第 24 卷第 3 期
2004 年 8 月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 24 No. 3
Aug. 2004

$S[a,b]$ 类中边界 Nevanlinna-Pick 插值(Ⅱ)*

吴 化 璋[1,2]

(1. 安徽大学数学系, 安徽 合肥 230039; 2. 中国科学技术大学数学系, 安徽 合肥 230026)

摘 要:继续作者最近的研究,用所谓的 Hankel 向量方法建立 $S[a,b]$ 函数类中带边界插值数据的 Nevanlinna-Pick 插值问题与 $[a,b]$ 上的某种带约束条件的 Hausdorff 矩量问题之间解集之间明确的一一对应关系. 通过 $N[a,b]$ 函数类与 $S[a,b]$ 函数类之间的联系,从而由 BNP ($N[a,b]$) 问题的可解性准则和解的参数化描述获得 BNP ($S[a,b]$) 问题的可解性准则和解的参数化表示.

关键词: $S[a,b]$ 类; BNP($S[a,b]$)问题; BNP($N[a,b]$)问题; Hausdorff 矩量问题; Hankel 向量.

分类号:AMS(2000) 30E03,47A57/CLC number: O174.42,O174.43

文献标识码:A　　　　**文章编号**:1000-341X(2004)03-0559-10

1 问题的提出

考虑到篇幅,本文将继续采用文献[2]的一些记号(甚至是表示式). 称函数 $f(\lambda)$ 属于 $S[a,b]$ 类,如果 $f(\lambda)\in N$ (Nevanlinna 函数类,即在上平面解析且虚部非负),而且 $f(\lambda)$ 在区间 $(-\infty,a)$ 和 (b,∞) 内解析并取非负值. 称函数 $f(\lambda)$ 属于 $N[a,b]$ 类,如果 $f(\lambda)\in N$ 且在区间 $(-\infty,a)$ 内解析且取非负值,在区间 (b,∞) 内解析且取非正值. 由[1]知,函数 $f(\lambda)\in S[a,b]$,则有以下结论:

引理 1.1 (1) 函数 $f(\lambda)\in S[a,b]$,当且仅当它有积分表示

$$f(\lambda)=(b-\lambda)\int_a^b\frac{\mathrm{d}\sigma(u)}{u-\lambda},\quad \lambda\notin[a,b], \tag{1.1}$$

其中 $\sigma(u)$ 是 $[a,b]$ 上的分布函数(右连续的非减函数).

(2) $f(\lambda)\in S[a,b]$ 当且仅当 $\frac{1}{b-\lambda}f(\lambda)\in N[a,b]$.

设 BNP ($N[a,b]$) 问题如文献[2]所给,则我们提出 $S[a,b]$ 类中边界的 Nevanlinna-Pick 问题如下:

BNP ($S[a,b]$) 问题 　给定数据如文献[2]中 BNP ($N[a,b]$) 问题所给,如果把其中的 (1.2d) 式中最后一个等号改为不等号"$\leqslant$",即

---

* **收稿日期**:2002-06-03

作者简介:吴化璋(1966-),博士,副教授.

$$\frac{1}{\eta!}\frac{d^\eta}{d\lambda^\eta}f(\lambda)\Big|_{\lambda=g_\xi}=w_{\xi\eta},\xi=1,\cdots,\rho,\eta=0,1,\cdots,2m_\xi-2,$$
$$\frac{1}{(2m_\xi-1)!}\frac{d^{2m_\xi-1}}{d\lambda^{2m_\xi-1}}f(\lambda)\Big|_{\lambda=g_\xi}\leqslant w_{\xi,2m_\xi-1},\quad \xi=1,\cdots,\rho, \tag{1.2d'}$$

余下的条件(1.2a)—(1.2c)都不变,寻求所有属于 $S[a,b]$ 类中函数 $f(\lambda)$,要求满足文献[2]中相应的插值条件(1.2a)—(1.2c)和这里的(1.2d′).

令 $n=\sum_{i=1}^{\theta}\tau_i+\sum_{j=1}^{s}\alpha_j+\sum_{p=1}^{t}\beta_p+\sum_{\xi=1}^{\rho}m_\xi>1$. 那么总存在次数不超过 $2n-1$ 的唯一的实系数 Hermite 插值多项式 $\omega_S(\lambda)$ 满足(1.2a)—(1.2c)和(1.2d′)取等号情形,以及方程组:$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}f(\lambda)\Big|_{\lambda=\bar{\lambda}_i}=\bar{c}_{ik},i=1,\cdots,\theta,k=0,1,\cdots,\tau_i-1$. 令 $a(\lambda)$ 是插值点(包括点 $\bar{\lambda}_i,i=1,\cdots,\theta$)的零化多项式:

$$a(\lambda)=\prod_{i=1}^{\theta}(\lambda-\lambda_i)^{\tau_i}(\lambda-\bar{\lambda}_i)^{\tau_i}\prod_{j=1}^{s}(\lambda-u_j)^{2\alpha_j}\prod_{p=1}^{t}(\lambda-u_p)^{2\beta_p}\prod_{\xi=1}^{\rho}(\lambda-g_\xi)^{2m_\xi} \tag{1.3}$$

它是实系数的且次数为 $2n$,并对 $\lambda\in S[a,b]$,有 $a(\lambda)>0$. 令 $\omega_S(\lambda)/a(\lambda)$ 在无穷远点的 Laurent 级数展开式为:

$$\frac{\omega_S(\lambda)}{a(\lambda)}=\frac{h_0}{\lambda}+\frac{h_1}{\lambda^2}+\cdots+\frac{h_{2n-1}}{\lambda^{2n}}+\cdots. \tag{1.4}$$

因此,每个 $h_r(r=0,1,2\cdots)$ 是实的. 展开式(1.4)中前 $2n$ 个 Markov 参数构成的向量 $\mathbf{h}_S=(h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1})$ 被称为 BNP ($S[a,b]$) 问题的 Hankel 向量.

对上述的 Hankel 向量,我们有如下 $[a,b]$ 上非标准截断 Hausdorff 矩量问题,有时也称为与 BNP ($S[a,b]$) 问题相关的 Hausdorff 矩量问题.

非标准截断 Hausdorff 矩量问题 设 $h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}$ 给定,要求找出 $[a,b]$ 上的分布函数 $\tau_S(u)$ 满足:

$$h_k=\int_a^b u^k\mathrm{d}\tau_S(u),\quad k=0,1,\cdots,2n-2,$$
$$h_{2n-1}\geqslant\int_a^b u^{2n-1}\mathrm{d}\tau_S(u). \tag{1.5}$$

如果(1.5)式中的最后一个不等号改成等号,则该问题就变成标准截断 Hausdorff 矩量问题. 我们在文献[2]中已经讨论过带某种约束条件的标准截断 Hausdorff 矩量问题与 BNP ($N[a,b]$) 问题之间的关系. 且由[2]知:边界的插值点 $g_1,\cdots,g_\rho\in[a,b]$ 均不是 $\tau_S(u)$ 的质量分布点,即

$$\tau_S(\{g_\xi\})\equiv\tau_S(g_\xi)-\tau_S(g_\xi-0)=0,\quad \xi=1,\cdots,\rho. \tag{1.6}$$

对 $S[a,b]$ 类中函数的角导数性质,我们有平行于文献[2]引理 2.1—2.3 的相应结果.

引理 1.2 设 $t\in[a,b]$, $f_S(\lambda)\in S[a,b]$ 有积分表示(1.1),其中 $\sigma(u)=\sigma_{f_S}(u)$, $a(\lambda)$ 由(1.3)式给出. 则

(1) $f_S(\lambda)$ 在点 t 处有从 0 到 $2m-1(m\geqslant 1)$ 阶实角导数当且仅当

$$\int_a^b\frac{1}{(u-t)^{2m}}\mathrm{d}\sigma_{f_S}(u)<\infty.$$

此时 $f_S^{(k)}(t)=-\int_a^b\frac{k!}{(u-t)^k}\mathrm{d}\sigma_{f_S}(u)+(b-t)\int_a^b\frac{k!}{(u-t)^{k+1}}\mathrm{d}\sigma_{f_S}(u)$, $0\leqslant k\leqslant 2m-1$.

(2) $\lim\limits_{\lambda \to t} (\lambda - t) f_S(\lambda) = -(b-t)\sigma_{f_S}(\{t\})$.

(3) 如果 $\tau_S(u)$ 是$[a,b]$上的分布函数且有有界变差，则由下面定义的函数 $\varphi_S(\lambda)$：

$$\varphi_S(\lambda) = a(\lambda)\int_a^b \frac{1}{u-\lambda} \mathrm{d}\tau_S(u),$$

满足如下插值条件：

$$\frac{1}{k!}\varphi_S^{(k)}(\lambda_i) = 0, \quad i = 1,\cdots,\theta, k = 0,1,\cdots,\tau_i - 1,$$

$$\frac{1}{l!}\varphi_S^{(l)}(\alpha_j) = 0, \quad j = 1,\cdots,s, l = 0,1,\cdots,2\alpha_j - 1,$$

$$\frac{1}{q!}\varphi_S^{(q)}(\beta_p) = 0, \quad p = 1,\cdots,t, q = 0,1,\cdots,2\beta_p - 1,$$

$$\frac{1}{\eta!}\varphi_S^{(\eta)}(g_\xi) = 0, \quad \xi = 1,\cdots,\rho, \eta = 0,1,\cdots,2m_\xi - 2,$$

$$\frac{1}{(2m_\xi - 1)!}\varphi_S^{2m_\xi - 1}(g_\xi)$$

$$= -\prod_{i=1}^{\theta}|g_\xi - \lambda_i|^{2\tau_i}\prod_{j=1}^{s}(g_\xi - u_j)^{2\alpha_j}\prod_{p=1}^{t}(g_\xi - v_p)^{2\beta_p}\prod_{\xi \neq k}(g_\xi - g_k)^{2m_k}\tau_S(\{g_\xi\}), \xi = 1,\cdots,\rho.$$

2 BNP ($S[a,b]$) 问题的可解性准则

本节用 Hankel 向量方法建立 BNP ($S[a,b]$) 问题的解与相关的带约束条件的 Hausdorff 矩量问题解集之间的一一对应(这种对应类似于文[2]中的定理 4.1)，然后给出它们的可解性准则.

定理 2.1 BNP ($S[a,b]$) 问题可解当且仅当带约束条件(1.6)的非标准截断 Hausdorff 矩量问题(1.5)可解，并且当可解时，BNP ($S[a,b]$) 问题的解 $f_S(\lambda)$ 与带约束条件(1.6) 的非标准截断 Hausdorff 矩量问题的解 $\tau_S(u)(a \leqslant u \leqslant b)$ 之间存在一一对应关系：

$$f_S(\lambda) = \omega_S(\lambda) + a(\lambda)\int_a^b \frac{\mathrm{d}\tau_S(u)}{u-\lambda}, \quad \lambda \notin [a,b], \tag{2.1}$$

其中 $\omega_S(\lambda), a(\lambda)$ 分别如前定义. 具体地，如果 $f_S(\lambda) \in S[a,b]$ 是 BNP ($S[a,b]$) 问题的解且有积分表达式(1.1)，其中 $\sigma(u) = \sigma_{f_S}(u)$，那么由下式唯一确定的分布函数 $\tau_S(u)(a \leqslant u \leqslant b)$：

$\mathrm{d}\tau_S(u) =$

$$\begin{cases} \dfrac{b-u}{a(u)}\mathrm{d}\sigma_{f_S}(u), & u \notin \{g_1,\cdots,g_\rho\} \\ \dfrac{\omega_{\xi,2m_\xi-1} - \hat{\omega}_{\xi,2m_\xi-1}}{\prod\limits_{i=1}^{\theta}|g_\xi - \lambda_i|^{2\tau_i}\prod\limits_{j=1}^{s}(g_\xi - u_j)^{2\alpha_j}\prod\limits_{p=1}^{t}(g_\xi - v_p)^{2\beta_p}\prod\limits_{\xi \neq k}(g_\xi - g_k)^{2m_k}}, & u = g_\xi, \xi = 1,\cdots,\rho \end{cases} \tag{2.2}$$

有意义，其中 $\hat{\omega}_{\xi,2m_\xi-1} = \dfrac{1}{(2m_\xi - 1)!}f_S^{2m_\xi - 1}(g_\xi)$ 是实的，并且 $\tau_S(u)(a \leqslant u \leqslant b)$ 是相关的带约束条件 (1.6)的 Hausdorff 矩量问题(1.5)的解，并且满足

$$\lim_{\lambda \to \infty} f_S(\lambda) = \int_a^b \mathrm{d}\sigma_{f_S}(u) = h_{2n-1} - \int_a^b u^{2n-1}\mathrm{d}\tau_S(u). \tag{2.3}$$

反之，如果$\tau_S(u)(a \leqslant u \leqslant b)$是Hausdorff矩量问题(1.5)的解并满足(1.6)式，则由(2.1)所定义出的$f_S(\lambda)$是BNP $(S[a,b])$问题的解，满足$\lim_{\lambda\to\infty} f_S(\lambda) = h_{2n-1} - \int_a^b u^{2n-1} \mathrm{d}\tau_S(u)$，且有积分表示(1.1)，其中

$$\mathrm{d}\sigma(u) = \frac{a(u)}{b-u}\mathrm{d}\tau_S(u), a \leqslant u \leqslant b. \tag{2.4}$$

证明 首先假设BNP $(S[a,b])$插值问题是可解的，并设$f_S(\lambda) \in S[a,b]$是其一个解且有积分表示(1.1)，其中$\sigma(u) = \sigma_{f_S}(u)$. 由引理1.2知，$\int_a^b \frac{1}{(u-g_\xi)^{2m_\xi}}\mathrm{d}\sigma_{f_S}(u) < \infty, \xi = 1,\cdots,\rho$，因此，对$\xi = 1,\cdots,\rho$，有$\sigma_{f_S}(g_\xi) = 0$，因而$\int_a^b \frac{b-u}{a(u)}\mathrm{d}\sigma_{f_S}(u) < \infty$. 因为除了$u = g_\xi, \xi = 1,\cdots,\rho$以外，对$\forall\ u \in [a,b], a(u) > 0$. 定义函数$\tau_S(u)(a \leqslant u \leqslant b)$，并使之满足

$$\mathrm{d}\tau_S(u) = \begin{cases} \dfrac{b-u}{a(u)}\mathrm{d}\sigma_{f_S}(u), & u \notin \{g_1,\cdots,g_\rho\}, \\ 0, & u = g_1,\cdots,g_\rho. \end{cases} \tag{2.2'}$$

显然$\tau_S(u)$有意义，并且是$[a,b]$上具有有界变差的分布函数. 令$\tilde{\omega}(\lambda)$是一个次数至多是$2n-1$的实系数多项式，满足文[2]中插值条件(1.2a)－(1.2c)和

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\eta!}\frac{d^\eta}{d\lambda^\eta}f(\lambda)\Big|_{\lambda=g_\xi} = w_{\xi\eta}, \xi = 1,\cdots,\rho, \eta = 0,1,\cdots,2m_\xi - 2, \\ &\frac{1}{(2m_\xi - 1)!}\frac{d^{2m_\xi-1}}{d\lambda^{2m_\xi-1}}f(\lambda)\Big|_{\lambda=g_\xi} \leqslant \hat{\omega}_{\xi,2m_\xi-1}, \quad \xi = 1,\cdots,\rho, \end{aligned} \tag{1.2d''}$$

由$f_S(\lambda)$的积分表示(1.1)：$f_S(\lambda) = (b-\lambda)\int_a^b \frac{\mathrm{d}\sigma_{f_S}(u)}{u-\lambda}$，因而我们可把$f_S(\lambda)$重新改写成：

$$f_S(\lambda) = \hat{\omega}_S(\lambda) + a(\lambda)\int_a^b \frac{\mathrm{d}\tau_S(u)}{u-\lambda}, \tag{2.5}$$

其中$\hat{\omega}_S(\lambda) = \int_a^b \mathrm{d}\sigma_{f_S}(u) + \int_a^b \frac{a(u)-a(\lambda)}{u-\lambda}\mathrm{d}\tau_S(u)$是一个次数至多是$2n-1$的多项式. 由(2.5)和引理1.2，我们推出$\tilde{\omega}(\lambda) = \hat{\omega}_S(u)$. 令$\Psi(\lambda) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}\tau_S(u)}{u-\lambda}$，则$\Psi(\lambda) \in N[a,b]$，并且

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda) &= \frac{f_S(\lambda) - \tilde{\omega}(\lambda)}{a(\lambda)} = \frac{f_S(\lambda)}{a(\lambda)} - \frac{\hat{\omega}_S(\lambda)}{a(\lambda)} + \frac{\hat{\omega}_S(\lambda) - \tilde{\omega}(\lambda)}{a(\lambda)} \\ &= -\sum_{\xi=1}^{\rho}\frac{\tau_S(\{g_\xi\})}{\lambda - g_\xi} - \frac{h_0}{\lambda} - \frac{h_1}{\lambda^2} - \cdots - \frac{h_{2n-1} - \int_a^b \mathrm{d}\sigma_{f_S}(u)}{\lambda^{2n}} - \cdots \\ &= \frac{h_0 - \sum_{\xi=1}^{\rho}\tau_S(\{g_\xi\})}{\lambda} - \frac{h_1 - \sum_{\xi=1}^{\rho} g_\xi\,\tau_S(\{g_\xi\})}{\lambda^2} - \cdots - \\ &\quad \frac{h_{2n-1} - \int_a^b \mathrm{d}\sigma_{f_S}(u) - \sum_{\xi=1}^{\rho} g_\xi^{2n-1}\,\tau_S(\{g_\xi\})}{\lambda^{2n}} - \cdots. \end{aligned}$$

因而，由[3]定理1和(2.2)式，我们得到

$$\int_a^b u^k \mathrm{d}\tau_S(u) = h_k - \sum_{\xi=1}^{\rho} g_\xi^k \tau_S(\{g_\xi\}), \quad k = 0,1,\cdots,2n-2,$$

$$\int_a^b u^{2n-1} \mathrm{d}\tau_S(u) = h_{2n-1} - \int_a^b \mathrm{d}\sigma_{f_S}(u) - \sum_{\xi=1}^{\rho} g_\xi{}^{2n-1} \tau_S(\{g_\xi\}).$$

这表明,由(2.2)所给出的 $\tau_S(u)$ 是带约束条件(1.6)非标准截断 Hausdorff 矩量问题(1.5)的解,其中 $h_{2n-1} - \int_a^b u^{2n-1}\mathrm{d}\tau_S(u) = \lim\limits_{\lambda\to\infty} f_S(\lambda) = \int_a^b \mathrm{d}\sigma_{f_S}(u)$.

反之,假设 $\tau_S(u)(a \leqslant u \leqslant b)$ 是 Hausdorff 矩量问题(1.5)的解并使(1.6)式成立. 令 $\mathrm{d}\sigma(u) = \dfrac{a(u)}{b-u}\mathrm{d}\tau_S(u), a \leqslant u \leqslant b$,那么 $\mathrm{d}\sigma(u) \geqslant 0, a \leqslant u \leqslant b$. 从(2.1)确定出的 $f_S(\lambda)$ 满足满足文[2]中插值条件(1.2a)-(1.2c). 从引理1.2推出 $f_S(\lambda)$ 也满足插值条件(1.2d′). 下证 $f(\lambda) \in S[a,b]$. 设 $h_0, h_1, \cdots, h_{2n-1}$ 由(1.4)式定义给出,我们在次数不超过 $2n-1$ 的多项式空间 $\mathscr{H}$ 上定义一个线性泛函 $\mathscr{L}_u$,使得 $\mathscr{L}_u\{u^j\} = h_j, j = 0,1,\cdots,2n-1$. 于是我们可以推出

$$\mathscr{L}\mathrm{u}\ \ \{\frac{a(u)-a(\lambda)}{u-\lambda}\} = \omega_S(\lambda).$$

则

$$\begin{aligned} f_S(\lambda) &= \omega_S(\lambda) + a(\lambda)\int_a^b \frac{\mathrm{d}\tau_S(u)}{u-\lambda} \\ &= \mathscr{L}_u\{\frac{a(u)-a(\lambda)}{u-\lambda}\} - \int_a^b \frac{a(u)-a(\lambda)}{u-\lambda}\mathrm{d}\tau_S(u) - \int_a^b \frac{b-u}{u-\lambda}\mathrm{d}\sigma(u) \\ &= h_{2n-1} - \int_a^b u^{2n-1}\mathrm{d}\tau_S(u) - \int_a^b \mathrm{d}\sigma(u) + (b-\lambda)\int_a^b \frac{\mathrm{d}\sigma(u)}{u-\lambda} \\ &= (b-\lambda)\int_a^b \frac{\mathrm{d}\sigma(u)}{u-\lambda} \in S[a,b]. \end{aligned}$$

对 $f_S(\lambda)$ 取极限,有 $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f_S(\lambda) = \int_a^b \mathrm{d}\sigma(u)$. 再利用上面必要性证明中的一些计算和[3]定理1可得 $\int_a^b \mathrm{d}\sigma(u) = \lim\limits_{\lambda\to\infty} f_S(\lambda) = h_{2n-1} - \int_a^b u^{2n-1}\mathrm{d}\tau_S(u)$. □

下面我们通过 $N[a,b]$ 类与 $S[a,b]$ 类之间的联系,文[2]中已建立的BNP($N[a,b]$)问题与相关的带约束条件的标准截断Hausdorff矩量问题之间的关系以及BNP($S[a,b]$)问题与相关的带约束条件的非标准截断 Hausdorff 矩量问题之间的联系,来获得 BNP($S[a,b]$) 问题与相关的带约束条件(1.6)的 Hausdorff 矩量问题的可解性准则.

设 $a(\lambda)$ 和 $\omega_S(\lambda)$ 分别是某个 BNP($S[a,b]$) 问题的零化多项式和 Hermite 插值多项式,且设

$$\frac{\omega_S(\lambda)}{a(\lambda)} = \frac{h_0}{\lambda} + \frac{h_1}{\lambda^2} + \cdots + \frac{h_{2n-1}}{\lambda^{2n}} + \cdots, \tag{2.6}$$

是它的 Hankel 向量. 由定理2.1的商余关系式(2.1)知:在求该 BNP($S[a,b]$) 问题的解 $f_S(\lambda)$ 的过程中,$a(\lambda)$ 和 $\omega_S(\lambda)$ 起着关键作用:前者提供插值点数据,而后者提供相应插值值数据. 由引理1.1知,函数 $f_S(\lambda) \in S[a,b]$ 有积分表示(1.1)且是上述 BNP($S[a,b]$) 问题的一个解当且仅当 $\dfrac{1}{b-\lambda} f_S(\lambda) \in N[a,b]$ 必是该 BNP($S[a,b]$) 问题所派生出来的 BNP($N[a,b]$) 问题的

一个解，后者的插值点与前者相同，但插值值发生了变化，它由$\frac{1}{b-\lambda}\omega_S(\lambda)$确定. 由定理 2.1 的商余关系式(2.1)知，$f_S(\lambda)=\omega_S(\lambda)+a(\lambda)\int_a^b\frac{d\tau_S(u)}{u-\lambda}$，$\lambda\notin[a,b]$，这里 $d\tau_S(u)=\frac{(b-u)d\sigma(u)}{a(u)}$，且假定 $f_S(\lambda)$ 有积分表示(1.1)，把上式两边乘以$\frac{1}{b-\lambda}$，

$$\frac{1}{b-\lambda}f_S(\lambda)=\frac{\omega_S(\lambda)}{b-\lambda}+\frac{a(\lambda)}{b-\lambda}\int_a^b\frac{d\tau_S(u)}{u-\lambda}. \tag{2.7}$$

记$\frac{1}{b-\lambda}f_S(\lambda)\equiv f_N(\lambda)$，那么 $f_N(\lambda)\in N[a,b]$ 必是由 BNP($S[a,b]$) 问题所派生出来的某个 BNP($N[a,b]$) 问题的一个解. 设此 BNP($N[a,b]$) 问题的 Hankel 向量为 $\mathbf{h}_N=(h_0,h_1,\cdots,h_{n-1})$. 由[2] 定理 3.1 知，这里的 $h_j=\int_a^b u^j d\tau_N(u)$，$j=0,1,\cdots,n-1$，其中 $d\tau_N(u)=d\sigma(u)/a(u)\,(a\leqslant u\leqslant b)$. 我们把(2.7)式改写成形如[2]中定理 3.1 的商余关系式，

$$\begin{aligned}f_N(\lambda)&=\frac{\omega_S(\lambda)}{b-\lambda}+\frac{a(\lambda)}{b-\lambda}\int_a^b\frac{b-u}{a(u)}\frac{d\sigma(u)}{u-\lambda}\\&=\frac{\omega_S(\lambda)}{b-\lambda}-\frac{a(\lambda)}{b-\lambda}\int_a^b\frac{d\sigma(u)}{a(u)}+a(\lambda)\int_a^b\frac{d\sigma(u)}{a(u)(u-\lambda)}\\&=\frac{\omega_S(\lambda)}{b-\lambda}-\frac{a(\lambda)}{b-\lambda}\int_a^b d\tau_N(u)+a(\lambda)\int_a^b\frac{d\tau_N(u)}{u-\lambda}\\&=\omega_N(\lambda)+a(\lambda)\int_a^b\frac{d\tau_N(u)}{u-\lambda},\end{aligned}$$

其中

$$\omega_N(\lambda)\equiv\frac{\omega_S(\lambda)}{b-\lambda}-\frac{a(\lambda)}{b-\lambda}\int_a^b d\tau_N(u)=\frac{\omega_S(\lambda)-h_0a(\lambda)}{b-\lambda} \tag{2.8}$$

它是 BNP($N[a,b]$) 问题的 Hermite 插值多项式. 由(2.8)，我们有 $\omega_N(\lambda)/a(\lambda)$ 在无穷远点的 Laurent 展式：

$$\begin{aligned}\frac{\omega_N(\lambda)}{a(\lambda)}&=\frac{1}{b-\lambda}\Big[\frac{\omega_S(\lambda)}{a(\lambda)}-h_0\Big]\\&=-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{b}{\lambda}\Big)^k\Big[-h_0+\frac{h_0}{\lambda}+\frac{h_1}{\lambda^2}+\cdots+\frac{h_{2n-1}}{\lambda^{2n}}+\cdots\Big]\\&=\frac{h_0}{\lambda}+\frac{bh_0-h_0}{\lambda^2}+\frac{b^2h_0-bh_0-h_1}{\lambda^3}+\cdots+\frac{b^{2n-1}h_0-\sum_{k=0}^{2n-2}b^kh_{2n-2-k}}{\lambda^{2n}}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

由(2.9)，比较 BNP($N[a,b]$) 问题的两个 Hankel 向量，根据唯一性，我们有

$$\begin{cases}h_0=\dfrac{\omega_S(b)}{a(b)},\\ h_j=b^jh_0-\sum_{k=0}^{j-1}b^kh_{j-1-k}\quad(1\leqslant j\leqslant 2n-1).\end{cases} \tag{2.10}$$

其中 h_0 由以下办法获得：当 $\lambda=b$ 时，因 $a(b)>0$，从 $\omega_S(b)-h_0a(b)=0$ 得出 $h_0=\frac{\omega_S(b)}{a(b)}$. 这样，我们从 BNP($S[a,b]$) 问题的 Hankel 向量 $\mathbf{h}_S$ 构造出 BNP($N[a,b]$) 问题的 Hankel 向量

$$\mathbf{h}_N=\{h_0,bh_0-h_0,b^2h_0-bh_0-h_1,\cdots,b^{2n-1}h_0-\sum_{k=0}^{2n-2}b^kh_{n-2-k}\}. \tag{2.11}$$

我们也得到了两个相关矩量问题解 $\tau_S(u)$ 与 $\tau_N(u)$ 之间的关系式：

$$\mathrm{d}\tau_N(u)=\frac{\mathrm{d}\sigma(u)}{a(u)}=\frac{(b-u)\mathrm{d}\sigma(u)}{(b-u)a(u)}=\frac{\mathrm{d}\tau_S(u)}{b-u}. \tag{2.12}$$

同时，为了获得 BNP($S[a,b]$) 问题的可解条件，我们计算出：$(bh_{i+j}-h_{i+j+1})_{i,j=0}^{n-1}\geqslant 0$ 当且仅当 $(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}\geqslant 0$；$(h_{i+j+1}-ah_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}\geqslant 0$ 当且仅当 $((b-a)b^{i+j}h_0-\sum_{l=0}^{i+j-1}(b-a)b^l h_{i+j-1-l}-h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}\geqslant 0$. 并且

$$L_{y\bar{y}}(\omega_S(\lambda))=W_y(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}W_y^*,$$

$$L_{y\bar{y}}(\frac{\lambda-a}{b-\lambda}\omega_S(\lambda))=W_y((b-a)b^{i+j}h_0-\sum_{l=0}^{i+j-1}(b-a)b^l h_{i+j-1-l}-h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}W_y^*,$$

其中 $L_{y\bar{y}}(\omega_S(\lambda))$ 是由 $\omega_S(\lambda)$ 与 $y,\bar{y}$ 生成的 BNP($S[a,b]$) 问题的广义块 Loewner 矩阵，$W_y\in\mathbf{C}^{(m+1)\times(m+1)}$ 与向量 y 分别由文[2]中(3.7)与(3.5)式确定.

因此，由上分析和[2]之定理 4.1，我们得到 BNP($S[a,b]$) 问题与相关的带约束条件 Hausdorff 矩量问题可解性准则.

定理 2.2 设 $(h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1})$ 是某个 BNP($S[a,b]$) 问题的 Hankel 向量，$a(\lambda)$ 和 $\omega_S(\lambda)$ 分别是它的零化多项式和 Hermite 插值多项式，那么向量(2.6)是该 BNP($S[a,b]$) 问题所派生的 BNP($N[a,b]$) 问题的 Hankel 向量，且以下各条款等价：

(1) BNP($S[a,b]$) 问题可解；

(2) 以 $\{h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}\}$ 为矩量序列，且满足约束条件(1.6)的非标准截断 Hausdorff 矩量问题(1.5)可解；

(3) 序列 $\{h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}\}$ 在 $[a,b]$ 上是非负的，且矩量问题(1.5)有解并满足约束条件(1.6)；

(4) $(bh_{i+j}-h_{i+j+1})_{i,j=0}^{n-1}\geqslant 0$，$(h_{i+j+1}-ah_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}\geqslant 0$，用矩量问题(1.5)有解并满足约束条件(1.6)；

(5) $(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}\geqslant 0$，$((b-a)b^{i+j}h_0-\sum_{k=0}^{i+j-1}(b-a)b^l h_{i+j-1-l}-h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}\geqslant 0$，且矩量问题(1.5)有解并满足约束条件(1.6)；

(6) $L_{y\bar{y}}(\omega_S(\lambda))\geqslant 0$，$L_{y\bar{y}}(\frac{\lambda-a}{b-\lambda}\omega_S(\lambda))\geqslant 0$，且矩量问题(1.5)有解并满足约束条件(1.6)；

(7) 由 BNP($S[a,b]$) 问题所派生的 BNP($N[a,b]$) 问题可解.

3 BNP($S[a,b]$) 问题的解

先考虑多解情形. 设 $(h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1})$ 是某个 BNP($S[a,b]$) 问题的 Hankel 向量，那么由(2.11)式确定的 $\mathbf{h}_N=(h_0,bh_0-h_0,b^2h_0-bh_0-h_1,\cdots,b^{2n-1}h_0-\sum_{k=0}^{2n-2}b^k h_{2n-2-k})$ 是该 BNP($S[a,b]$) 问题所派生的 BNP($N[a,b]$) 问题的 Hankel 向量，其中 $h_0=\omega_S(b)/a(b)$.

引入正交多项式序列：

$$\widetilde{D}_0(t)=\frac{1}{\sqrt{h_0}},\widetilde{D}_l(t)=\frac{1}{\sqrt{\triangle_l\triangle_{l-1}}}\det\|h_v h_{v+1}\cdots h_{v+l-1}t^v\|_{v=0}^{k},\quad l=1,\cdots,n,\tag{3.1}$$

其中 $\triangle_l=\det(h_{i+j})_{i,j=0}^{l}>0,l=1,\cdots,n$($h_{2n}$ 以一种非本质的方式进入表达式中,见[1,2,4]).再引入共轭多项式序列:

$$\widetilde{C}_l(\lambda)=\int_a^b\frac{\widetilde{D}_l(t)-\widetilde{D}_l(\lambda)}{(b-t)(t-\lambda)}\mathrm{d}\tau_S(t),\quad l=1,2,\cdots,n.\tag{3.2}$$

按[1]的方法引入拟正交多项式 $\underset{\sim}{Q}(\lambda),\widetilde{Q}(\lambda),\underset{\sim}{P}(\lambda),\widetilde{P}(\lambda)$ 分别如下:

$$\underset{\sim}{Q}(\lambda)=D_n(\lambda),\widetilde{Q}(\lambda)=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix}\widetilde{D}_{n+1}(\lambda)&\widetilde{D}_n(\lambda)&\widetilde{D}_{n-1}(\lambda)\\\widetilde{D}_{n+1}(a)&\widetilde{D}_n(a)&\widetilde{D}_{n-1}(a)\\\widetilde{D}_{n+1}(b)&\widetilde{D}_n(b)&\widetilde{D}_{n-1}(b)\end{vmatrix},\tag{3.3}$$

$$\underset{\sim}{P}(\lambda)=C_n(\lambda),\widetilde{P}(\lambda)=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix}\widetilde{C}_{n+1}(\lambda)&\widetilde{C}_n(\lambda)&\widetilde{C}_{n-1}(\lambda)\\\widetilde{D}_{n+1}(a)&\widetilde{D}_n(a)&\widetilde{D}_{n-1}(a)\\\widetilde{D}_{n+1}(b)&\widetilde{D}_n(b)&\widetilde{D}_{n-1}(b)\end{vmatrix}.\tag{3.4}$$

由[3]引理2知,如果矩量序列 $\{h_0,bh_0-h_0,b^2h_0-bh_0-h_1,\cdots,b^{2n-1}h_0-\sum_{k=0}^{2n-2}b^kh_{2n-2-k}\}$ 在 $[a,b]$ 上是严格正的,且 $\tau_N(u)\in V[a,b;\mathbf{h}_N]$(该记号涵参文献[2]),而 $r(\lambda)\in N[a,b]\cup\{\infty\}$ 为对应的参数函数,那么对某个 $g_\xi(\xi=1,\cdots,\rho)$ 来说,$\tau_N(\{g_\xi\})=0$ 相当于 $\underset{\sim}{Q}(g_\xi)-r(g_\xi)\widetilde{Q}(g_\xi)\neq0$. 由(2.12)式,我们可以等价地说,$\tau_S(\{g_\xi\})=0$ 相当于 $\underset{\sim}{Q}(g_\xi)-r(g_\xi)\widetilde{Q}(g_\xi)\neq0$. 因此,边界插值点 $g_1,\cdots,g_\rho$ 均不是 $\tau_S(u)$ 的质量分布点当且仅当 $\underset{\sim}{Q}(g_\xi)-r(g_\xi)\widetilde{Q}(g_\xi)\neq0$. 于是,我们得出下面带约束条件(1.6)的 Hausdorff 矩量问题解的结果.

定理 3.1 设 Hausdorff 矩量问题(1.5)的矩量为 $h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}$,如果两个 Hankel 矩阵 $(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$ 与 $((b-a)b^{i+j}h_0-\sum_{l=0}^{i+j-1}(b-a)b^lh_{i+j-1-l}-h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$ 都是 Hermite 正定的,那么带约束条件(1.6)的非标准截断 Hausdorff 矩量问题(1.5)可解,它的通解 $\tau_S(u)$ 可参数化表示为:

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}\tau_S(u)}{\lambda-u}=(b-\lambda)\frac{\underset{\sim}{P}(\lambda)-r(\lambda)\widetilde{P}(\lambda)}{\underset{\sim}{Q}(\lambda)-r(\lambda)\widetilde{Q}(\lambda)},\quad\lambda\notin[a,b],\tag{3.5}$$

其中 $\underset{\sim}{Q}(\lambda),\widetilde{Q}(\lambda),\underset{\sim}{P}(\lambda)$ 与 $\widetilde{P}(\lambda)$ 由(3.3)与(3.4)所给,参数 $r(\lambda)\in N[a,b]\cup\{\infty\}$ 按如下方式确定:或者(1) $r(\lambda)\equiv\infty$ 从而 $\widetilde{Q}(g_\xi)\neq0,\xi=1,\cdots,\rho$,或者(2) $r(\lambda)\in N[a,b]$,它有积分表示 $r(\lambda)=\int_a^b(u-\lambda)^{-1}d\sigma_r(u)$,并满足:当 $\widetilde{Q}(g_\xi)=0$ 时,$\sigma_r(\{g_\xi\})=0$;当 $\widetilde{Q}(g_\xi)\neq0$ 时,下述条件之一成立:

(i) $r(\lambda)$ 在 g_ξ 处有非切极限 $r(g_\xi)$ 且 $\underset{\sim}{Q}(g_\xi)-r(g_\xi)\widetilde{Q}(g_\xi)\neq0$;

(ii) $\int_a^b \frac{1}{(u-g_\xi)^2}\mathrm{d}\sigma_r(u) = +\infty.$

证明 利用(2.10)式,我们从带约束条件(1.6)的非标准截断 Hausdorff 矩量 $h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}$ 可以确定出一组新序列 $h_0, bh_0-h_0, b^2h_0-bh_0-h_1,\cdots,b^{2n-1}h_0-\sum_{k=0}^{2n-2}b^kh_{2n-2-k}$,这一组新序列可以作为$[a,b]$上的标准截断 Hausdorff 矩量序列且带约束条件(1.6).并且,由第二节分析知道:两个Hankel矩阵$(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$与$((b-a)b^{i+j}h_0-\sum_{l=0}^{i+j-1}(b-a)b^lh_{i+j-1-l}-h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$是 Hermite 非负定的当且仅当两个 Hankel 矩阵$(h_{i+k+1}-ah_{i+k})_{i,k=0}^{n-1}$与$(bh_{i+k}-h_{i+k+1})_{i,k=0}^{n-1}$是 Hermite 非负定的,再利用(2.12)式,带约束条件(1.6)的非标准截断 Hausdörff 矩量问题(1.5)就转化为带相似约束条件(1.6)的标准截断 Hausdorff 矩量问题,即[2]定理4.1的情形.因而,余下模拟可证. □

由定理2.1,2.2和3.1,我们由带约束条件(1.6)的相关的Hausdorff 矩量问题(1.5)的解给出 BNP($S[a,b]$)问题多解时通解的参数化描述.

定理3.2 BNP($S[a,b]$)问题的Hankel向量为$h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}$,又设$h_0=\omega_S(b)/a(b)$.如果两个 Hankel 矩阵$(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$与$((b-a)b^{i+j}h_0-\sum_{l=0}^{i+j-1}(b-a)b^lh_{i+j-1-l}-h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$都是 Hermite 正定的,那么 BNP($S[a,b]$)问题的通解$F_S(\lambda)$可以用线性分式变换的方式表达如下:

$$F_S(\lambda)=\omega_S(\lambda)-\frac{\omega_S(b)}{a(b)}a(\lambda)-(b-\lambda)a(\lambda)\frac{\underset{\sim}{\widetilde{P}}(\lambda)-r(\lambda)\widetilde{\underset{\sim}{P}}(\lambda)}{\underset{\sim}{\widetilde{Q}}(\lambda)-r(\lambda)\widetilde{\underset{\sim}{Q}}(\lambda)},$$

其中$\underset{\sim}{\widetilde{Q}}(\lambda)$,$\widetilde{\underset{\sim}{Q}}(\lambda)$,$\underset{\sim}{\widetilde{P}}(\lambda)$与$\widetilde{\underset{\sim}{Q}}(\lambda)$由(3.3)与(3.4)所给,$\omega_S(\lambda)$,$a(\lambda)$如前,$r(\lambda)$遍历$N[a,b]\cup\{\infty\}$,其取法如定理3.1所述.

最后考虑唯一解情形.设 BNP($S[a,b]$)问题的 Hankel 向量为$\mathbf{h}_S=(h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1})$,且假定在$[a,b]$上是奇异非负的,那么由定理2.2知,以$(h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1})$为 Hankel 向量的 BNP($S[a,b]$)问题和以$\{h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}\}$为矩量的带约束条件(1.6)的非标准截断 Hausdorff 矩量问题均是确定的.分两种情况讨论:

当$h_0=0$时,其中h_0由(2.10)给出,那么以$(h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1})$为Hankel向量的BNP($S[a,b]$)问题只有唯一解$\omega_S(\lambda)-\frac{\omega_S(b)}{a(b)}a(\lambda)$.因此,以$\{h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}\}$为带约束条件(1.6)的非标准截断 Hausdorff 矩量问题只有平凡的零解.

在$h_0>0$的情况下,我们有:

定理3.3 设$(h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1})$是一BNP($S[a,b]$)问题的Hankel向量,令$h_{i+j}$由(2.10)所给,设$r=\mathrm{rank}(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$.假设序列(2.11)在$[a,b]$上是奇异非负的且满足$h_0=\omega_S(b)/a(b)>0$,那么

(1) 以$\{h_0,h_1,\cdots,h_{2n-1}\}$作为矩量的$[a,b]$上的带约束条件(1.6)的非标准截断 Hausdorff 矩量问题只有唯一解$\tau_S(u)(a\leqslant u\leqslant b)$,且$\tau_S(u)$由$\int_a^b\frac{\mathrm{d}\tau_S(u)}{\lambda-u}=\frac{(b-\lambda)\check{C}_r(\lambda)}{\tilde{D}_r(\lambda)}$唯一

确定出，其中 $\widetilde{C}_r(\lambda)$，$\widetilde{D}_r(\lambda)$ 由(3.2)和(3.1)给出，并且 $\widetilde{D}_r(g_\xi)\neq 0, r=\operatorname{rank}(h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}, \xi=1, \cdots, \rho$.

(2) BNP($S[a,b]$)问题有唯一解 $F_S(\lambda)=\omega_S(\lambda)-\dfrac{\omega_S(b)}{a(b)}a(\lambda)-\dfrac{(b-\lambda)a(\lambda)\widetilde{C}_r(\lambda)}{\widetilde{D}_r(\lambda)}$.

参考文献：

[1] KREIN M G, NUDELMAN A A. *The Markov Moment Problem and Extremal Problems* [M]. Transl. Math. Monographs 50, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.

[2] 吴化璋. $N[a,b]$类中边界 Nevanlinna-Pick 插值 [J]. 数学研究与评论, 2004, **24**(1): 107−118.
WU Hua-zhang. *The boundary Nevanlinna-Pick interpolation in the class* $N[a,b]$ [J]. Jour. Math. Res. Exposition, 2004, **24**(1): 107−118.

[3] 吴化璋, 陈公宁. $N[a,b]$类中 Nevanlinna-Pick 插值与 Hausdorff 矩量问题 [J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2002, **38**(3): 316−323.
WU Hua-zhang, CHEN Gong-ning. *The Nevanlinna-Pick interpolation in the class* $N[a,b]$ *and the Hausdorff moment problem* [J]. Journal of Beijing Normal University (Nat. Sci.), 2002, **38**(3): 316−323. (in Chinese)

[4] KREIN M G. *The description of all solutions of the truncated power moment problem and some problems of operator theory* [J]. Mat. Issled., 1967, **2**: 114 − 132; English transl., Amer. Math. Soc. Transl., 1970, **95**(2): 219−234.

The Boundary Nevanlinna-Pick Interpolation In the Class $S[a,b]$

WU Hua-zhang[1,2]

(1. Dept. of Math., Anhui University, Hefei 230049, China;

2. Dept. of Math., University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: We pursue our previous investigations of establishing a one-to-one correspondence between the solutions to the BNP ($N[a,b]$) problem and the solutions to the Hausdorff monment problem with a certain constraint via the so-called Hankel vector approach. By the connection between the class $N[a,b]$ and the class $S[a,b]$, the author obtains the solvability criteria and the parametrized descriptions of the BNP ($S[a,b]$) problem in terms of that of the BNP ($N[a,b]$) problem.

Key words: $S[a,b]$ class; BNP ($S[a,b]$) problem; BNP ($N[a,b]$) problem; Hausdorff moment problem.