组对应 $\mathscr{B}_t$ 中的 $2t$ 个可迁三元组，定义 I 为 X 上的恒等置换，则$(X,\mathscr{B}_t,I)$分别是简单 SCDTS$(v,t\lambda)$，$t=1,2,3$.

引理 2 如果存在简单 SCDTS(v,λ)，则存在简单 SCDTS$(v,3(v-2)-\lambda)$.

证明 令$(X,\mathscr{B},f)$为简单 SCDTS(v,λ)，Ω 为 X 上全体可迁三元组构成的集合，则$(X,\Omega\backslash\mathscr{B},f)$即是一个简单 SCDTS$(v,3(v-2)-\lambda)$.

引理 3[4] 简单 TS(v,λ)存在谱为

$$\lambda v(v-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 6),\lambda(v-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\lambda\leqslant v-2.$$

定理 1 对任意正整数 v,λ，若满足“$\lambda v(v-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 6),\lambda(v-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\lambda\leqslant 3(v-2)$”，则存在简单 SCDTS$(v,\lambda)$.

证明 满足所述条件的 v,λ 值可分为以下几类：

$$\begin{cases}\lambda\equiv 1,5\ (\mathrm{mod}\ 6),\ v\equiv 1,3\ (\mathrm{mod}\ 6);\\ \lambda\equiv 3\quad (\mathrm{mod}\ 6),\ v\equiv 1\quad (\mathrm{mod}\ 2);\\ \lambda\equiv 2,4\ (\mathrm{mod}\ 6),\ v\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\ 3);\\ \lambda\equiv 0\quad (\mathrm{mod}\ 6),\ v\geqslant 3.\end{cases}$$

关于简单 SCDTS(v,λ)的存在性，当 $\lambda\in[1,v-2]$时，由引理 1 可知；当 $\lambda\in[2(v-2),3(v-2)-1]$时，由引理 2 可知；当 $\lambda=3(v-2)$，由引理 1 可知；当 $\lambda\in(v-2,2(v-2))$时，对偶数的 λ 值，由引理 1 可知，对奇数的 λ 值，因此时 v 为奇数，$3(v-2)-\lambda$ 为偶数，由引理 1 及引理 2 可知.

表 6　$(3(v-2)-\lambda)Z_v^*$ 的分拆

p	λ	S_p'	N	D_p
1	2	S_{11}	$[2s,3s,5s],[3s,2s,5s],$ $[4s,4s,2s-1]$	$\{5s,5s,2s-1\}$
	4	$S_{11}\cup S_{12}$	$[3s,2s,5s],[2s,3s,5s],$ $[4s,4s+1,2s],[4s+1,4s,2s],$ $[2s,5s+1,s],[5s+1,2s,s]$	$\{5s,5s,$ $2s,2s,$ $s,s\}$
	6	$\bigcup_{q=1}^{3} S_{1q}$	$[3s,2s,5s],[3s+1,4s+2,s+2],$ $[2s,3s,5s],[4s+2,3s+1,s+2],$ $[2s,5s+1,s],[5s+1,2s,s],$ $[4s+1,4s,2s],[4s,4s+1,2s],$ $[2s-1,2s-1,4s-2]$	$\{s,s$ $2s,2s,$ $5s,5s,$ $4s-2,$ $s+2,s+2\}$
	8	$\bigcup_{q=1}^{4} S_{1q}$	$[3s,2s,5s],[2s,3s,5s],$ $[5s+1,2s,s],[2s,5s+1,s],$ $[4s+1,4s,2s],[4s,4s+1,2s],$ $[3s+1,4s+2,s+2],[4s+2,3s+1,s+2],$ $[2s-1,2s-1,4s-2],[2s+1,2s+1,4s+2],$ $[3s+1,4s+1,s+1],[4s+1,3s+1,s+1]$	$\{5s,5s,$ $s,s,$ $2s,2s,$ $s+2,s+2,$ $s+1,s+1,$ $4s-2,4s+2\}$
	10	$\bigcup_{q=1}^{5} S_{1q}$	$[5s+1,2s,s],[2s,5s+1,s],$ $[2s,3s,5s],[3s,2s,5s],$ $[4s,4s+1,2s],[4s+1,4s,2s],$ $[4s+1,4s+1,2s+1],$ $[3s+1,4s+2,s+2],[4s+2,3s+1,s+2],$ $[3s+1,4s+1,s+1],[4s+1,3s+1,s+1],$ $[2s+1,2s+1,4s+2],[2s-1,2s-1,4s-2]$	$\{5s,5s,$ $s+2,s+2,$ $s+1,s+1,$ $4s-2,4s+2$ $6s\}$
3	2	S_{31}	$[2s+1,5s+2,s],[5s+2,2s+1,s]$	$\{s,s\}$
	4	$S_{31}\cup S_{32}$	$[2s+1,5s+2,s],[5s+2,2s+1,s],$ $[3s+1,6s+2,3s],[6s+2,2s+1,3s]$	$\{s,s,$ $3s,3s\}$
	6	$\bigcup_{q=1}^{3} S_{3q}$	$[2s+1,5s+2,s],[5s+2,2s+1,s],$ $[6s+2,3s+1,3s],[3s+1,6s+2,3s],$ $[5s+1,6s+2,5s],[6s+2,5s+1,5s]$	$\{s,s,$ $5s,5s,$ $3s,3s\}$
5	4	$S_{51}\cup S_{53}$	$[3s+2,3s+2,6s+4],[3s+4,3s+4,3]$	$\{6s+4,3\}$
	6	$\bigcup_{q=1}^{3} S_{5q}$	$[3s+2,3s+2,6s+4],[3s+2,3s+4,1],$ $[3s+4,3s+2,1]$	$\{1,1,$ $6s+4\}$
	8	$\bigcup_{q=1}^{4} S_{5q}$	$[3s+2,3s+2,6s+4],[3s+4,3s+2,1],$ $[3s+2,3s+4,1],[3s+3,3s+3,1]$	$\{1,1,$ $1,6s+4\}$
	10	$\bigcup_{q=1}^{5} S_{5q}$	$[3s+2,3s+4,1],[3s+4,3s+2,1],$ $[3s+3,1,3s+4],[1,3s+3,3s+4],$ $[3s+2,3s+2,6s+4],[3s+3,3s+3,1]$	$\{1,1,1,$ $1,1,6s+4,$ $3s+4,3s+4\}$
5	6	$\bigcup_{q=1}^{3} \overline{S_{5q}}$	$[3s+2,3s+2,6s+4],[3s+3,3s+3,1],$ $[3s+4,s,4s+4],[5s+5,3s+1,2s+1]$	$\{1,6s+4,4s+4,$ $2s+1,s,5s+5\}$

根据简单 SCDTS(v,λ)存在的必要条件(＊)，由文[2]及定理 1 可知，我们仅需再考虑以下参数(v,λ)：

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\equiv 3 \pmod 6, v\equiv 0 \pmod 2\\ \lambda\equiv 1,5 \pmod 6, v\equiv 0,4 \pmod 6\end{array}\right\} \quad 3\leqslant\lambda\leqslant\frac{3(v-2)}{2}.$$

下面我们将反复用到两类特殊的矩阵，M 型矩阵—$M(D)$及 N 型矩阵—$N(D)$. 其中多重集 $D\subset\lambda Z_v^*$，且$|D|=nm$，$n\leqslant\lambda\leqslant 3m$. 这两类矩阵都是将 D 的元按某种方式排置成的 $m\times n$ 矩阵，使得每行中任一个元素的重复次数均$\leqslant 3$.

(1) 一般情况下，$M(D)$可如下构成：将 D 中元按由小到大的次序依列由上到下，由左至右排列成一个 $m\times n$ 矩阵. 例如，$D=\{2\cdot 1,9\cdot 2,1\cdot 3\}\subseteq\lambda Z_v^*$，$|D|=4\times 3$，且 $3\leqslant\lambda\leqslant 12$，则

$$M(D)=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&2\\2&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}.$$

(2) 当 D 的元成对出现(即元素 $i\in D$，则$-i\in D$，且 $i,-i$ 重复次数相同)且 m 为奇数，n 为偶数时可构作矩阵 $N(D)=(a_{ij})_0^{m-1,n-1}$，使满足一个附加条件：第一行(行标号为零)元成对出现，余下的 $m-1$ 行满足条件 $a_{ij}=-a_{(m-i)j}$. 一种构作方法是：将 D 分为两部分 D_-，D_+，首先由 D_+ 中取 $n/2$ 个元(每个元的重复次数$\leqslant 3$)$x_1,x_2,\cdots,x_{n/2}$，置于第一行，然后将 D_+ 中所余元素按上述 $M(D)$的排法排列成一个$\frac{m-1}{2}\times n$ 矩阵 T，最后再将 T 的每个元变号后诸行反序排列得到的矩阵记为 S. 则

$$N(D)=\begin{pmatrix}x_1,x_2,\cdots,x_{n/2},-x_1,-x_2,\cdots,-x_{n/2}\\ T\\ S\end{pmatrix}.$$

例如，$D=\{2\cdot 1,6\cdot 2,1\cdot 3,1\cdot 4,2\cdot(-1),6\cdot(-2),1\cdot(-3),1\cdot(-4)\}\subseteq\lambda Z_v^*$，$|D|=5\times 4$，令 $4\leqslant\lambda\leqslant 15$，则得矩阵 $N(D)$：

$$N(D)=\left(\begin{array}{cccc}1&2&-1&-2\\ \hline 1&2&2&3\\ 2&2&2&4\\ \hline -2&-2&-2&-4\\ -1&-2&-2&-3\end{array}\right).$$

引理 4 设 $v=v_1+v_2$，v_1,v_2 均为奇数且 $v_1>v_2$. 若存在 $\lambda Z_{v_1}^*$的 A 型分拆 $S\cup D$ 及简单 SCDTS(v_2,λ)，则当 $\lambda v_2\geqslant|D|$且 $\lambda v_2\equiv 0\pmod 3$时，存在简单 SCDTS$(v,\lambda)$.

构造. 设 $X=Z_{v_1}\cup Z_{v_2}$，$|X|=v=v_1+v_2$，其中 $Z_{v_1}=\{0,1,\cdots,v_1-1\}$，$Z_{v_2}=\{\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{v_2-1}\}$. 存在 $\lambda Z_{v_1}^*$的 A 型分拆 $S\cup D$，又存在简单 SCDTS$(v_2,\lambda)=(Z_{v_2},\mathscr{B}_0,I)$，其中 $\lambda\leqslant 3(v_2-2)$，$I$ 为 Z_{v_2}上的恒等置换. 设 $\lambda v_2-|D|=3t$，$t\geqslant 0$. 下面给出 $\lambda Z_{v_1}^*$的另一种 A 型分拆 $S_1\cup D_1$.

由 S 中取出 t 个差三元组$[a,b,c]$构成 S_0，使得满足"若$[a,b,c]\in S_0$，则$[b,a,c]\in S_0$"(即取时按"配对方式"，在 $a\neq b$ 时同时取$[a,b,c]$与$[b,a,c]$一对，$a=b$ 时取$[a,a,2a]$). 而由 S_0 中所含的 $3t$ 个差构成的集合记为 D_0. 设 $D_0\cup D=D_1\subset\lambda Z_{v_1}^*$，$S_1=S\setminus S_0$，则 $S_1\cup D_1$ 为 $\lambda Z_{v_1}^*$的 A 型分拆，并且$|D_1|=\lambda v_2$，其中 $\lambda\leqslant 3(v_2-2)\leqslant 3v_1$. 由 D_1 可得矩阵 $M(D_1)=(a_{ij})_0^{v_2-1,\lambda-1}$.

对每个 $i(0\leqslant i\leqslant v_2-1)$，将矩阵 $M(D_1)$ 的第 i 行中全部元构成的多重集记为 $\{t_ja_j\}_j$，其中 a_j 为 D_1 中的不同元，t_j 表示元素 a_j 在第 i 行中出现的次数，显然 $1\leqslant t_j\leqslant 3$. 定义可迁三元组集 $\mathscr{A}_i$(其中 x 取遍 Z_{v_1}，j 取遍上述多重集标号)如下：

$$\begin{aligned}
&(x,\bar{i},x+a_j), && \text{若}\quad t_j=1,\\
&(x,x+a_j,\bar{i})\text{与}(\bar{i},x,x+a_j), && \text{若}\quad t_j=2, \qquad (**)\\
&(x,\bar{i},x+a_j),(x,x+a_j,\bar{i})\text{与}(\bar{i},x,x+a_j), && \text{若}\quad t_j=3.
\end{aligned}$$

进而定义

$$\mathscr{A}=\{(x,x+a,x+c);[a,b,c]\in S_1,x\in Z_{v_1}\},$$

$$\mathscr{B}=\mathscr{A}\cup(\bigcup_{i=0}^{v_2-1}\mathscr{A}_i)\cup\mathscr{B}_0,$$

$$f(x)=\begin{cases}-x, x\in Z_{v_1},\\ x, \quad x\in Z_{v_2}.\end{cases}$$

则 $(X,\mathscr{B},f)$ 即是一个简单 SCDTS(v,λ).

证明 首先，我们有

$$|\mathscr{B}|=\frac{\lambda v_1(v_1-1)-\lambda v_2v_1}{3}+\lambda v_2v_1+\frac{\lambda v_2(v_2-1)}{3}$$
$$=\frac{\lambda(v_1+v_2)(v_1+v_2-1)}{3}=\frac{\lambda v(v-1)}{3},$$

恰为所需区组个数.

由引理，$S\cup D$ 为 $\lambda Z_{v_1}^*$ 的 A 型分拆，则 S 中差三元组的个数

$$\frac{\lambda(v_1-1)-|D|}{3}>\frac{\lambda v_2-|D|}{3}=t,$$

故可按要求从 S 中取出 t 个差三元组构成 S_0，且 $S_1\cup D_1$ 是 $\lambda Z_{v_1}^*$ 的 A 型分拆. 又因矩阵 $M(D_1)$ 是由 D_1 中的全部差构成的，则 D_1 中每个差所对应的有序对族恰含于 $\bigcup_{i=0}^{v_2-1}\mathscr{A}_i$ 的一类区组中；S_1 中全部差三元组对应的可迁三元组族的全体构成了集 $\mathscr{A}$. 因此，Z_{v_1} 中不同元素构成的每个有序对恰出现在 $\mathscr{B}$ 的 λ 个区组中. 对任意的 $j\in Z_{v_1},\bar{i}\in Z_{v_2}$，因矩阵 $M(D_1)$ 每行中含有 λ 个差，可知有序对 $(j,\bar{i})$ 与 $(\bar{i},j)$ 在 $\mathscr{A}_i\subset\mathscr{B}$ 中出现 λ 次. 至于 Z_{v_2} 中有序对的出现由 $\mathscr{B}_0$ 可知. 因此，$(X,\mathscr{B})$ 是 $DTS(v,\lambda)$.

简单性是显然的，因 $\mathscr{A},\mathscr{B}_0,\bigcup_{i=0}^{v_2-1}\mathscr{A}_i$ 之间及各自内部都不可能出现重复区组.

验证自反性：对任意区组 $A=(x,x+a,x+c)\in\mathscr{A}$，其差三元组为 $[a,c-a,c]\in S_1$，而区组 $f(A)^{-1}=(-x-c,-x-a,-x)$，其差三元组为 $[c-a,a,c]\in S_1$，因此，$f(A)^{-1}\in\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$. 对任意区组 $A\in\mathscr{A}_i,i=0,1,2,\cdots,v_2-1$，若 $A=(x,\bar{i},x+a_j)$，则 $f(A)^{-1}=(-x-a_j,\bar{i},(-x-a_j)+a_j)\in\mathscr{A}_i$. 类似地，$A=(\bar{i},x,x+a_j)$ 或 $(x,x+a_j,\bar{i})$ 时，也有 $f(A)^{-1}\in\mathscr{A}_i\subset\mathscr{B}(t_j\geqslant 2)$. 最后，因 $f|_{Z_{v_2}}=I$，则 $\mathscr{B}_0$ 中区组亦满足自反性.

定理 2 对 $v\geqslant 12,3\leqslant\lambda\leqslant\frac{3(v-2)}{2}$，当“$v\equiv 0(\bmod 2),\lambda\equiv 3(\bmod 6)$”或“$v\equiv 0,4(\bmod 6),\lambda\equiv 1,5(\bmod 6)$”时，存在简单 SCDTS$(v,\lambda)$，除去以下可能的情形：

$$\begin{cases} v\equiv 0 \pmod{12}, & \lambda=\frac{3v-6}{2},\frac{3v-10}{2},\frac{3v-14}{2},\frac{3v-22}{2},\frac{3v-26}{2}; \\ v\equiv 2 \pmod{12}, & \lambda=\frac{3v-12}{2}; \\ v\equiv 4 \pmod{12}, & \lambda=\frac{3v-6}{2},\frac{3v-10}{2},\frac{3v-14}{2}; \\ v\equiv 6,10 \pmod{12}, & \lambda=\frac{3v-8}{2},\frac{3v-12}{2},\frac{3v-16}{2},\frac{3v-20}{2}; \\ v\equiv 8 \pmod{12}, & \lambda=\frac{3v-6}{2}. \end{cases}$$

构造. 主要应用引理 4. 首先按 $\lambda\equiv 1,3,5 \pmod 6$ 进行分类，之后再按 $v\equiv 0,2,4,6,8,10 \pmod{12}$ 分成子类讨论. 将引理 4 中诸参数 v_1,v_2,v 分列于下表 7(其中 $s\geqslant 1$). 表中"λ"一栏的取值由简单 SCDTS(v_2,λ)的存在条件及 $\lambda\leqslant 3(v_2-2)$ 给出. 对于简单 SCDTS(v,λ)，$3\leqslant\lambda\leqslant\frac{3(v-2)}{2}$，因一般 $3(v_2-2)<\frac{3(v-2)}{2}$，将有一些 λ 值不能由引理 4 给出，将在"$\lambda\neq$"一栏中列出.

表 7

$\lambda\equiv \pmod 6$	v	v_1	v_2	λ	$\lambda\neq$
3	$12s$	$6s+1$	$6s-1$	$\leqslant\frac{3(v-6)}{2}$	$\frac{3v-6}{2}$
	$12s+2$	$6s+3$	$6s-1$	$\leqslant\frac{3(v-8)}{2}$	$\frac{3v-12}{2}$
	$12s+4$	$6s+3$	$6s+1$	$\leqslant\frac{3(v-6)}{2}$	$\frac{3v-6}{2}$
	$12s+6$	$6s+5$	$6s+1$	$\leqslant\frac{3(v-8)}{2}$	$\frac{3v-12}{2}$
	$12s+8$	$6s+5$	$6s+3$	$\leqslant\frac{3(v-6)}{2}$	$\frac{3v-6}{2}$
	$12s+10$	$6s+7$	$6s+3$	$\leqslant\frac{3(v-8)}{2}$	$\frac{3v-12}{2}$
1	$12s$(*)	$6s+3$	$6s-3$	$\leqslant\frac{3(v-10)}{2}$	$\frac{3v-10}{2},\frac{3v-22}{2}$
	$12s+4$(**)	$6s+3$	$6s+1$	$\leqslant\frac{3(v-6)}{2}$	$\frac{3v-10}{2}$
	$12s+6$	$6s+5$	$6s+1$	$\leqslant\frac{3(v-8)}{2}$	$\frac{3v-16}{2}$
	$12s+10$	$6s+7$	$6s+3$	$\leqslant\frac{3(v-8)}{2}$	$\frac{3v-16}{2}$
5	$12s$(**)	$6s+3$	$6s-3$	$\leqslant\frac{3(v-10)}{2}$	$\frac{3v-14}{2},\frac{3v-26}{2}$
	$12s+4$(*)	$6s+3$	$6s+1$	$\leqslant\frac{3(v-6)}{2}$	$\frac{3v-14}{2}$
	$12s+6$	$6s+5$	$6s+1$	$\leqslant\frac{3(v-8)}{2}$	$\frac{3v-8}{2},\frac{3v-20}{2}$
	$12s+10$	$6s+7$	$6s+3$	$\leqslant\frac{3(v-8)}{2}$	$\frac{3v-8}{2},\frac{3v-20}{2}$

对表 7 中每行给出的 v_1 及 λ，由第二节中 Partition 1 与 Partition 5，我们均可得到 $\lambda Z_{v_1}^*$ 的

A 型分拆 $S\cup D$，其中 $\lambda=2\lambda_0+3,\lambda_0\geqslant 0$. 因当 $\lambda\equiv 3 \pmod 6$ 时，$\lambda_0=3 \pmod 6$，当 $\lambda\equiv 1,5 \pmod 6$ 时，$\lambda_0\equiv 5,1 \pmod 6$，且由第二节 Partition 2-4 知 $|D|\equiv 2\lambda_0(v_1-1) \pmod 3$. 因此 $\lambda v_2-|D|\equiv 2\lambda_0 v_2-2\lambda_0(v_1-1)\equiv 2\lambda_0(v_2-v_1+1) \pmod 3$. 这样易计算得，除带"*"及"**"号的四种情形外，对其余每行的 λ,v_2 均有 $\lambda v_2-|D|\equiv 0 \pmod 3$，应用引理 4，存在简单 SCDTS$(v,\lambda)$.

下面我们仅需再考虑上述四种例外情形，其中 $v_1=6s+3,s\geqslant 1$.

首先，我们将差三元组 $[1,1,2],[-1,-1,-2]$ 形成的 $2(6s+3)$ 个可迁三元组分为如下三组 $(i=0,1,2)$：

$$C_i=\{(i+3k,1+i+3k,2+i+3k),(2+i+3k,1+i+3k,i+3k);0\leqslant k\leqslant 2s\}.$$

其次，如下修改引理 4 的构造，相关的集合 S_1,D_1,S_0,D_0 及 $\mathscr{A},\mathscr{A}_i,\mathscr{B}$ 将分别被 $S_1',D_1',S_0',D_0',\mathscr{A}',\mathscr{A}_i',\mathscr{B}'$（对应"*"）或 $S_1'',D_1'',S_0'',D_0'',\mathscr{A}'',\mathscr{A}_i'',\mathscr{B}''$（对应"**"）代替.

(1) 情形"*"（即 $\lambda v_2-|D|\equiv 1 \pmod 3$）：

设 $\lambda v_2-|D|=3t+4,t\geqslant 0$. 首先由 $S\backslash\{[1,1,2],[-1,-1.-2]\}$ 中取出 t 个差三元组构成集合 S_0'（取法同引理 4 中 S_0，且尽量取含元素 $1,-1,-2,2$ 的差三元组），而 S_0' 中的 $3t$ 个差构成 D_0'. 设 $D\cup D_0'=D_1'\subset\lambda Z_{v_1}^*,S_1'=S\backslash\{S_0'\cup\{[1,1,2],[-1,-1,-2]\}\}$，则 $(S_1'\cup\{[1,1,2],[-1,-1,-2]\})\cup D_1'$ 也是 $\lambda Z_{v_1}^*$ 的 A 型分拆，且 $|D_1'|=\lambda v_2-4$. 构造一个 M 型 $v_2\times\lambda$ 矩阵 $M(D_1')=(a_{ij})_0^{v_2-1,\lambda-1}$ 满足：(1) 第一列中的前 4 个位置空缺（即为洞，因为 $\lambda v_2-4=|D_1'|$；(2) 元素 1 出现在第一行，元素 -1 出现在第二行，元素 1 及 -2 出现在第三行，元素 -1 及 2 出现在第四行中的次数分别 $\leqslant 2$.

为了处理这四个洞（它们是因从 S 中去掉 $\{[1,1,2],[-1,-1,-2]\}$ 而出现的），我们定义如下 4 个有序对族：

$g_0=\{(3k,1+3k),(1+3k,2+3k),(2+3k,3+3k);0\leqslant k\leqslant 2s\}$，涉及差 1；

$g_1=\{(1+3k,3k),(2+3k,1+3k),(3+3k,2+3k);0\leqslant k\leqslant 2s\}$，涉及差 -1；

$g_2=\{(2+3k,3k),(1+3k,2+3k),(3+3k,1+3k);0\leqslant k\leqslant 2s\}$，涉及差 $1,-2$；

$g_3=\{(3k,2+3k),(2+3k,1+3k),(1+3k,3+3k);0\leqslant k\leqslant 2s\}$，涉及差 $-1,2$.

不难发现，$\bigcup_{i=0}^{3}g_i$ 中的有序对恰为 $C_0\cup C_1$ 的全部有序对.

采用引理 4 中的方法，由 S_1' 及矩阵 $M(D_1')$ 可得区组集 $\mathscr{A}'$ 及 $\mathscr{A}_i'(4\leqslant i\leqslant v_2-1)$. 又因矩阵 $M(D_1')$ 第一列前四个位置空缺，故集合 $\mathscr{A}_i'(0\leqslant i\leqslant 3)$ 不能由 $M(D_1')$ 直接得到，我们采用如下方法构作：首先，类似引理 4 由 $M(D_1')$ 构造 $\mathscr{A}_i,0\leqslant i\leqslant 3$. 其次，添加由元素 $\bar{i}$ 及 g_i 中有序对构成的区组.（为避免出现重复区组，对 $0\leqslant i\leqslant 3$，我们检查 g_i 中有序对 P，若 P 出现在 $\mathscr{A}_i$ 的 t 个区组中（由 $M(D_1')$ 条件 (2) 知 $0\leqslant t\leqslant 2$），根据引理 4 中（**）的方法，这 t 个区组将被对应的 P 出现 $t+1$ 次形式的 $t+1$ 个区组代替.）最后，$\mathscr{A}_i$ 中不含 g_i 中有序对的区组在构成 $\mathscr{A}_i'$ 时不变. 定义 $\mathscr{B}'=C_2\cup\mathscr{A}'\cup(\bigcup_{i=0}^{v_2-1}\mathscr{A}_i')\cup\mathscr{B}_0$，置换 f 同引理 4，则 $(X,\mathscr{B}',f)$ 是一个简单 SCDTS(v,λ).

(2) 情形"**"（即 $\lambda v_2-|D|\equiv 2 \pmod 3$）

设 $\lambda v_2-|D|=3t+2,t\geqslant 0$. 首先由 $S\backslash\{[1,1,2],[-1,-1.-2]\}$ 中取出 t 个差三元组构成集合 S_0''（取法同情形"*"中 S_0'），且对应得集 D_0''. 设 $D\cup D_0''=D_1''\subset\lambda Z_{v_1}^*,S_1''=S\backslash\{S_0''\cup\{[1,$

1,2],[−1,−1,−2]}},则$(S_1''\cup\{[1,1,2],[-1,-1,-2]\})\cup D_1''$也是$\lambda Z_{v_1}^*$的A型分拆,且$|D_1''|=\lambda v_2-2$.构造一个$M$型$v_2\times\lambda$矩阵$M(D_1'')=(a_{ij})_0^{v_2-1,\lambda-1}$满足:(1)第一列中的前两个位置空缺(即为洞,因为$\lambda v_2-2=|D_1''|$;(2)元素1与−2出现在第一行,元素−1及2出现在第二行中的次数分别≤2.

同样为了处理这两个洞,我们定义如下两个有序对族:

$h_0=\{(2+3k,3+3k),(3+3k,4+3k),(4+3k,2+3k);0\leqslant k\leqslant 2s\}$,涉及差1,−2;

$h_1=\{(3+3k,2+3k),(4+3k,3+3k),(2+3k,4+3k);0\leqslant k\leqslant 2s\}$,涉及差−1,2.

易见,$h_0\cup h_1$中有序对即为C_2中的全部有序对.

类似引理4及上面情形"*",区组集$\mathscr{A}''$及$\mathscr{A}_i''(2\leqslant i\leqslant v_2-1)$可由$S_1''$及$M(D_1'')$得到,而集$\mathscr{A}_i''(i=0,1)$可根据"*"中方法,由$M(D_1'')$的前两行元素及$h_j(j=0,1)$中有序对集构造出来.定义$\mathscr{B}''=C_0\cup C_1\cup\mathscr{A}''\cup(\bigcup_{i=0}^{v_2-1}\mathscr{A}_i'')\cup\mathscr{B}_0$,置换$f$同引理4,则$(X,\mathscr{B}'',f)$是一个简单SCDTS$(v,\lambda)$.

证明 我们只须指出如下三点:

1°.引理4中的条件"$\lambda v_2\geqslant|D|$"对所有情况成立.根据表7及第二节中Partition 1及Partition 5,对不同的v_1,v_2及λ,可分别得到满足条件的$\lambda Z_{v_1}^*$的A型分拆$S\cup D$.

2°.根据定理1,对奇数v_2及相应的λ可分别得到简单SCDTS(v_2,λ),其中置换I为Z_{v_2}上的恒等置换.

3°.对情形"*"及"**":

(1) 因为$\lambda Z_{v_1}^*$的A型分拆$S\cup D$中,S所含的差三元组个数$\frac{\lambda(v_1-1)-|D|}{3}>\frac{\lambda v_2-|D|+6}{3}=t$,故可由$S\backslash\{[1,1,2],[-1,-1,-2]\}$中取出$t$个两两不同的差三元组构成集合$S_0'$(或$S_0''$),并且由$S_0'$(或$S_0''$)的选取方式可知,$S_1'\cup D_1'$(或$S_1''\cup D_1''$)确实是$\lambda Z_{v_1}^*$的A型分拆.

(2) 确实可构造出满足条件的M型矩阵$M(D_1')$及$M(D_1'')$.对$M(D_1')$,首先由构造中S_0'的取法可满足:元素1,−1,2,−2在D_1'中的重复次数均≤2.其次在D_1'中补上四个元1,−1,2,−2构成集合F.将F中元依如下次序排列:全部的1,全部的−2,…,全部的2,全部的−1(中间元素仍按由小到大次序排列),则按本节开始所述构成的矩阵$M(F)$中,每行相同元素的重复次数均≤3,并且存在如下四行i,j,k,l,分别含有元素1,−1,−2,2,且元素1出现在第k行,元素−1出现在第l行中分别最多为两次.现在,依次由此四行中分别取出元素1,−1,−2,2各一个,之后调整矩阵,使此四行标号分别为0,1,2,3,且每行第一个位置空缺.这样便得到所需矩阵$M(D_1')$,满足构造要求.类似可知,矩阵$M(D_1'')$的可构作性.

(3)
$$|\mathscr{B}'|=\frac{\lambda(v_1-1)-\lambda v_2+4-6}{3}v_1+\frac{2v_1}{3}+\lambda v_2v_1+\frac{\lambda v_2(v_2-1)}{3}$$
$$=\frac{\lambda(v_1+v_2)(v_1+v_2-1)}{3}=\frac{\lambda v(v-1)}{3}$$
$$|\mathscr{B}''|=\frac{\lambda(v_1-1)-\lambda v_2+2-6}{3}v_1+\frac{4v_1}{3}+\lambda v_2v_1+\frac{\lambda v_2(v_2-1)}{3}$$
$$=\frac{\lambda(v_1+v_2)(v_1+v_2-1)}{3}=\frac{\lambda v(v-1)}{3},$$

恰为所需区组个数.

(4) 为说明 X 的每个由不同元素构成的有序对均恰在 $\mathscr{B}'$(或 $\mathscr{B}''$)中出现 λ 次，我们只须再指出每个 $g_i(0\leqslant i\leqslant 3)$(或 $h_j(j=0,1)$)中所有有序对 $\{(x_k,y_k);0\leqslant k\leqslant v_1-1\}$ 均具有性质：$\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{v_1-1}\}=\{y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{v_1-1}\}=Z_{v_1}$.

(5) 很明显，$C_i(i=0,1,2)$ 及 $\bigcup_{i=0}^{v_2-1}\mathscr{A}_i'$(或 $\bigcup_{i=0}^{v_2-1}\mathscr{A}_i''$)中不含重复区组，特别对每个 $\mathscr{A}_i'$，$0\leqslant i\leqslant 3$(或 $\mathscr{A}_j''$，$j=0,1$)，其中含有 g_i(或 h_j)中有序对的区组，由构造方法知是两两不同的.

(6) 为证明自反性质，我们指出：

(i) 若有序对 $(x,y)\in g_i$(或 h_j)，则 $f((x,y))^{-1}=(-y,-x)\in g_i$(或 h_j)，$0\leqslant i\leqslant 3,j=0,1$(即 $\mathscr{A}_i'$(或 $\mathscr{A}_j''$)的含有 g_i(或 h_j)中有序对的区组满足自反性).

(ii) 若区组 $A\in C_2$(或 $C_0\cup C_1$)，则 $f(A)^{-1}\in C_2$(或 $C_0\cup C_1$). 例如，$A=(2+3k,3+3k,4+3k)\in C_2,k\in[0,2s-1]$，则 $f(A)^{-1}=(-4-3k,-3-3k,-2-3k)=(2+3(2s-1-k),3+3(2s-1-k),4+3(2s-1-k))\in C_2$.

引理 5 设 $v=v_1+v_2,v_1,v_2,\lambda$ 均为奇数，$v_1>v_2$ 且 $\lambda\leqslant 3v_2$. 如果存在 $\lambda Z_{v_1}^*$ 的 A 型分拆 $S_1\cup D_1$ 及 $\lambda Z_{v_2}^*$ 的 B 型分拆 $S_2\cup D_2$，使得 $\frac{|D_2|}{v_1}+\frac{|D_1|}{v_2}=\lambda$ 且 $\frac{|D_2|}{v_1},\frac{|D_1|}{v_2}$ 为非负整数，则存在简单 SCDTS(v,λ).

构造. X 如引理 4 所设. 因 $S_1\cup D_1$ 为 $\lambda Z_{v_1}^*$ 的 A 型分拆，$S_2\cup D_2$ 为 $\lambda Z_{v_2}^*$ 的 B 型分拆，$\frac{|D_2|}{v_1}+\frac{|D_1|}{v_2}=\lambda$ 且 $\frac{|D_2|}{v_1},\frac{|D_1|}{v_2}$ 为非负整数，则 $D_1\subset\lambda Z_{v_1}^*,D_2\subset\lambda Z_{v_2}^*$，且 D_2 中元素 i 与 $-i$ 成对出现. 因而可得 M 型 $v_2\times\frac{|D_1|}{v_2}$ 矩阵 $M(D_1)$ 及 N 型 $v_1\times\frac{|D_2|}{v_1}$ 矩阵 $N(D_2)$.

对每个 $j,0\leqslant j\leqslant v_1-1$，将 $N(D_2)$ 中第 j 行的全部元记为多重集 $\{t_l\,\overline{a_l}\}_l$，其中 $\overline{a_l}$ 为 D_2 中的不同元，而 t_l 表示 $\overline{a_l}$ 出现在第 j 行中的次数，$0\leqslant t_l\leqslant 3$. 定义可迁三元组集 $\mathscr{A}_j'$ 如下(其中 $\bar{x}$ 取遍 Z_{v_2})：

$(\bar{x},j,\bar{x}+\overline{a_l})$	若 $t_l=1$,
$(\bar{x},\bar{x}+\overline{a_l},j)$ 与 $(j,\bar{x},\bar{x}+\overline{a_l})$	若 $t_l=2$,
$(\bar{x},j,\bar{x}+\overline{a_l}),(\bar{x},\bar{x}+\overline{a_l},j)$ 与 $(j,\bar{x},\bar{x}+\overline{a_l})$	若 $t_l=3$.

类似于引理 4，由矩阵 $M(D_1)$ 可得区组集 $\mathscr{A}_i(0\leqslant i\leqslant v_2-1)$(即区组由两个 Z_{v_1} 中元及一个 Z_{v_2} 中元构成). 进而定义 $\mathscr{A}=\{(x,x+a,x+c);[a,b,c]\in S_1,x\in Z_{v_1}\}$，$\mathscr{A}'=\{(\bar{x},\bar{x}+\bar{a},\bar{x}+\bar{c});[\bar{a},\bar{b},\bar{c}]\in S_2,\bar{x}\in Z_{v_2}\}$，$\mathscr{B}=\mathscr{A}\cup(\bigcup_{i=0}^{v_2-1}\mathscr{A}_i)\cup(\bigcup_{j=0}^{v_1-1}\mathscr{A}_j')$，置换 f 同引理 4，则 $(X,\mathscr{B},f)$ 即是一个简单 SCDTS(v,λ).

证明 首先，我们有

$$|\mathscr{B}|=\frac{\lambda(v_1-1)-|D_1|}{3}v_1+|D_1|v_1+\frac{\lambda(v_2-1)-|D_2|}{3}v_2+|D_2|v_2$$
$$=\frac{\lambda(v_1+v_2)(v_1+v_2-1)}{3},$$

恰为所需区组个数.

由构造知全部区组是由差及差三元组构成的. $S_1\cup D_1$ 为 $\lambda Z_{v_1}^*$ 的分拆，$S_2\cup D_2$ 为 $\lambda Z_{v_2}^*$ 的分

拆，故 Z_{v_1}, Z_{v_2} 中不同元素构成的每个有序对分别在 $\mathscr{B}$ 的 λ 个区组中出现. 因矩阵 $M(D_1)$ 中每行有 $\frac{|D_1|}{v_2}$ 个差，矩阵 $N(D_2)$ 中每行有 $\frac{|D_2|}{v_1}$ 个差，则对任意元 $j \in Z_{v_1}, \bar{i} \in Z_{v_2}$，有序对 $(j, \bar{i})$ 及 $(\bar{i}, j)$ 在 $\mathscr{A}_i$ 中出现 $\frac{|D_1|}{v_2}$ 次，在 $\mathscr{A}_j'$ 中出现 $\frac{|D_2|}{v_1}$ 次，又因 $\frac{|D_1|}{v_2} + \frac{|D_2|}{v_1} = \lambda$，所以在 $\mathscr{B}$ 中出现 λ 次. 可知 $(X, \mathscr{B})$ 为 $DTS(v_1 + v_2, \lambda)$. 进而类似引理 4 的说明，$\mathscr{A}, \mathscr{A}', \bigcup_{i=0}^{v_2-1} \mathscr{A}_i, \bigcup_{j=0}^{v_1-1} \mathscr{A}_j'$ 中显然不含重复区组，故设计为简单的.

自反性说明如下：首先类似引理 4 的证明可知，$\mathscr{A}$ 及 $\bigcup_{i=0}^{v_2-1} \mathscr{A}_i$ 中区组均满足自反性. 其次对任意区组 $A \in \mathscr{A}_j', j = 0, 1, \cdots, v_1 - 1$，若 $A = (\bar{x}, j, \bar{x} + \bar{a_l})$，则 $f(A)^{-1} = (\bar{x} + \bar{a_l}, -j, (\bar{x} + \bar{a_l}) - \bar{a_l})$，故 $f(A)^{-1} \in \mathscr{A}_{-j}' \subset \mathscr{B}$. 类似地，$A = (j, \bar{x}, \bar{x} + \bar{a_l})$ 或 $(\bar{x}, \bar{x} + \bar{a_l}, j)$ 时，也必 $f(A)^{-1} \in \mathscr{A}_{-j}' \subset \mathscr{B} (t_l \geqslant 2)$. 对任意区组 $A = (\bar{x}, \bar{x} + \bar{a}, \bar{x} + \bar{c}) \in \mathscr{A}'$，其差三元组为 $[\bar{a}, \bar{c} - \bar{a}, \bar{c}] \in S_2$，而 $f(A)^{-1} = (\bar{x} + \bar{c}, \bar{x} + \bar{a}, \bar{x})$，其差三元组为 $[\bar{a} - \bar{c}, \bar{a}, -\bar{c}] \in S_2$，故 $f(A)^{-1} \in \mathscr{A}' \subset \mathscr{B}$.

因此，$(X, \mathscr{B}, f)$ 为所求的简单 SCDTS(v, λ).

定理 3 对定理 2 中余下的参数 (v, λ)，存在简单 SCDTS(v, λ)，其中 $v \geqslant 12$.

证明 应用引理 5. 设 $v_1 + v_2 = v \geqslant 12, v_1 = 6s + x, v_2 = 6s + y, s \geqslant 1, \lambda = 3(v_1 - 2) - m, \frac{|D_1|}{v_2} = 3(v_2 - 2) - n$，具体情况见下表 8. 其中诸 x, y 值与 v 值在每一行中是一一对应的. 另外，为了与定理 2 相对照，我们将用 v 表示的 λ 值单列于表中最后一列.

表 8

x	y	m	n	$v \equiv (\mathrm{mod}\ 12)$	λ
3,5,1	1,3,−1	0	0	4,8,0	$\frac{3v-6}{2}$
3,5,7	−1,1,3	6	0	2,6,10	$\frac{3v-12}{2}$
5	1	8	2	6	$\frac{3v-16}{2}$
5	1	10	4	6	$\frac{3v-20}{2}$
7	3	8	4	10	$\frac{3v-16}{2}$
7	3	10	2	10	$\frac{3v-20}{2}$
5,7	1,3	4	4	6,10	$\frac{3v-8}{2}$
3	1	2	4	4	$\frac{3v-10}{2}$
3	1	4	2	4	$\frac{3v-14}{2}$
1	−1	2	0	0	$\frac{3v-10}{2}$
1	−1	4	0	0	$\frac{3v-14}{2}$
1	−1	8	6	0	$\frac{3v-22}{2}$
1	−1	10	6	0	$\frac{3v-26}{2}$

根据引理 5，仅需再说明存在满足引理条件的 $\lambda Z_{v_1}^*$ 的 A 型分拆 $S_1\cup D_1$，$\lambda Z_{v_2}^*$ 的 B 型分拆 $S_2\cup D_2$，此时，$|D_1|=[(3v_2-2)-n]v_2$，$|D_2|=(\lambda-\frac{|D_1|}{v_2})v_1=[3(v_1-v_2)+n-m]v_1$. 事实上，由第二节中 Partition 6，对表中每行的 $v_1,v_2,\lambda,\frac{|D_1|}{v_2}$ 分别存在 $\lambda Z_{v_1}^*$ 的 A 型分拆 $S_1'\cup D_1'$，易知有 $|D_1'|\leqslant|D_1|$，故 $|S_1'|\leqslant|S_1|$. 类似引理 4 中取法，可由 S_1' 中按 A 型分拆的要求取出 $|S_1|$ 个差三元组构成集合 S_1，由 $\lambda Z_{v_1}^*$ 去掉 S_1 中的全部元构成集合 D_1，故 $S_1\cup D_1$ 为 $\lambda Z_{v_1}^*$ 的 A 型分拆，且 $\frac{|D_1|}{v_2}$ 为整数，满足引理中条件.

当 $3(v_2-2)\leqslant\lambda\leqslant 3v_2$（即表中前 11 行），由 $Z_{v_2}^*$ 的全体差三元组构成的集合 S_2' 中取 $|S_2|/2$ 对差三元组 $\{[\bar a,\bar b,\bar c],[-\bar a,-\bar b,-\bar c]\}$ 构成集合 S_2，因 $|S_2'|=(v_2-1)(v_2-2)\geqslant|S_2|=\frac{\lambda(v_2-1)-|D_2|}{3}$，且 $|S_2|\equiv 0\pmod 2$，故可知如上取法可行. 设 $D_2=\{3(v_2-2)Z_{v_2}^*\backslash S_2\}\cup\{(\lambda-3(v_2-2))Z_{v_2}^*\}$，则 $S_2\cup D_2$ 为所需的 $\lambda Z_{v_2}^*$ 的 B 型分拆，且 $\frac{|D_2|}{v_1}$ 为整数. 而对于上表中最后两行，均有 $\lambda<3(v_2-2)$，由第二节 Partition 6 的最后一种分拆，可得 $\frac{|D_1|}{v_2}Z_{v_2}^*=(3(v_2-2)-6)Z_{v_2}^*$ 的 B 型分拆 $S_2'\cup D_2'$，此时 $v_2=6s-1$，$s>1$. 因 $|D_2'|=6<|D_2|$，又计算得 $|S_2'|=\frac{|D_1|(v_2-1)/v_2-6}{3}\geqslant|S_2|=\frac{\lambda(v_2-1)-|D_2|}{3}$，$|S_2|\equiv 0\pmod 2$，故可由 S_2' 中取出 $|S_2|/2$ 对差三元组 $\{[\bar a,\bar b,\bar c],[-\bar a,-\bar b,-\bar c]\}$ 构成集合 S_2. 设 $D_2=\{\frac{|D_1|}{v_2}Z_{v_2}^*\backslash S_2\}\cup\{\frac{|D_2|}{v_1}Z_{v_2}^*\}$，则 $S_2\cup D_2$ 为所需 $\lambda Z_{v_2}^*$ 的 B 型分拆. 特别是 $v_2=6s-1$，$s=1$（即 $v_2=5$）时，由第二节 Partition 1，可得 $\frac{|D_1|}{v_2}Z_{v_2}^*=3Z_{v_2}^*$ 的 B 型分拆 $S_2'\cup D_2'$，$|D_2'|=0<|D_2|$，有 $|S_2'|\geqslant|S_2|$，$|S_2|\equiv 0\pmod 2$，故仍可用如上方法得到 $\lambda Z_{v_2}^*$ 的满足引理条件的 B 型分拆 $S_2\cup D_2$.

定理 4　当 $v=4,6,8,10$，且 $3\leqslant\lambda\leqslant\frac{3(v-2)}{2}$ 时，存在简单 SCDTS(v,λ).

证明　我们须讨论的参数 (v,λ) 值为 (4,3)，(6,3)，(6,5)，(8,3)，(8,9)，(10,3)，(10,5)，(10,7)，(10,9)，(10,11).

根据引理 5，仅须存在满足条件的 $\lambda Z_{v_1}^*$ 的 A 型分拆 $S_1\cup D_1$，$\lambda Z_{v_2}^*$ 的 B 型分拆 $S_2\cup D_2$，使得 $\frac{|D_1|}{v_2}+\frac{|D_2|}{v_1}=\lambda$，且 $\frac{|D_1|}{v_2}$，$\frac{|D_2|}{v_1}$ 为整数. 现将诸参数 (v,λ) 及对应的 v_1,v_2 值，集合 S_1,S_2 的取法分列于下面表 9. 由引理 5 知对于这些参数值，存在简单 SCDTS(v,λ).

表 9

(v,λ)	v_1	v_2	S_1	S_2
(4,3)	3	1	[1,1,2]	
(6,3)	5	1	[1,1,2],[2,2,4],[3,3,1]	
(6,5)	5	1	[1,1,2],[2,2,4],[3,3,1] [1,3,4],[3,1,4]	

(8,3)	5	3	[1,1,2]	$[\bar{1},\bar{1},\bar{2}],[\bar{2},\bar{2},\bar{1}]$
(8,9)	5	3	[1,1,2],[2,2,4],[3,3,1] [4,4,3],[1,3,4],[3,1,4]	$[\bar{2},\bar{2},\bar{1}]$
(10,3)	7	3	[1,1,2],[2,2,4],[3,3,6]	$[\bar{1},\bar{1},\bar{2}],[\bar{2},\bar{2},\bar{1}]$
(10,5)	5	5	[1,2,3],[2,1,3],[2,2,4] [3,3,1],[4,4,3]	
(10,7)	7	3	[6,6,5],[1,2,3],[2,1,3] [6,5,4],[5,6,4],[6,3,2] [3,6,2],[1,4,5],[4,1,5]	
(10,9)	5	5	[1,2,3],[2,1,3],[1,3,4] [3,1,4],[2,4,1],[4,2,1][4,4,3]	$[\bar{1},\bar{1},\bar{2}],[\bar{4},\bar{4},\bar{3}]$
(10,11)	5	5	[1,1,2],[2,2,4],[3,3,1]	$[\bar{1},\bar{2},\bar{3}],[\bar{3},\bar{4},\bar{2}],[\bar{3},\bar{1},\bar{4}],[\bar{4},\bar{2},\bar{1}],$ $[\bar{2},\bar{4},\bar{1}],[\bar{1},\bar{3},\bar{4}],[\bar{2},\bar{1},\bar{3}],[\bar{4},\bar{3},\bar{2}]$

根据定理 1—4 及引理 2,可得本文的主要结论(其中 SCDTS(6,1)的不存在性见文[2]):

定理 5 简单 SCDTS(v,λ)的存在谱为 $\lambda v(v-1)\equiv 0 \pmod 3$,$\lambda\leqslant 3(v-2)$,$(v,\lambda)\neq(6,1)$.

参考文献:

[1] COLBOURN C J, ROSA A. *Directed and Mendelsohn Triple Systems* [M]. Contemporary Design Theory, A wiley Interscience Publication, 1992.

[2] KANG Qing-de, CHANG Yan-xun, YANG Gui-hua. *The spectrum of self-converse DTS(v)* [J]. Journal of Combinatorial Designs, 1994, **2**(6): 415—425.

[3] TIAN Zi-hong. *The Spectrum of self-converse DTS(v,λ)* [J]. Acta Mathematicae Applicate Sinica, 1997, **20**(4): 531—534.

[4] DEHON M. *On the existence of 2-designs $S_\lambda(2,3,v)$ without repeated blocks* [J]. Discrete Mathematics, 1983, **43**: 155—171.

[5] SHEN Hao. *Embeddings of pure Mendelsohn triple systems and pure Directed triple systems* [J]. Journal of Combinatorial Designs, 1995, **3**(1): 41—50.

The Spectrum of Simple Self-Converse DTS (v,λ)

TIAN Zi-hong, KANG Qing-de

((Mathematics and Information Science College, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China)

Abstract: A directed triple system DTS$(v,\lambda)=(X,\mathscr{B})$ is called self-converse if it and its converse $(X,\mathscr{B}^{-1})$ are isomorphic, where $\mathscr{B}^{-1}=\{(z,y,x);(x,y,z)\in\mathscr{B}\}$. In this paper, the existence spectrum of simple self-converse DTS(v,λ) is given, which is $\lambda v(v-1)\equiv 0 \pmod 3$, $\lambda\leqslant 3(v-2)$ and $(v,\lambda)\neq(6,1)$.

Key words: transitive triple; simple design; partition; difference triple.