复指数 Dirichlet 级数表示的解析函数*

邓 冠 铁

(北京师范大学数学科学学院, 北京 100875)

摘　要:本文对一个在角形区域由复指数 Dirichlet 级数表示且在一固定水平带形有界解析不恒为零的函数的存在性，给出了充分必要条件.

关键词:解析整函数; Dirichlet 级数;有界性.

分类号:AMS(2000) 30B50/CLC number: O174.5, O174.52

文献标识码:A　　　　**文章编号**:1000-341X(2004)03-0556-03

1 引 言

设 $d>0, \Lambda=\lambda_n: n=1,2,\cdots\}$是右半平面中一复数列,满足

$$\delta(\Lambda)=\inf\{|\lambda_{n+1}|-|\lambda_n|: n=1,2,\cdots\}>0\ , \tag{1}$$

$$\Theta(\Lambda)=\sup\{|\arg\lambda_n|\}<\frac{\pi}{2},\quad \Theta_1(\Lambda)=\frac{\pi}{2}-\Theta(\Lambda). \tag{2}$$

设 $E(\Lambda, d)$表示所有在角行区域 $H(\Lambda)=\{z: |\arg z|<\Theta_1(\Lambda)\}$上有复指数 Dirichlet 级数展式

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n z} \tag{3}$$

且在带形 $B(d)=\{z=x+iy: |y|\leqslant d\}$中有界连续,在 $B(d)$内部解析的函数 f 全体组成的集合.设

$$\lambda(r)=2\sum_{|\lambda_n|\leqslant r}\frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2}\ (r\geqslant|\lambda_1|);\quad \lambda(r)=0\ (r<|\lambda_1|), \tag{4}$$

$$k(r)=\lambda(r)-\frac{2d}{\pi}\log r\ (r\geqslant|\lambda_1|). \tag{5}$$

则我们有如下结果:

定理　设 $d>0, \Lambda=\{\lambda_n: n=1,2,\cdots\}$满足(1)和(2),则存在 $f\in E(\Lambda,d), f\not\equiv 0$ 的充要条件是 $k(r)$在$(|\lambda_1|, \infty)$中有下界.

评注　在文章[2]和[3]中,作者曾证明了如下结果:当 Λ 是正实数列时,存在一个在右半

* 收稿日期:2002-03-18
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10071005,10371011)
作者简介:邓冠铁(1959-),男,教授,博士生导师.

平面 $H(\Lambda)=\{z=x+iy:x>0\}$ 中有 Dirichlet 级数展式(3)且在带形区域 $\{z=x+iy:|y|<d\}$ $(d>0)$ 中有界解析，不恒为零的函数 $f(z)$ 的充要条件是 $k(r)$ 在 $(|\lambda_1|,\infty)$ 中有下界. 所以，本文定理是上述结果的推广.

2 定理的证明

定理条件的充分性证明 如果 $k(r)$ 在 $(|\lambda_1|,\infty)$ 中有下界，设

$$G(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\bar{\lambda}_n}\right)\exp(z/\lambda_n+z/\bar{\lambda}_n),$$

用类似于 W. H. J. Fuchs[4]的方法，我们可以证明 $G(z)$ 在右边半平面 $\{z=x+iy:x>-\delta_0\}$ 中解析，其中 $\delta_0=\inf\{\mathrm{Re}\lambda_n:n=1,2,\cdots\}$，且存在一正常数 A_1，使得

$$|G(z)|\leqslant\exp\{x\lambda(r)+A_1x\},\quad z\in\mathbf{C}_+,\quad r=|z|;$$
$$|G(z)|\geqslant\exp\{x\lambda(r)-A_1x\},\quad z\in C(\Lambda,\delta);$$
$$|G'(\lambda_n)|\geqslant\exp\{\mathrm{Re}\lambda_n\lambda(\lambda_n)-A_1|\lambda_n|\},\quad n=1,2,\cdots,$$

其中 $\mathbf{C}_+=\{z=x+iy:x>0\}$，$\delta=\delta(\Lambda)$，$C(\Lambda,\delta)=\mathbf{C}_+-\bigcup_{n=1}^{\infty}D(\lambda_n,\delta)$，$D(\lambda_n,\delta)=\{z:|z-\lambda_n|\leqslant\delta\}$. Stirling 公式[1]说明了 Gamma 函数满足

$$\log\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\mathrm{d}z\right)\right|=\frac{2}{\pi}\mathrm{d}x\log^+|z|-d|y|+c(x),$$

其中存在一个常数 A_2，当 $x\geqslant0$ 时，$|c(x)|\leqslant A_2+A_2x$. 于是对充分大的正常数 A_3，函数

$$g_0(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\mathrm{d}z\right)e^{-A_3z}}{(1+z)^2G(z)}$$

满足 $|g_0(z)|\leqslant\frac{1}{1+y^2}\exp\{-xk(r)-d|y|-2x\}$，对 $z\in C(\Lambda,\delta)$，$r=|z|$ 成立. 从而函数

$$f_0(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g_0(it)e^{-itz}\mathrm{d}t$$

在带形 $B(d)=\{z=x+iy:|y|\leqslant d\}$ 中有界，连续且不恒为零. 由 Cauchy 公式

$$f_0(z)=\sum_{k=1}^{n}a_ke^{-\lambda_kz}+f_n(z),$$

其中

$$a_k=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\mathrm{d}\lambda_k\right)e^{-A_3\lambda_k}}{(1+\lambda_k)^2G'(\lambda_k)}$$

是 $g_0(z)$ 在极点 λ_k 处的留数，f_n 满足

$$f_n(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n}g_0(\zeta)e^{-\zeta z}\mathrm{d}\zeta,$$

其中 $L_n=\{\zeta=r_n\cos\Theta(\Lambda)+i\eta:|\eta|\geqslant r_n\}\cup\{\zeta=r_ne^{i\theta}:|\theta|\leqslant\Theta(\Lambda)\}$ 以及 $|\lambda_n|<r_n<|\lambda_{n+1}|$. 从而 f_n 满足，

$$|f_n(z)|\leqslant\exp\{-xr_n\cos\Theta(\Lambda)+|y|r_n\sin\Theta(\Lambda)\}.$$

从而在角形区域 $H(\Lambda)=\{z:|\arg z|<\Theta_1(\Lambda)\}$ 上 f_0 有复指数 Dirichlet 级数展式

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

不恒为零,所以 $f_0 \in E(\Lambda, d)$. 这完成了充分性的证明.

定理条件的必要性证明 设存在 $f \in E(\Lambda, d)$ 有展式(1),则存在一常数 A_4 使得系数 a_n 满足 $|a_n e^{-\lambda_n}| \leqslant A_4$. 函数 $h_0(z) = G(z)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{tz}\mathrm{d}t$ 在带形 $\{z = x + iy : 0 < x < \delta_0\}$ 中解析,其中 $\delta_0 = \inf\{\mathrm{Re}\lambda_n : n = 1, 2, \cdots\}$. 对任何 $\sigma > 0$, 有

$$h_0(z) = G(z)\int_{-\infty}^{\sigma} f(t)e^{tz}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(z)}{\lambda_n - z} a_n \exp\{-\sigma(\lambda_n - z)\},$$

这说明 $h_0(z)$ 可延拓成右半平面 $\mathbf{C}_+ = \{z = x + iy : x > 0\}$ 中解析函数(延拓后的解析函数仍然记为 $h_0(z)$). 对任何 $\alpha \in [-d, d]$, $\sigma > 0$, 由 Cauchy 公式,有

$$h_0(z) = G(z)\int_{-\infty}^{\sigma} f(t + i\alpha)e^{(t+i\alpha)z}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(z)}{\lambda_n - z} a_n \exp\{(-\sigma - i\alpha)(\lambda_n - z)\}.$$

取 $\alpha = d\,\mathrm{sign}(y)$,其中 $\mathrm{sign}(y)$ 表示 y 的符号函数,则对 $\sigma = 1 + \tan\Theta(\Lambda)$,存在正常数 A_5,使得

$$|h_0(1 + z)| \leqslant \exp\{x\lambda(r) - d|y| + A_5 x + A_5\}$$

所以,对 $h(z) = h_0(1 + z)$ 在半圆 $\{z : 1 \leqslant |z| \leqslant R; x \geqslant 0\}$ $(R > 1)$ 上用 Carleman 公式[1],有一常数 A_6,使得

$$-A_6 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_1^R \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{R^2}\right)\log|h(iy)h(-iy)|\mathrm{d}y + \frac{1}{\pi R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log|h(Re^{i\theta})|\cos\theta \mathrm{d}\theta,$$

从而 $k(r)$ 在 $(|\lambda_1|, \infty)$ 中有下界. 这完成了定理的证明.

参考文献:

[1] BOAS Jr R P. *Entire Functions* [M]. Academic Press, New York, 1954.

[2] DENG G T. *Uniqueness of some holomorphic functions* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. B, 1986, **7**: 330—338.

[3] DENG G T. *On Watson's problem and its applications* [J]. Bull. Sci. Math., 1985, **109**: 4—15.

[4] FUCHS W H J. *On the closure of* $\{e^{-t}t^{a_\nu}\}$ [J]. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1946, **42**: 91—105.

Analytic Function Represented by Dirichlet Series of Complex Exponents

DENG Guan-tie

(Dept. of Math., Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: A necessary and sufficient condition is given for the existence of an analytic function which is analytic in an angular region, not identically zero, bounded in a horizontal strip and represented by Dirichlet series of complex exponents.

Key words: analytic function; Dirichlet series; boundedness.