第 24 卷第 3 期 数学研究与评论 Vol. 24 No. 3
2004 年 8 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2004

关于格上蕴涵代数及其对偶代数*

朱 怡 权

(肇庆学院数学系,广东 肇庆 526061)

摘 要:给出了格蕴涵代数、MV 代数、R_0 代数等一些格上蕴涵代数之间的关系,并建立了它们的对偶代数.其结果描述了这些代数内部结构的特征,同时也为从语义的角度进一步研究格值逻辑系统提供了一个新的途径.

关键词:FI 代数;格蕴涵代数;MV 代数;(弱)R_0 代数;对偶代数

分类号:AMS(2000) 06F35,03G25,03C75/CLC number: O153.1

文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2004)03-0549-07

1 引 言

当今智能计算机的出现有力地推动了模糊控制技术的发展,而各种模糊控制又是以其特定的模糊推理与模糊逻辑为基础的.为适应不同的模糊推理,并建立其严格的逻辑基础,人们提出了许多不同形式的逻辑代数系统[1-5].其中早期提出的较为重要的有:Heyting 代数,Post 代数,De Morgan 代数(Fuzzy 格);近期提出而较有影响的有:MV 代数,剩余格,Fuzzy 蕴涵代数,格蕴涵代数,蕴涵格和 R_0 代数等.这些代数的提出,各有其实际背景和广泛的应用前景.

在上面提到的逻辑代数系统中,大多数可归结为建立在 De Morgan 格上的蕴涵代数(关于其蕴涵算子→),如 MV 代数、格蕴涵代数、蕴涵格和 R_0 代数等.然而 De Morgan 格是一种自对偶格,如何建立这类格上蕴涵代数的对偶代数,并使其蕴涵运算与对偶下的格运算保持原有的"协调性"? 这正是本文所要回答的问题.

2 若干相近代数间的关系

裴道武、王国俊教授在文[1]中较为详尽地讨论了 R_0 代数与 De Morgan 代数、Kleen 代数、FI 代数以及剩余格的关系.作为对文[1]的一点补充,也为后面讨论的需要,本节对 FI 代数、De Morgan 代数、格蕴涵代数、MV 代数和 R_0 代数之间的关系作些进一步的讨论.其中,未

* 收稿日期:2001-09-24
基金项目:广东省自然科学基金资助项目(021073)和广东省高校自然科学研究(资助)项目(Z02017)
作者简介:朱怡权(1958-),教授.

指明出处而直接引用的有关概念和基本结论可在文末的参考文献中找到.

定义 2.1[2] 一个(2,0)型代数$(X,\to,0)$称为 Fuzzy 蕴涵代数(简称为 FI 代数),如果$\forall x,y,z\in X$,有

(I_1) $x\to(y\to z)=y\to(x\to z)$;

(I_2) $(x\to y)\to((y\to z)\to(x\to z))=1$;

(I_3) $x\to x=1$;

(I_4) $x\to y=y\to x=1\Rightarrow x=y$;

(I_5) $0\to x=1$,其中 $1=0\to 0$.

对于 FI 代数$(X,\to,0)$,$\forall x\in X$,令 $C(x)=x\to 0$(称之为 x 的伪补).若 $C^2(x)=x$,$\forall x\in X$,则称$(X,\to,0)$为正则 FI 代数.并称满足条件$(x\to y)\to y=(y\to x)\to x$ 的 FI 代数为交换 FI 代数,称满足条件 $x=(x\to y)\to x$ 的 FI 代数为关联 FI 代数.

定理 2.1 设$(X,\to,0)$为 FI 代数,则

(1) X 为正则的$\Leftrightarrow\forall x,y\in X,C(x)\to y=C(y)\to x\Leftrightarrow\forall x,y\in X,C(x)\to C(y)=y\to x$;

(2) X 为交换的$\Rightarrow X$ 为正则的;

(3) X 为关联的$\Rightarrow X$ 为可换的.

证明 (1) 设$\forall x,y\in X$,若 $C(x)\to y=C(y)\to x$,由 FI 代数的基本性质[2],令 $y=0$ 得,$C^2(x)=1\to x=x$;以 $C(y)$ 代 y 得,$C(x)\to C(y)=C^2(y)\to x=y\to x$.若$\forall x,y\in X$,$C(x)\to C(y)=y\to x$,则令 $y=1$ 得,$C^2(x)=C(x)\to 0=C(x)\to C(1)=1\to x=x$.而由([2],定理 2.4),$X$ 正则时,有

$$C(x)\to y=C(y)\to x,\forall x,y\in X.$$

(1) 获证.

(2) 若 X 为交换 FI 代数,则$\forall x,y\in X$,$(x\to y)\to y=(y\to x)\to x$,令 $y=0$ 得,

$$C^2(x)=(0\to x)\to x=1\to x=x,$$

故 X 是正则的.

(3) 设$(X,\to,0)$为关联 FI 代数,则$\forall x,y\in X$,$x=(x\to y)\to x$,从而

$$(y\to x)\to x=(y\to x)\to((x\to y)\to x)=(x\to y)\to((y\to x)\to x),$$

$$((y\to x)\to x)\to((x\to y)\to y)=((x\to y)\to((y\to x)\to x))\to((x\to y)\to y).$$

又由文[2]中的定理 2.1 得

$$y\to((x\to y)\to y)=(x\to y)\to(y\to y)=(x\to y)\to 1=1,$$

从而由(I_2)及以上最后两式可得,$((y\to x)\to x)\to((x\to y)\to y)=1$.互换 x 和 y 得,$((x\to y)\to y)\to((y\to x)\to x)=1$.这就证明了:$(y\to x)\to x=(x\to y)\to y$,即$(X,\to,0)$为交换 FI 代数.□

由定理 2.1 的(2)知,文[3]中的定理 2 与定理 3 可改述为:

定理 2.2 设$(X,+,\times,*,0,1)$是 MV 代数,则$(X,\to,0)$为交换 FI 代数,其中 $x\to y=x^*+y$;若$(X,\to,0)$为交换 FI 代数,则$(X,+,\times,*,0,1)$为 MV 代数,这里

$$x+y=C(x)\to y,\ x\times y=C(x\to C(y)),\ x^*=C(x).$$

对于格蕴涵代数[4]和 R_0 代数等,它们与 FI 代数的关系更为直接.我们有

定理 2.3 (2,2,2,1,0,0)型代数$(X,\wedge,\vee,\to,',0,1)$是一个格蕴涵代数,当且仅当下列条件成立:

(1) $(X, \vee, \wedge, ', 0, 1)$为 De Morgan 代数；

(2) $(X, \rightarrow, 0)$是交换 FI 代数，且$C(x)=x'$；

(3) $x\rightarrow(y\vee z)=(x\rightarrow y)\vee(x\rightarrow z)$，$x\rightarrow(y\wedge z)=(x\rightarrow y)\wedge(x\rightarrow z)$，$\forall\ x,y,z\in X$.

证明 必要性由文[4]的命题 1、命题 4 和定理 1 立即得证. 对于充分性，因为$(X, \rightarrow, 0)$为交换 FI 代数，且$C(x)=x'$，所以格蕴涵代数定义[4]中的条件$(I_1)-(I_5)$成立，其中(I_3)由定理 2.1 得到. 又由文[4]的命题 1，条件(3)等价于格蕴涵代数定义中的条件(l_1)和(l_2). 因此，$(X, \vee, \wedge, \rightarrow, ', 0, 1)$是一个格蕴涵代数. □

注记 关于格蕴涵代数，作者[6-8]曾给出了它与 BCK 代数的关系，并给出了仅含 7 条公理的一个简化公理系，这里定理 2.3 的表述形式(其中有些条件是多余的)是为了后面的需要. 并且不难看出，上述条件(1)和(2)可作为拟格蕴涵代数的特征；而由定理 2.1 及文[8－9]可知，将定理 2.3 中的条件(2)改为

(2)′ $(X, \rightarrow, 0)$为关联 FI 代数，且$C(x)=x'$，

则得到格 H 蕴涵代数的特征.

定义 2.2[1] 设M是$(\neg, \vee, \rightarrow)$型代数，其中$\neg$为一元运算，$\vee$和$\rightarrow$为二元运算. 如果$M$上有偏序$\leqslant$，使得$(M, \leqslant)$是有界分配格，$\vee$是关于$\leqslant$的上确界运算，$\neg$是关于$\leqslant$的逆序对合对应，且满足以下条件，$\forall\ a,b,c\in M$：

(R_1) $\neg a\rightarrow\neg b=b\rightarrow a$；

(R_2) $1\rightarrow a=a$；

(R_3) $b\rightarrow c\leqslant(a\rightarrow b)\rightarrow(a\rightarrow c)$；

(R_4) $a\rightarrow(b\rightarrow c)=b\rightarrow(a\rightarrow c)$；

(R_5) $a\rightarrow(b\vee c)=(a\rightarrow b)\vee(a\rightarrow c)$；

(R_6) $(a\rightarrow b)\vee((a\rightarrow b)\rightarrow(\neg a\vee b))=1$.

其中 1 是M中的最大元，称M为R_0代数. 去掉条件(R_6)后的代数称为弱R_0代数.

为下面讨论的方便，我们令$x\wedge y=\neg(\neg x\vee\neg y)$，并记$\neg x$为$x'$，而把(弱)$R_0$代数$M$看成是一个(2,2,2,1,0,0)型的代数：$(M, \vee, \wedge, \rightarrow, ', 0, 1)$.

文[1]证明了：弱R_0代数必定是 De Morgan 代数，也是正则 FI 代数. 我们来证明：R_0代数恰好是这两种代数结构的一个“有机结合体”.

定理 2.4 (2,2,2,1,0,0)型代数$(X, \vee, \wedge, \rightarrow, ', 0, 1)$是一个弱$R_0$代数当且仅当下列条件成立：

(1) $(X, \vee, \wedge, ', 0, 1)$是 De Morgan 代数；

(2) $(X, \rightarrow, 0)$是正则 FI 代数，且$C(x)=x'$；

(3) $a\rightarrow(b\vee c)=(a\rightarrow b)\vee(a\rightarrow c)$，$a\rightarrow(b\wedge c)=(a\rightarrow b)\wedge(a\rightarrow c)$，$\forall\ a,b,c\in X$.

证明 根据定义 2.2 及文[1]的命题 9，必要性获证. 对于充分性，只需检查公理$(R_1)-(R_5)$是否成立. 事实上，由(2)及定理 2.1 得(R_1)，(R_2)是一般 FI 代数所具有的性质[2]，(R_4)即(I_1)，(R_5)即(3)的第一式. 为证(R_3)成立，我们先证明：$\forall\ x,y\in X$，$x\leqslant y\Leftrightarrow x\rightarrow y=1$，这里$\leqslant$为格$(X, \vee, \wedge)$上的偏序关系. 首先，若$x\rightarrow y=1$，则由(3)及正则 FI 代数$(X, \rightarrow, 0)$的性质得

$$y\rightarrow(x\vee y)=(y\rightarrow x)\vee(y\rightarrow y)=(y\rightarrow x)\vee 1=1,$$

$$(x\vee y)\rightarrow y=y'\rightarrow(x\vee y)'=y'\rightarrow(x'\wedge y')\quad\text{(De Morgan 律)}$$

$$=(y'\to x')\wedge(y'\to y')=(y'\to x')\wedge 1$$
$$=y'\to x'=1.$$

从而，由(I_4)得 $y=x\vee y$，即 $x\leqslant y$. 其次，若 $x\leqslant y$，则 $y=x\vee y$，故

$$x\to y=x\to(x\vee y)=(x\to x)\vee(x\to y)=1\vee(x\to y)=1.$$

这就证明了：$x\leqslant y\Leftrightarrow x\to y=1$. 于是，在 FI 代数$(X,\to,0)$中，由($I_1$)和($I_2$)得，

$$(b\to c)\to((a\to b)\to(a\to c))=1,\quad \forall\, a,b,c\in X,$$

从而(R_3)成立. 充分性获证. □

由定理 2.1—定理 2.4，我们不难看出 FI 代数、De Morgan 代数、格蕴涵代数、MV 代数和(弱)R_0 代数之间的联系. 特别地，我们有

定理 2.5 一个弱 R_0 代数$(X,\vee,\wedge,\to,',0,1)$是格蕴涵代数当且仅当$\forall\, x,y\in X$，有$(x\to y)\to y=(y\to x)\to x$.

由定理 2.3 及定理 2.4，我们给出下列

定义 2.3 若 $\mathbf{X}=(X,\vee,\wedge,\to,',0,1)$为(拟)格蕴涵代数或(弱)$R_0$ 代数，称 FI 代数$(X,\to,0)$为 $\mathbf{X}$ 的伴随代数，记作 FI($\mathbf{X}$).

定理 2.6 若 $\mathbf{X}=(X,\vee,\wedge,\to,',0,1)$和 $\mathbf{Y}=(Y,\underline{\vee},\overline{\wedge},\not\to,\neg,\theta,e)$为两个(弱)$R_0$ 代数，则在泛代数同构的意义下，有

$$\mathbf{X}\cong\mathbf{Y}\Leftrightarrow \mathrm{FI}(\mathbf{X})\cong\mathrm{FI}(\mathbf{Y}).$$

证明 只须证明充分性. 设 FI($\mathbf{X}$)≅FI($\mathbf{X}$)，令 $f:X\to Y$，是 FI($\mathbf{X}$)到 FI($\mathbf{Y}$)的一个同构映射[2]. 则$\forall\, x,y\in X$，有

$$f(x\to y)=f(x)\not\to f(y),\ f(0)=\theta,\ f(1)=e,$$

令$\leqslant$，$\leqslant^*$分别表示格$(X,\vee,\wedge)$，$(Y,\underline{\vee},\overline{\wedge})$上的偏序关系，由弱 R_0 代数的性质[1]：$x\leqslant y\Leftrightarrow x\to y=1$，可知

$$x\leqslant y\Leftrightarrow f(x\to y)=f(1)\Leftrightarrow f(x)\not\to f(y)=e\Leftrightarrow f(x)\leqslant^* f(y),$$

即 f 是一个序同构映射：$(X,\leqslant)\cong(Y,\leqslant^*)$，从而 f 也是格同构映射：$(X,\vee,\wedge)\cong(Y,\underline{\vee},\overline{\wedge})$. 因此 $\mathbf{X}\cong\mathbf{Y}$. □

注记 不难看出定理 2.6 对于(拟)格蕴涵代数也是成立的. 而对于 MV 代数 $\mathbf{X}=(X,+,\times,*,0,1)$，取 FI($\mathbf{X}$)$=(X,\to,0)$，其中 $x\to y=x^*+y$，则亦有相应于定理 2.6 的结果.

3 对偶代数

本节来讨论格蕴涵代数、MV 代数和(弱)R_0 代数的对偶代数问题. 我们知道，De Morgan 代数$(X,\vee,\wedge,',0,1)$有对偶代数，其对偶代数$(X,\underline{\vee},\overline{\wedge},\neg,1,0)$仍为 De Morgan 代数，其中格上的序关系互为对偶，而$\neg$取为$'$. 从定理 2.2—定理 2.4 可知，建立格蕴涵代数、R_0 代数等的对偶代数，关键是对其伴随代数—FI 代数$(X,\to,0)$合理地引进一种"对偶结构"，使其仍为 FI 代数并与相应的 De Morgan 对偶代数保持着原有的"协调性".

定理 3.1 设 $\mathbf{X}=(X,\to,0)$为正则(交换)FI 代数，$1=0\to 0$，$\forall\, x,y\in X$，令 $x\not\to y=C(y\to x)$，则 $\mathbf{X}^{[op]}=(X,\not\to,1)$为正则(交换)FI 代数，$x$ 在 X 中的伪补仍为 $C(x)$，并且

$$(X,\rightarrow,0)\cong(X,\nrightarrow,1)\quad (\text{FI 同构}[2]).$$

证明 设$(X,\rightarrow,0)$为正则 FI 代数. 首先利用正则 FI 代数的性质来证明$(X,\nrightarrow,1)$满足 FI 代数的公理$(\mathrm{I}_1)-(\mathrm{I}_5)$：

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}_1)\ x\nrightarrow(y\nrightarrow z)&=C(C(z\rightarrow y)\rightarrow x)=C(C(x)\rightarrow(z\rightarrow y))\\
&=C(C(x)\rightarrow(C(y)\rightarrow C(z)))\\
&=C(C(y)\rightarrow(C(x)\rightarrow C(z)))\\
&=C(C(z\rightarrow x)\rightarrow y)\\
&=y\nrightarrow(x\nrightarrow z),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}_2)\ (x\nrightarrow y)\nrightarrow((y\nrightarrow z)\nrightarrow(x\nrightarrow z))&=C(C(C(z\rightarrow x)\rightarrow C(z\rightarrow y))\rightarrow C(y\rightarrow x))\\
&=C((y\rightarrow x)\rightarrow((z\rightarrow y)\rightarrow(z\rightarrow x)))\\
&=C((z\rightarrow y)\rightarrow((y\rightarrow x)\rightarrow(z\rightarrow x)))\\
&=C(1)=0,
\end{aligned}
$$

(I_3) $x\nrightarrow x=C(x\rightarrow x)=C(1)=0$,

(I_4) $x\nrightarrow y=y\nrightarrow x=0\Rightarrow C(y\rightarrow x)=C(x\rightarrow y)=C(1)\Rightarrow y\rightarrow x=x\rightarrow y=1\Rightarrow x=y$,

(I_5) $1\nrightarrow x=C(x\rightarrow 1)=C(1)=0$.

综上所述，证明了$\mathbf{X}^{[op]}$为 FI 代数，其中，$1\nrightarrow 1=C(1\rightarrow 1)=C(1)=0$. 又因为$\forall\ x\in X$，$x\nrightarrow 1=C(1\rightarrow x)=C(x)$，故$x$在$\mathbf{X}^{[op]}$中的伪补$C'(x)=C(x)$，从而$\mathbf{X}^{[op]}$也是正则的.

其次，当$\mathbf{X}$为交换 FI 代数时，由定理 2.1 知，$\mathbf{X}^{[op]}$为正则 FI 代数，又$\forall\ x,y\in X$，有

$$
\begin{aligned}
(x\nrightarrow y)\nrightarrow y&=C(y\rightarrow C(y\rightarrow x))\\
&=C((y\rightarrow x)\rightarrow C(y))\\
&=C((C(x)\rightarrow C(y))\rightarrow C(y))\\
&=C((C(y)\rightarrow C(x))\rightarrow C(x))\\
&=C(x\rightarrow C(x\rightarrow y))\\
&=(y\nrightarrow x)\nrightarrow x,
\end{aligned}
$$

所以结合前面的证明得，$\mathbf{X}^{[op]}$为交换 FI 代数.

最后，令$f:X\rightarrow X$，$f(x)=C(x)$，$\forall\ x\in X$，则f为双射，且$\forall\ y,z\in X$，有

$$f(y\rightarrow z)=C(y\rightarrow z)=C(C(z)\rightarrow C(y))=C(y)\nrightarrow C(z)=f(y)\nrightarrow f(z).$$

因此，f是$(X,\rightarrow,0)$到$(X,\nrightarrow,1)$的一个同构映射，而$(X,\rightarrow,0)\cong(X,\nrightarrow,1)$. □

定理 3.2 设$\mathbf{X}=(X,\vee,\wedge,\rightarrow,{}',0,1)$为(弱)$\mathrm{R}_0$代数，$\forall\ x,y\in X$，定义

$$x^{\neg}=x',\ x\,\underline{\vee}\,y=x\wedge y,\ x\,\overline{\wedge}\,y=x\vee y,\ x\nrightarrow y=(y\rightarrow x)' \qquad (*)$$

记$\theta=1$，$e=0$，则$\mathbf{X}^{[op]}=(X,\underline{\vee},\overline{\wedge},\nrightarrow,\neg,\theta,e)$也是(弱)$\mathrm{R}_0$代数，其序关系与$\mathbf{X}$的互为对偶，并且$\mathbf{X}\cong\mathbf{X}^{[op]}$(泛代数意义下).

证明 设$\mathbf{X}$为弱R_0代数，首先证明$\mathbf{X}^{[op]}$为弱R_0代数. 由定理 2.4 和定理 3.1，这只需证明在$\mathbf{X}^{[op]}$中，$\nrightarrow$对$\underline{\vee}$及$\overline{\wedge}$具有左分配律即可. 事实上，$\forall\ x,y,z\in X$，有

$$
\begin{aligned}
x\nrightarrow(y\,\underline{\vee}\,z)&=((y\wedge z)\rightarrow x)'\\
&=(x'\rightarrow(y\wedge z)')'\\
&=(x'\rightarrow(y'\vee z'))'
\end{aligned}
$$

$$= ((x' \to y') \vee (x' \to z'))'$$
$$= ((y \to x) \vee (z \to x))'$$
$$= (y \to x)' \wedge (z \to x)'$$
$$= (x \not\to y) \underline{\vee} (x \not\to z).$$

同理可证，$x \not\to (y \overline{\wedge} z) = (x \not\to y) \overline{\wedge} (x \not\to z)$. 从而 $\mathbf{X}^{[op]}$为 De Morgan 代数.

进一步容易证明，当 $\mathbf{X}$ 为 R_0 代数时，$\mathbf{X}^{[op]}$为 R_0 代数.

显然 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{X}^{[op]}$中的序关系是互为对偶的，且由定理 2.6 和定理 3.1 得，$\mathbf{X} \cong \mathbf{X}^{[op]}$(泛代数意义下). □

定理 3.3 设 $\mathbf{X} = (X, \vee, \wedge, \to, ', 0, 1)$为格蕴涵代数，则按照(*)式，$\mathbf{X}^{[op]} = (X, \underline{\vee}, \overline{\wedge}, \not\to, \neg, \theta, e)$也是格蕴涵代数，其序关系与 $\mathbf{X}$ 的互为对偶，并且 $\mathbf{X} \cong \mathbf{X}^{[op]}$(泛代数意义下).

证明 由定理 2.5、定理 3.1 和定理 3.2 立即得证.

注记 对于格 H 蕴涵代数，相应于定理 3.3 的结论仍然成立.

4 结束语

我们分别称定理 3.1—定理 3.3 中的 $\mathbf{X}^{[op]}$为原来代数 $\mathbf{X}$ 的对偶代数. 显然，这种对偶是相互的，并且在一定程度上反映了代数 $\mathbf{X}$ 内部结构的特征.

另一方面，从逻辑系统的观点看，如果把 $\mathbf{X}$ 中的"$\to$"和"$'$"看成是逻辑联结词：以 A'表示对 A 的否定，"$A \to B$"表示"若 A 则 B"，那么由"$A \not\to B = (B \to A)'$"知，对偶代数 $\mathbf{X}^{[op]}$则是基于命题的"逆一否"运算的一个命题逻辑系统，并且代数同构 $\mathbf{X} \cong \mathbf{X}^{[op]}$正好反映了这种逻辑上的等价性. 因而本文关于对偶代数的探讨，也为从语义的角度来进一步研究格值逻辑系统，提供了一个新的途径.

此外，由定理 2.2 和定理 3.1 不难得到 MV 代数的对偶代数. 也不难直接证明对于蕴涵格，按(*)式的定义方式，相应于定理 3.2 的结论仍成立. 值得指出的是，本文的研究方法带有一定的广泛性，如还可应用于 Heyting 代数、Hilbert 代数、剩余格等一类蕴涵代数，并将得到与本文类似的结果. 限于篇幅，这里不再详细讨论.

参考文献：

[1] 裴道武，王国俊. 一种新的模糊逻辑代数系统 [J]. 西南交通大学学报，2000，**35**(5)：564－568.
PEI Dao-wu, WANG Guo-jun. *A new kind of algebraic systems for fuzzy logic* [J]. J. Southwest Jiaotong Univ., 2000, **35**(5): 564－568. (in Chinese)

[2] 吴望名. Fuzzy 蕴涵代数 [J]. 模糊系统与数学，1990，**4**(1)：56－63.
Wu Wang-ming. *Fuzzy implication algebras* [J]. Fuzzy Systems and Mathematice, 1990, **4**(1): 56－63. (in Chinese)

[3] 刘练珍，王国俊. Fuzzy 蕴涵代数与 MV 代数 [J]. 模糊系统与数学，1998，**12**(1)：20－25.
LIU Lian-zhen, WANG Guo-jun. *Fuzzy implication algebras and MV-algebras* [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1998, **12**(1): 20－25. (in Chinese)

[4] 徐　扬. 格蕴涵代数 [J]. 西南交通大学学报，1993，**28**(1)：20－27.

XU Yang. *Lattice implication algebras* [J]. J. Southwest Jiaotong Univ., 1993, **28**(1): 20－27. (in Chinese)

[5] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推论 [M]. 北京：科学出版社，2000.
WANG Guo-jun. *Non-classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning* [M]. Beijing: Chinese Scientific Press, 2000. (in Chinese)

[6] 朱怡权，曹喜望. 格蕴涵代数的一个简化公理系 [J]. 黄冈师范学院学报，2000，**20**(3)：6－8.
ZHU Yi-quan, CAO Xi-wang. *On a simplified axiomatics of lattice implication algebras* [J]. J. Huanggang Normal Univ., 2000, **20**(3): 6－8. (in Chinese)

[7] ZHU Yi-quan, TU Wen-biao. *A note on lattice implication algebras* [J]. Bull. Korean Math. Soc., 2001, **38**(1): 191－195.

[8] 朱怡权. 关于格蕴涵代数与 BCK 代数 [J]. 纯粹数学与应用数学，1999，**15**(3)：22－26.
ZHU Yi-quan. *On lattice implication algebras and BCK-algebras* [J]. Pure and Applied Mathematics, 1999, **15**(3): 22－26. (in Chinese)

[9] 朱怡权，李峥嵘. 正则 HFI 代数与格 H 蕴涵代数的关系 [J]. 四川师范大学学报，1998，**21**(2)：137－140.
ZHU Yi-quan, LI Zheng-rong. *Relations between regular HFI-algebras and lattice H implication algebras* [J]. J. Sichuan Normal Univ., 1998, **21**(2): 137－140. (in Chinese)

On Implication Algebras Based on Lattices and Their Dual Algebras

ZHU Yi-quan

(Dept. of Math., Zhaoqing University, Guangdong 526061, China)

Abstract: This paper gives out that the relationship among lattice implication algebras, MV algebras, R_0 algebras and other implication algebras based on lattices, and their dual algebras are established. Those results describe the characterizations of interior structures of those algebras, and also offer a new way for further researching lattice-valued logic systems from the semantics.

Key words: FI algebra; lattice implication algebra; MV algebra; (weak)R_0 algebra; dual algebra.