第 24 卷第 4 期
2004年11月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 24 No. 4
Nov. 2004

随机效应模型中方差分量渐近最优的经验 Bayes 估计*

韦来生， 王立春
(中国科学技术大学统计与金融系，安徽 合肥 230026)

摘 要：本文在加权二次损失下导出了双向分类随机效应模型中方差分量的 Bayes 估计，并利用多元密度函数及其混合偏导数核估计的方法构造了方差分量的经验 Bayes (EB)估计. 在适当的条件下证明了 EB 估计的渐近最优性，给出了模型的特例和推广. 最后，举出一个满足定理条件的例子.

关键词：随机效应模型；方差分量；Bayes 估计；经验 Bayes 估计；渐近最优性
分类号：AMS(2000) 62C12,62F12/CLC number：O212.1
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2004)04-0653-12

1 引 言

方差分量模型在生存分析，遗传学，计量经济学和心理学研究等方面有广泛的应用背景. 随机效应模型是方差分量模型的重要类型. 现有文献中对方差分量模型中的参数估计问题的研究已很多了. 一些有用的估计相继被提出，如方差分析(ANOVA)法，最小范数二次无偏估计(MINQUE)和极大似然估计(MLE)方法(参见 Rao[1]，Hartley 和 Rao[2]等). 但这些估计都存在这样或那样的缺点，如方差分量是非负的，而 ANOVA 估计和 MINQUE 估计可取负值，这就不甚合理；MLE 估计无显式表达式，要用迭代方法求解. 正因为存在这些问题，方差分量的估计成为近若干年来统计学界研究的热点问题之一. 关于方差分量的 Bayes 和经验 Bayes (EB) 估计问题，Kleffe[3]给出了方差分量的 Bayes 二次估计(BQE)，Mostafa 和 Ahmad[4]研究了正态线性模型下方差分量的经验 Bayes 二次估计(EBQE)，并且用 Monte Carlo 方法，通过数据模拟得到了 EBQE 相对于最小方差无偏估计(MVUE)的优良性. 与以上方法不同，本文将采用非参数经验 Bayes (NPEB)方法构造方差分量的经验 Bayes (EB)估计并研究其大样本性质.

EB 方法首先是由 Robbins[5,6]引入的，这方面的研究结果主要是关于指数族的. 如 Singh[7]，Chen[8]，Singh 和 Wei[9]等. 将 EB 方法用于线性模型中的参数估计问题，主要结果是

---

* **收稿日期**：2002-10-14
基金项目：国家自然科学基金(19971085)和国家教委博士点基金及中科院创新基金资助项目.
作者简介：韦来生(1944-)，男，教授.

关于回归系数的，例如 Singh[10]，Wei 和 Zhang[11]及 Wei[12]等考虑了线性模型中回归系数及误差方差的EB 估计问题，但这些结果都是关于固定效应模型的.本文将考虑当方差分量具有先验信息时随机效应模型中方差分量的 Bayes 和经验 Bayes 估计问题.

考虑如下的双向分类随机效应模型：

$$Y_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_{ij}+e_{ijk},\quad i=1,\cdots,a;\quad j=1,\cdots,b;\quad k=1,\cdots,l,\tag{1.1}$$

此处 $a\geqslant 2,b\geqslant 2,l\geqslant 2$.(1.1)式的矩阵形式为：

$$Y_{m\times 1}=\mu\mathbf{1}_m+U_1\alpha+U_2\beta+U_3\gamma+e_{m\times 1},\tag{1.2}$$

这里 $m=abl;Y=(Y_{111},\cdots,Y_{11l};\cdots;Y_{ab1},\cdots,Y_{abl})^{\tau},e=(e_{111},\cdots,e_{11l};\cdots;e_{ab1},\cdots,e_{abl})^{\tau},\mathbf{1}_m=(1,\cdots,1)^{\tau};U_1=(I_a\otimes\mathbf{1}_{bl}),U_2=(\mathbf{1}_a\times I_b\otimes\mathbf{1}_l),U_3=(I_{ab}\otimes\mathbf{1}_l)$，符号 $\otimes$ 表示 Kronecker 乘积；μ 为总平均，为固定效应；$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_a)^{\tau},\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_b)^{\tau}$，以及 $\gamma=(\gamma_{11},\cdots,\gamma_{1b};\cdots;\gamma_{a1},\cdots,\gamma_{ab})^{\tau}$，均为随机效应向量.本模型中，我们假定 $\alpha\sim N_a(0,\sigma_\alpha^2I),\beta\sim N_b(0,\sigma_\beta^2I),\gamma\sim N_{ab}(0,\sigma_\gamma^2I),e\sim N_m(0,\sigma_e^2I)$，且它们之间都相互独立.易见有

$$\mathrm{Cov}(Y)=\sigma_\alpha^2U_1U_1^{\tau}+\sigma_\beta^2U_2U_2^{\tau}+\sigma_\gamma^2U_3U_3^{\tau}+\sigma_e^2I,\tag{1.3}$$

其中 σ_α^2，$\sigma_\beta^2,\sigma_\gamma^2$，$\sigma_e^2$称为方差分量.

定义下列统计量：

$$\begin{aligned}
T_1(Y)&=\sum_{i=1}^a\sum_{j=1}^b\sum_{k=1}^l(\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{...})^2,\quad T_2(Y)=\sum_{i=1}^a\sum_{j=1}^b\sum_{k=1}^l(\overline{Y}_{.j.}-\overline{Y}_{...})^2,\\
T_3(Y)&=\sum_{i=1}^a\sum_{j=1}^b\sum_{k=1}^l(\overline{Y}_{ij.}-\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{.j.}+\overline{Y}_{...})^2,\\
T_4(Y)&=\sum_{i=1}^a\sum_{j=1}^b\sum_{k=1}^l(Y_{ijk}-\overline{Y}_{ij.})^2,
\end{aligned}\tag{1.4}$$

其中 $\overline{Y}_{...}=\sum_{i=1}^a\sum_{j=1}^b\sum_{k=1}^lY_{ijk}/m,\overline{Y}_{ij.}=\sum_{k=1}^lY_{ijk}/l,\overline{Y}_{i..}=\sum_{j=1}^b\sum_{k=1}^lY_{ijk}/(bl),\overline{Y}_{.j.}=\sum_{i=1}^a\sum_{k=1}^lY_{ijk}/(al)$.

注意如上的 $T_i(Y)$ 皆可表为 Y 的二次型，即 $T_i(Y)=Y^{\tau}A_iY,i=\overline{1,4}$(即 $i=1,2,3,4$).由文献[13]中§9.2易见有下列结论：

(1) $T_1(Y)$，$T_2(Y)$，$T_3(Y)$，$T_4(Y)$是相互独立的；

(2) $T_i(Y)/a_i^2\sim\chi^2_{m_i}$，$i=\overline{1,4}$，其中

$$\begin{aligned}
&a_1^2=bl\sigma_\alpha^2+l\sigma_\gamma^2+\sigma_e^2,\quad m_1=a-1,\\
&a_2^2=al\sigma_\beta^2+l\sigma_\gamma^2+\sigma_e^2,\quad m_2=b-1,\\
&a_3^2=l\sigma_\gamma^2+\sigma_e^2,\quad m_3=(a-1)(b-1),\\
&a_4^2=\sigma_e^2,\quad m_4=ab(l-1);
\end{aligned}\tag{1.5}$$

(3) $\overline{Y}_{...}$和 $T_1(Y),T_2(Y),T_3(Y),T_4(Y)$为模型(1.2)的充分完全统计量.

记 $T\stackrel{\triangle}{=}(T_1(Y),T_2(Y),T_3(Y),T_4(Y))^{\tau},\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)^{\tau}\stackrel{\triangle}{=}(\sigma_\alpha^2,\sigma_\beta^2,\sigma_\gamma^2,\sigma_e^2)^{\tau}$，则给定 θ 时 T 的条件分布为：

$$f(t|\theta)=\prod_{i=1}^4f(t_i|\theta_i)=\prod_{i=1}^4\Big[\frac{a_i^2)^{-m_i/2}t_i^{m_i/2-1}}{2^{m_i/2}\Gamma(m_i/2)}\exp\{-\frac{t_i}{2a_i^2}\}\Big]$$

$$\stackrel{\triangle}{=} c_0 u(t) c(\theta) \exp\{-\sum_{i=1}^{4} \frac{t_i}{2a_i^2}\}, \tag{1.6}$$

其中 $c_0 = [\prod_{i=1}^{4} 2^{m_i/2}\Gamma(m_i/2)]^{-1}$，$u(t) = \prod_{i=1}^{4} t_i^{m_i/2-1}$，$c(\theta) = \prod_{i=1}^{4}(a_i^2)^{-m_i/2}$，$T$ 的样本空间

$$\mathscr{T} = R_4^+ = \{t = (t_1,t_2,t_3,t_4)^\tau : 0 < t_i < \infty,\ i = \overline{1,4}\} \stackrel{\triangle}{=} (0,\infty)^4.$$

假定 $\theta = (\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)^\tau$ 的先验分布 $G(\theta)$ 未知，且属于下列先验分布族：

$$\mathscr{F} = \{G(\theta):\ E[c(\theta)] < \infty,\ E[c(\theta)(\theta_4)^{-2}] < \infty\}, \tag{1.7}$$

此处，参数空间 $\Theta = \{\theta = (\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)^\tau : \theta_i > 0, i = \overline{1,4}\}$.

从而 T 的边缘密度为：

$$f(t) = \int_\Theta f(t|\theta)\mathrm{d}G(\theta) \stackrel{\triangle}{=} u(t)p(t), \tag{1.8}$$

其中

$$p(t) = c_0\int_\Theta c(\theta)\exp\{-\sum_{i=1}^{4}\frac{t_i}{2a_i^2}\}\mathrm{d}G(\theta). \tag{1.9}$$

我们采用如下的加权二次损失函数：

$$L(\theta,d) = \sum_{i=1}^{4}\frac{(d_i-\theta_i)^2}{w_i(\theta)} \stackrel{\triangle}{=} \|\Lambda^{-1/2}(\theta)(d-\theta)\|^2, \tag{1.10}$$

此处，$\Lambda(\theta) \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{diag}(w_1(\theta),w_2(\theta),w_3(\theta),w_4(\theta))$，其中 $w_1(\theta) = a_1^2a_3^2, w_2(\theta) = a_2^2a_3^2, w_3(\theta) = a_3^2a_4^2, w_4(\theta) = a_4^4$；$d = (d_1,d_2,d_3,d_4)^\tau$ 为所采取的行动，$d \in \mathscr{D}$，$\mathscr{D}$ 为行动空间. 由于方差分量为刻度参数，上述加权二次损失函数具有不变性；取上述损失函数的另一个理由是导出的 Bayes 估计易于用非参数方法获得其 EB 估计.

在损失函数(1.10)下，可知 $\theta_i (i = \overline{1,4})$ 的 Bayes 估计可按下列公式求得：$\hat{\theta}_{iB} = E(\theta_i w_i^{-1}(\theta)|T)/E(w_i^{-1}(\theta)|T), i = \overline{1,4}$. 它们分别是：

$$\hat{\theta}_{1B} = \frac{p_{t_1}^{(1)}(t) - p_{t_3}^{(1)}(t)}{2bl\,p_{t_1t_3}^{(2)}(t)},\quad \hat{\theta}_{2B} = \frac{p_{t_2}^{(1)}(t) - p_{t_3}^{(1)}(t)}{2al\,p_{t_2t_3}^{(2)}(t)}$$

$$\hat{\theta}_{3B} = \frac{p_{t_3}^{(1)}(t) - p_{t_4}^{(1)}(t)}{2l\,p_{t_3t_4}^{(2)}(t)},\quad \hat{\theta}_{4B} = \frac{-p_{t_4}^{(1)}(t)}{2p_{t_4t_4}^{(2)}(t)}, \tag{1.11}$$

其中 $p_{t_i}^{(1)}(t)$和 $p_{t_it_j}^{(2)}(t)$分别为 $p(t)$的一阶和二阶混合偏导数，它们的一般形式是

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t_1^{r_1}\cdots\partial t_4^{r_4}} \stackrel{\triangle}{=} p^{(r)}(r_1,\cdots,r_4;t) = p^{(r)}(t)$$

$$= c_0\int_\Theta(-1)^r[\prod_{i=1}^{4}(2a_i^2)^{-r_i}]c(\theta)\exp\{\sum_{i=1}^{4}\frac{t_i}{2a_i^2}\}\mathrm{d}G(\theta), \tag{1.12}$$

此处 $r = \sum_{i=1}^{4} r_i, r_i \geqslant 0 (i = \overline{1,4})$. 特别当 r=1,2 时有

$$p_{t_i}^{(1)}(t) = \frac{\partial p(t)}{\partial t_i} = c_0\int_\Theta(-\frac{1}{2a_i^2})c(\theta)\exp(-\sum_{i=1}^{4}\frac{t_i}{2a_i^2})\mathrm{d}G(\theta),\quad i = \overline{1,4},$$

$$p_{t_it_j}^{(2)}(t) = \frac{\partial^2 p(t)}{\partial t_i\,\partial t_j} = c_0\int_\Theta\frac{1}{4a_i^2a_j^2}c(\theta)\exp(-\sum_{i=1}^{4}\frac{t_i}{2a_i^2})\mathrm{d}G(\theta),\quad \text{对所有}(i,j). \tag{1.13}$$

于是，由(1.11)可知 θ 的 Bayes 估计为

$$\hat{\theta}_B = (\hat{\theta}_{1B},\ \hat{\theta}_{2B},\ \hat{\theta}_{3B},\ \hat{\theta}_{4B})^{\tau}, \tag{1.14}$$

其 Bayes 风险是

$$\begin{aligned} R(G) &= \min_{\varphi} R(\varphi, G) = R(\hat{\theta}_B,\ G) = E_{(T,\theta)} \| \Lambda^{-1/2}(\theta)(\hat{\theta}_B - \theta) \|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{4} E_{(T,\theta)}\Big[\frac{(\hat{\theta}_{iB} - \theta_i)^2}{w_i(\theta)}\Big]. \end{aligned} \tag{1.15}$$

本文的第二节，我们利用多元密度函数及其混合偏导数的核估计方法构造方差分量 θ_i($i=\overline{1,4}$)的 EB 估计. 第三节考虑 EB 估计的渐近最优性，给出模型的特例和推广. 第四节给出一个例子，说明满足定理条件的先验分布是存在的.

2 经验 Bayes 估计

注意到下列事实：在(1.15)式中若 $G(\theta)$ 是已知的，当 $\varphi = \hat{\theta}_B$ 时，它的 Bayes 风险 $R(G)$ 达到最小；在这个意义下 $\hat{\theta}_B$ 是一个良好的估计. 但在一些实际问题中，参数 θ 的先验信息积累不是足够多，不足以形成先验分布，即先验分布常常是未知的. 此时，若对先验分布作了与实际情况不相符的人为假定时，所得 Bayes 解的性质会很差. EB 方法就是针对这一问题而提出的. 现简述如下：若先验分布 $\mathrm{d}G(\theta)$ 虽然未知，但在历史上曾经处理过有关 θ 的一些推断问题. 在这些问题中，先验分布 $\mathrm{d}G(\theta)$ 保持不变，则历史资料中将包含有这个先验分布 $\mathrm{d}G(\theta)$ 的信息. EB 方法要旨在于利用这种信息来对先验分布 $\mathrm{d}G(\theta)$ 作出直接或间接的估计. 随着历史资料的积累，这种估计愈来愈准确，而所得的解也愈来愈接近在先验分布 $\mathrm{d}G(\theta)$ 已知时所算出的 Bayes 解(参看[14]第 2.3 节和[10]). 将 EB 方法应用于本文，由(1.11)式易见方差分量的 Bayes 估计 $\hat{\theta}_B$ 可表为 $p_{t_i}^{(1)}(t)$ 和 $p_{t_it_j}^{(2)}(t)$ 的函数. 但是，由于 $G(\theta)$ 是未知的，故 $\hat{\theta}_B$ 也是未知的，因此无实用价值. 由(1.13)可知 $p_{t_i}^{(1)}(t)$ 和 $p_{t_it_j}^{(2)}(t)$ 与未知的先验分布 $\mathrm{d}G(\theta)$ 有关，因此用历史样本对 $p_{t_i}^{(1)}(t)$ 和 $p_{t_it_j}^{(2)}(t)$ 作出的估计实质上是对先验分布 $\mathrm{d}G(\theta)$ 的一种间接的估计. 本节以下就是介绍如何基于历史样本利用多元密度函数及其混合偏导数核估计的方法对 $p_{t_i}^{(1)}(t)$ 和 $p_{t_it_j}^{(2)}(t)$ 作出估计，从而获得具有下列优良性的方差分量的EB估计：当历史样本足够多时，它的风险可任意接近最小的 Bayes 风险 $R(G)$.

令 $Y^{(j)} = (Y_{111}^{(j)},\cdots,Y_{11l}^{(j)};\cdots;Y_{ab1}^{(j)},\cdots,Y_{abl}^{(j)})^{\tau}, \theta^{(j)} = (\theta_1^{(j)},\theta_2^{(j)},\theta_3^{(j)},\theta_4^{(j)}), j = 1,2,\cdots,n$. 在 EB 问题的结构中，我们假定$(Y^{(1)},\theta^{(1)})$，$(Y^{(2)},\theta^{(2)}),\cdots,(Y^{(n)},\theta^{(n)})$ 和$(Y^{(n+1)},\theta^{(n+1)}) \triangleq (Y,\theta)$ 是相互独立的随机变量(r. v.)对子. $Y^{(1)},\cdots,Y^{(n)},Y$ 是可以观察的，$\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(n)},\theta$ 是不可观察的，且假定 $\theta^{(j)}(j=1,2,\cdots,n)$ 和 θ 有共同的先验分布 $G(\theta)$. 若令 $T^{(j)} \triangleq (T_1(Y^{(j)}),T_2(Y^{(j)}), T_3(Y^{(j)}),T_4(Y^{(j)})), j=1,2,\cdots,n$，其中 $T_i(Y^{(j)})$ 与(1.4)中的 $T_i(Y)$ $(i=\overline{1,4})$ 有相同的表达，只需将(1.4)中 Y 换为 $Y^{(j)}$ 即可. 显见 $T^{(j)}(j=1,2,\cdots,n)$ 和 T 相互独立，且有如(1.8)所示的相同边缘分布. 通常 $T^{(1)},T^{(2)},\cdots,T^{(n)}$ 称为历史样本，T 称为当前样本.

为获得方差分量 θ 的 EB 估计，采用类似于 Singh[15] 中的核估计方法. 设 $K_q(y)$ $(q=1,2,\cdots,s-1)$ 是一组有界的 Borel 可测函数，在区间(0,1)之外取值为零，且满足对每一个 $q(q=1,2,\cdots,s-1)$ 有

$$\frac{1}{l!}\int_0^1 y^l K_q(y)\mathrm{d}y = \begin{cases}1, & l=q,\\ 0, & l\neq q, \quad l=0,1,2,\cdots,s-1,\end{cases} \tag{2.1}$$

对 $0\leqslant r=\sum_{i=1}^4 r_i\leqslant s-1, r_i\geqslant 0(i=\overline{1,4})$，令

$$K(u)=K_{r_1}(u_1)\cdots K_{r_4}(u_4)=\prod_{i=1}^4 K_{r_i}(u_i), \tag{2.2}$$

其中 $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)\in R_4^+$. 从而易见上述 $K(u)$ 有下列性质：

(1) $\frac{1}{\prod_{i=1}^4 l_i!}\int_{R_4^+} K(u)\prod_{i=1}^4 u_i^{l_i}\mathrm{d}u = \begin{cases}1, & l_i=r_i, \quad i=\overline{1,4}\\ 0, & 否则;\end{cases}$

(2) 存在 $M>0$，使

$$|K(u)|\leqslant M, \quad \int_{R_4^+}|K(u)|\mathrm{d}u\leqslant M. \tag{2.3}$$

定义(1.12)式中的 $p^{(r)}(t)\triangleq\frac{\partial p(t)}{\partial t_1^{r_1}\partial t_2^{r_2}\partial t_3^{r_3}\partial t_4^{r_4}}(r=\sum_{i=1}^4 r_i, r_i\geqslant 0)$ 的核估计为：

$$p_n^{(r)}(t)=\frac{1}{nh_n^{4+r}}\sum_{j=1}^n\left[K\left(\frac{T^{(j)}-t}{h_n}\right)/u(T^{(j)})\right], \tag{2.4}$$

其中 $0<h_n\to 0$，当 $n\to\infty$ 时.

特别当取 $r=1$，2 时，易见(1.13)式中 $p_{t_i}^{(1)}(t)$ 和 $p_{t_it_j}^{(2)}(t)$ 的估计量可由(2.4)式获得，分别记为 $p_{t_i\cdot n}^{(1)}(t)$ 和 $p_{t_it_j\cdot n}^{(2)}(t)$. 故定义 $\theta_i(i=\overline{1,4})$ 的 EB 估计如下：

$$\hat\theta_{1n}=\frac{p_{t_1\cdot n}^{(1)}(t)-p_{t_3\cdot n}^{(1)}(t)}{2bl\hat p_{t_1t_3\cdot n}^{(2)}(t)}, \quad \hat\theta_{2n}=\frac{p_{t_2\cdot n}^{(1)}(t)-p_{t_3\cdot n}^{(1)}(t)}{2al\hat p_{t_2t_3\cdot n}^{(2)}(t)}$$

$$\hat\theta_{3n}=\frac{p_{t_3\cdot n}^{(1)}(t)-p_{t_4\cdot n}^{(1)}(t)}{2l\hat p_{t_3t_4\cdot n}^{(2)}(t)}, \quad \hat\theta_{4n}=\frac{-p_{t_4\cdot n}^{(1)}(t)}{2\hat p_{t_4t_4\cdot n}^{(2)}(t)}, \tag{2.5}$$

此处

$$\hat p_{t_it_j\cdot n}^{(2)}(t)=\begin{cases}p_{t_it_j\cdot n}^{(2)}(t), & 当\ |p_{t_it_j\cdot n}^{(2)}(t)|\geqslant\delta_n\\ \delta_n, & 当\ |p_{t_it_j\cdot n}^{(2)}(t)|<\delta_n,\end{cases} \tag{2.6}$$

$$(i,j)=(1,3),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,4),$$

其中 $\{\delta_n\}$ 为一趋于零的正实数列. 于是方差分量 θ 的 EB 估计为：

$$\hat\theta_n=(\hat\theta_{1n},\hat\theta_{2n},\hat\theta_{3n},\hat\theta_{4n})^\tau. \tag{2.7}$$

令 E_* 和 E_n 分别表示关于 $(T^{(1)},T^{(2)},\cdot,T^{(n)},(T,\theta))$ 及 $(T^{(1)},T^{(2)},\cdot,T^{(n)})$ 的联合分布求期望，故 $\hat\theta_n$ 的全面 Bayes 风险为

$$R_n=R_n(\hat\theta_n,G)=E_*\|\Lambda^{-1/2}(\theta)(\hat\theta_n-\theta)\|^2=\sum_{i=1}^4 E_*\left[\frac{(\hat\theta_{in}-\theta_i)^2}{w_i(\theta)}\right]. \tag{2.8}$$

按定义，如果 $\lim_{n\to\infty}R_n=R(G)$ 对 $G\in\mathscr{F}$ 成立，则称 $\hat\theta_n$ 为 θ 的关于 $\mathscr{F}$ 渐近最优(a. o.)的 EB 估计，进一步还可以讨论其趋于零的收敛速度问题.

3 EB 估计的渐近最优性

本文中，我们用 $c,c_1,c_2,\cdots$ 表示不依赖于 n 正的常数，它们在不同之处可以表示不同的值，即使在同一表达式中也是如此. 为证定理需给出如下一些引理.

引理 3.1 如果 $E(\theta_i\theta_4^{-1})<\infty\ (i=1,2,3)$，则有 $R(G)<\infty$，且

$$R_n - R(G) = E_*\|\Lambda^{-1/2}(\theta)(\hat\theta_n-\hat\theta_B)\|^2 = \sum_{i=1}^4 E_*\left[\frac{(\hat\theta_{in}-\hat\theta_{iB})^2}{w_i(\theta)}\right]. \tag{3.1}$$

证明 先证 $R(G)<\infty$. 由(1.15)可知

$$R(G) = E_{(T,\theta)}\|\Lambda^{-1/2}(\theta)(\hat\theta_B-\theta)\|^2 = \sum_{i=1}^4 E_{(T,\theta)}\left[\frac{(\hat\theta_{iB}-\theta_i)^2}{w_i(\theta)}\right], \tag{3.2}$$

对任给的 $i=\overline{1,4}$ 有

$$E_{(T,\theta)}\left[\frac{(\hat\theta_{iB}-\theta_i)^2}{w_i(\theta)}\right] \leqslant 2\left\{E_{(T,\theta)}\left[\frac{\theta_i^2}{w_i(\theta)}\right]+E_{(T,\theta)}\left[\frac{\hat\theta_{iB}^2}{w_i(\theta)}\right]\right\} \stackrel{\triangle}{=} 2(I_{i1}+I_{i2}). \tag{3.3}$$

由 $\theta_i^2(w_i(\theta))^{-1}\leqslant\theta_i\theta_4^{-1}$ 可知，若 $E(\theta_i\theta_4^{-1})<\infty, i=1,2,3$，则

$$I_{i1} = E_{(T,\theta)}[\theta_i^2 w_i^{-1}(\theta)] \leqslant E(\theta_i\theta_4^{-1}) < \infty. \tag{3.4}$$

同时，由 $\hat\theta_{iB}$ 的定义及 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} I_{i2} &= E_{(T,\theta)}\left[\frac{\hat\theta_{iB}^2}{w_i(\theta)}\right] = E_{(T)}\left[\frac{E^2(\theta_i w_i^{-1}(\theta)\,|T)}{E^2(w_i^{-1}(\theta)\,|T)}E(w_i^{-1}(\theta)\,|T)\right] \\ &\leqslant E_{(T)}[E(\theta_i^2 w_i^{-1}(\theta)\,|T)] = E_{(T,\theta)}(\theta_i^2 w_i^{-1}(\theta)) = I_{i1} < \infty. \end{aligned} \tag{3.5}$$

因此，由(3.2)－(3.5)知 $R(G)<\infty$.

再证(3.1)式. 仅对 $i=1$ 证明 $E_*\left[\frac{(\hat\theta_{1n}-\theta_1)^2}{w_1(\theta)}\right]-E_{(T,\theta)}\left[\frac{(\hat\theta_{1B}-\theta_1)^2}{w_1(\theta)}\right]=E_*\left[\frac{(\hat\theta_{1n}-\hat\theta_{1B})^2}{w_1(\theta)}\right]$. 其余各项类似可证. 因为

$$\begin{aligned} E_*\left[\frac{(\hat\theta_{1n}-\theta_1)^2}{w_1(\theta)}\right] &= E_*\left[\frac{(\hat\theta_{1n}-\hat\theta_{1B})^2}{w_1(\theta)}\right]+E_{(T,\theta)}\left[\frac{(\hat\theta_{1B}-\theta_1)^2}{w_1(\theta)}\right]+ \\ &\quad 2E_*\left[\frac{(\hat\theta_{1n}-\hat\theta_{1B})(\hat\theta_{1B}-\theta_1)}{w_1(\theta)}\right] \stackrel{\triangle}{=} J_1+J_2+J_3, \end{aligned} \tag{3.6}$$

其中

$$J_3 = E_{(T^{(1)},\cdots,T^{(n)},T)}\left\{(\hat\theta_{1n}-\hat\theta_{1B})E\left[\frac{\hat\theta_{1B}-\theta_1}{w_1(\theta)}\,|T\right]\right\} = 0, \tag{3.7}$$

上式成立是因为 $E\left[\frac{\hat\theta_{1B}-\theta_1}{w_1(\theta)}\,|T\right]=\hat\theta_{1B}E(w_1^{-1}(\theta)\,|T)-E(\theta_1 w_1^{-1}(\theta)\,|T)=0$，故将(3.7)代入(3.6)得：

$$E_*\left[\frac{(\hat\theta_{1n}-\theta_1)^2}{w_1(\theta)}\right]-E_{(T,\theta)}\left[\frac{(\hat\theta_{1B}-\theta_1)^2}{w_1(\theta)}\right]=E_*\left[\frac{(\hat\theta_{1n}-\hat\theta_{1B})^2}{w_1(\theta)}\right]. \tag{3.8}$$

类似地可证得：

$$E_*\left[\frac{(\hat\theta_{in}-\theta_i)^2}{w_i(\theta)}\right]-E_{(T,\theta)}\left[\frac{(\hat\theta_{iB}-\theta_i)^2}{w_i(\theta)}\right]=E_*\left[\frac{(\hat\theta_{in}-\hat\theta_{iB})^2}{w_i(\theta)}\right],\quad i=2,3,4. \tag{3.9}$$

将(3.8)和(3.9)式两边相加，可知(3.1)式得证. 引理证毕.

引理 3.2 若 $p^{(r)}(r_1,\cdots,r_4;t)\stackrel{\triangle}{=}p^{(r)}(t)$ 由(1.12)式给出，$p_n^{(r)}(t)$ 由(2.4)定义. 对 $G(\theta)\in\mathscr{F}$，假定 $p(t)$ 的一阶和二阶混合偏导数满足 Lipschitz 条件，则当取 $h_n=n^{-\tau}, 0<\tau\leqslant\frac{1}{10}$ 时，对 r

$=1,2$ 有 $E_n[p_n^{(r)}(t)-p^{(r)}(t)]^2\leqslant[c_1\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)+c_2]h_n^2$，此处 $\varphi(t)=\prod_{i=1}^{4}(1+t_i^{-1})^{1/2}$.

证明 由 c_r 不等式可得

$$E_n|p_n^{(r)}(t)-p^{(r)}(t)|^2\leqslant 2[\mathrm{Var}(p_n^{(r)}(t))]+2|E_np_n^{(r)}(t)-p^{(r)}(t)|^2 \stackrel{\triangle}{=} 2(I_1+I_2). \tag{3.10}$$

由 $p(t)$ 关于每个 $t_i(i=\overline{1,4})$ 的单调性可知，

$$\begin{aligned}I_1=\mathrm{Var}(p_n^{(r)}(t))&\leqslant\frac{1}{nh_n^{8+2r}}E_n[K(\frac{T^{(1)}-t}{h_n})/u(T^{(1)})]^2\\&=\frac{1}{nh_n^{4+2r}}\int_{[0,1]^4}[K^2(v)p(t+h_nv)/u(t+h_nv)]\mathrm{d}v\\&\leqslant\frac{p(t)}{nh_n^{4+2r}}\int_{[0,1]^4}\frac{K^2(v)}{u(h_nv+t)}\mathrm{d}v.\end{aligned} \tag{3.11}$$

由于 $m_i\geqslant 1(i=\overline{1,4})$，由 $u(t)=\prod_{i=1}^{4}t_i^{m_i/2-1}$ 及 $h_n\to 0, v\in(0,1)$ 得

$$\frac{1}{u(h_nv+t)}\leqslant(u(t))^{-1}\prod_{i=1}^{4}(1+t_i^{-1})^{1/2}\stackrel{\triangle}{=}\frac{\varphi(t)}{u(t)}, \tag{3.12}$$

其中 $\varphi(t)=\prod_{i=1}^{4}(1+t_i^{-1})^{1/2}$. 因此，结合(3.12)，(3.11)和核函数的性质(2.3)有

$$I_1\leqslant c_1\frac{p(t)\varphi(t)}{nh_n^{4+2r}u(t)}. \tag{3.13}$$

下面考虑 I_2，由于

$$E_np_n^{(r)}(t)=\frac{1}{h_n^{4+r}}E_n[K(\frac{T^{(1)}-t}{h_n})/u(T^{(1)})]=\frac{1}{h_n^r}\int_{[0,1]^4}K(v)p(t+h_nv)\mathrm{d}v, \tag{3.14}$$

对 $p(t+h_nv)$ 在 t 点作 Taylor 展开，有

$$p(t+h_nv)=p(t)+\cdots+h_n^r\sum_{l_1+l_2+l_3+l_4=r}\frac{p^{(r)}(t+\xi_1h_nv)}{l_1!l_2!l_3!l_4!}\prod_{i=1}^{4}v_i^{l_i}, \tag{3.15}$$

此处 $0<\xi_1<1$. 将(3.15)代入(3.14)，利用核函数的性质(2.3)(1)得

$$E_np_n^{(r)}(t)=\sum_{l_1+l_2+l_3+l_4=r}\int_{[0,1]^4}K(v)\frac{p^{(r)}(t+\xi_1h_nv)}{l_1!l_2!l_3!l_4!}\prod_{i=1}^{4}v_i^{l_i}\mathrm{d}v. \tag{3.16}$$

故由 $p(t)$ 的一阶和二阶混合偏导数满足 Lipschitz 条件及核函数的性质(2.3)得：

$$\begin{aligned}&|E_np_n^{(r)}(t)-p^{(r)}(t)|\\&\leqslant\sum_{l_1+l_2+l_3+l_4=r}\int_{[0,1]^4}K(v)\left|\frac{p^{(r)}(t+\xi_1h_nv)-p^{(r)}(t)}{l_1!l_2!l_3!l_4!}\right|\prod_{i=1}^{4}v_i^{l_i}\mathrm{d}v\\&\leqslant\sum_{l_1+l_2+l_3+l_4=r}\int_{[0,1]}^{4}\frac{K(v)\|h_nv\|}{l_1!l_2!l_3!l_4!}\prod_{i=1}^{4}v_i^{l_i}\mathrm{d}v\leqslant ch_n,\end{aligned}$$

从而

$$I_2=|E_np_n^{(r)}(t)-p^{(r)}(t)|^2\leqslant c_2h_n^2. \tag{3.17}$$

故当 $h_n=n^{-\tau}, 0<\tau\leqslant\frac{1}{10}$ 时，将(3.13)及(3.17)代入(3.10)引理得证.

引理 3.3 设 $\varphi(t)$ 由引理 3.2 给出，$\hat{\theta}_{iB}(i=\overline{1,4})$ 由(1.11)定义. 若 $G\in\mathscr{F}$，且 $E[\theta_i\theta_4^{-1}c(\theta)]<\infty(i=\overline{1,4})$ 和 $E[c(\theta)\prod_{i=1}^{4}(a_i^2+1)]<\infty$，则对 $i=\overline{1,4}$ 有

(1) $E_{(T,\theta)}[\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)w_i^{-1}(\theta)]<\infty$； (2) $E_{(T,\theta)}[\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)\hat{\theta}_{iB}^2w_i^{-1}(\theta)]<\infty$.

证明 为证引理，先证 $\int_{R_4^+}p(t)\varphi(t)\mathrm{d}t<\infty$. 事实上，在引理条件下有：

$$\begin{aligned}\int_{R_4^+}p(t)\varphi(t)\mathrm{d}t&=c_0\int_{R_4^+}\prod_{i=1}^{4}(1+t_i^{-1})^{1/2}\int_{\Theta}c(\theta)\exp\{-\sum_{i=1}^{4}\frac{t_i}{2a_i{}^2}\}\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}t\\&\leqslant c_0\int_{\Theta}c(\theta)\prod_{i=1}^{4}(\int_0^{\infty}(1+t_i^{-1/2})\exp\{\frac{-t_i}{2a_i^2}\}\mathrm{d}t_i)\mathrm{d}G(\theta)\\&\leqslant cE[c(\theta)\prod_{i=1}^{4}(a_i^2+1)]<\infty.\end{aligned}\tag{3.18}$$

以下仅以 $i=1$ 证明引理，对 $i=2,3,4$ 证明类似.

(1) 因 $G\in\mathscr{F}$，所以 $p_{t_1t_3}^{(2)}(t)\leqslant c$，从而由(3.18)可知

$$\begin{aligned}E_{(T,\theta)}[\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)w_1^{-1}(\theta)]&=E_{(T)}[\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)E(w_1^{-1}(\theta)\,|\,T)]\\&=cE_{(T)}[\frac{p(t)\varphi(t)}{u(t)}\cdot\frac{u(t)p_{t_1t_3}{}^{(2)}(t)}{f(t)}]\leqslant c\int_{R_4^+}p(t)\varphi(t)\mathrm{d}t<\infty.\end{aligned}$$

(2) 由 $\hat{\theta}_{iB}$ 的定义及 Hölder 不等式和(3.18)可知：

$$\begin{aligned}E_{(T,\theta)}[\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)\hat{\theta}_{1B}^2w_1^{-1}(\theta)]&=E_{(T)}[\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)\frac{E^2(\theta_1w_1{}^{-1}(\theta)\,|\,T)}{E^2(w_1^{-1}(\theta)\,|\,T)}E(w_1^{-1}(\theta)\,|\,T)]\\&\leqslant E_{(T)}[\frac{p(t)\varphi(t)}{u(t)}E(\theta_1^2w_1^{-1}(\theta)\,|\,T)]\leqslant c\int_{R_4^+}\frac{p(t)\varphi(t)}{u(t)}\int_{\Theta}\theta_1\theta_4^{-1}f(t\,|\,\theta)\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}t\\&\leqslant c\ E[\theta_1\theta_4^{-1}c(\theta)]\int_{R_4^+}p(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\leqslant c\int_{R_4^+}p(t)\varphi(t)\mathrm{d}t<\infty.\end{aligned}$$

□

定理 3.1 若 R_n 和 $R(G)$ 分别由(2.8)和(1.15)定义，a_i^2 由(1.5)式给出. 假定 $p(t)$ 的一阶和二阶混合偏导数满足 Lipschitz 条件，且

(1) $G\in\mathscr{F},E(\theta_4^{-2})<\infty,E(\theta_i\theta_4^{-1})<\infty,\quad i=1,2,3,$

(2) $E[\theta_i\theta_4^{-1}c(\theta)]<\infty,\ E[c(\theta)\prod_{i=1}^{4}(a_i^2+1)]<\infty,\quad i=\overline{1,4}.$

则当 $h_n=o(\delta_n)$，$h_n=n^{-\tau},0<\tau\leqslant\frac{1}{10}$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=R(G)$.

证明 由引理 3.1 可知，

$$R_n-R(G)=\sum_{i=1}^{4}E_*[\frac{(\hat{\theta}_{in}-\hat{\theta}_{iB})^2}{w_i(\theta)}]\overset{\triangle}{=}\sum_{i=1}^{4}Q_i,\tag{3.19}$$

其中 $Q_i=E_*[w_i^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_{in}-\hat{\theta}_{iB})^2]$. 如果能证明 $\lim\limits_{n\to\infty}Q_i=0\ (i=\overline{1,4})$ 成立，则定理得证. 以下以 Q_1 为例证明上述结果. 由控制收敛定理可知，对 $Q_1=E_*[w_1^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_{1n}-\hat{\theta}_{1B})^2]$，只需证明下列两条：

(i) $w_1^{-1}(\theta)E_n(\hat{\theta}_{1n}-\hat{\theta}_{1B})^2\leqslant M_1(t,\theta)$，对充分大的 n；且 $E_{(T,\theta)}[M_1(T,\theta)]<\infty$；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} w_1^{-1}(\theta)E_n(\hat{\theta}_{1n}-\hat{\theta}_{1B})^2=0$,对任意固定的 t 和 θ.

因为

$$E_n(\hat{\theta}_{1n}-\hat{\theta}_{1B})^2=E_n\left[\frac{p_{t_1,n}^{(1)}(t)-p_{t_3,n}^{(1)}(t)}{2bl\hat{p}_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)}-\frac{p_{t_1}^{(1)}(t)-p_{t_3}^{(1)}(t)}{2bl p_{t_1t_3}^{(2)}(t)}\right]^2$$

$$\leqslant c_1'E_n\left[\frac{p_{t_1,n}^{(1)}(t)-p_{t_1}^{(1)}(t)}{\hat{p}_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)}\right]^2+c_2'E_n\left[\frac{p_{t_3,n}^{(1)}(t)-p_{t_3}^{(1)}(t)}{\hat{p}_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)}\right]^2+$$

$$c_3'\hat{\theta}_{1B}^2E_n\left[1-\frac{p_{t_1t_3}^{(2)}(t)}{\hat{p}_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)}\right]^2\overset{\triangle}{=}I_1+I_2+\hat{\theta}_{1B}^2I_3. \tag{3.20}$$

由(2.6),引理 3.2 及 $h_n=o(\delta_n)$ 可知存在自然数 N_1,当 $n>N_1$ 时有

$$I_1\leqslant\delta_n^{-2}h_n^2\left[c\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)+c_1\right]\leqslant c\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)+c_1. \tag{3.21}$$

$$I_2\leqslant\delta_n^{-2}h_n^2\left[c\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)+c_1\right]\leqslant c\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)+c_1. \tag{3.22}$$

而

$$I_3=c_3'E_n\left(\frac{\hat{p}_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)-p_{t_1t_3}^{(2)}(t)}{\hat{p}_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)}\right)^2I_{[|p_{t_1t_3}^{(2)}(t)|\geqslant\delta_n]}+$$

$$c_3'E_n\left(\frac{\hat{p}_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)-p_{t_1t_3}^{(2)}(t)}{\hat{p}_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)}\right)^2I_{[|p_{t_1t_3}^{(2)}(t)|<\delta_n]}\overset{\triangle}{=}I_{31}+I_{32}. \tag{3.23}$$

由(2.6)式可见

$$p_{t_1t_3}^{(2)}(t)-\hat{p}_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)=\begin{cases}p_{t_1t_3}^{(2)}(t)-p_{t_1t_3,n}^{(2)}(t), & |p_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)|\geqslant\delta_n\\ p_{t_1t_3}^{(2)}(t)-\delta_n<p_{t_1t_3}^{(2)}(t)-p_{t_1t_3,n}^{(2)}(t), & |p_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)|<\delta_n,\end{cases}$$

于是由引理 3.2 可知

$$I_{31}\leqslant c_3'\delta_n^{-2}E_n\left[\hat{p}_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)-p_{t_1t_3}^{(2)}(t)\right]^2I_{[|p_{t_1t_3}^{(2)}(t)|\geqslant\delta_n]}$$

$$\leqslant c_3'\delta_n^{-2}E_n\left[p_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)-p_{t_1t_3}^{(2)}(t)\right]^2\leqslant\delta_n^{-2}h_n^2\left[c\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)+c_1\right]. \tag{3.24}$$

又由于当 $|p_{t_1t_3}^{(2)}(t)|<\delta_n$ 时,$|p_{t_1t_3}^{(2)}(t)/\hat{p}_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)|\leqslant1$,故有

$$I_{32}=c_3'E_n\left(1-\frac{p_{t_1t_3}^{(2)}(t)}{\hat{p}_{t_1t_3,n}^{(2)}(t)}\right)^2I_{[|p_{t_1t_3}^{(2)}(t)|<\delta_n]}^{(2)}\leqslant cI_{[|p_{t_1t_3}^{(2)}(t)|<\delta_n]}\leqslant c. \tag{3.25}$$

将(3.24)和(3.25)代入(3.23),由 $h_n=o(\delta_n)$ 可知存在自然数 N_2,当 $n>N_2$ 时有

$$I_3\leqslant\delta_n^{-2}h_n^2\left[c\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)+c_1\right]+cI_{[|p_{t_1t_3}^{(2)}(t)|<\delta_n]}\leqslant c\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)+c_1. \tag{3.26}$$

将(3.21),(3.22)和(3.26)代入(3.20)可知,存在 $N=\max(N_1,N_2)$,当 $n>N$ 时有

$$w_1^{-1}(\theta)E_n(\hat{\theta}_{1n}-\hat{\theta}_{1B})^2$$

$$\leqslant w_1^{-1}(\theta)\left[c_1+c_2\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)+c_3\hat{\theta}_{1B}^2\left(\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)+c_4\right)\right]\overset{\triangle}{=}M_1(t,\theta). \tag{3.27}$$

由引理 3.3 可知

$$E_{(T,\theta)}\left[\frac{p(t)\varphi(t)}{u(t)}w_1^{-1}(\theta)\right] < \infty, \quad E_{(T,\theta)}\left[\hat{\theta}_{1B}^2 \frac{p(t)\varphi(t)}{u(t)}w_1^{-1}(\theta)\right] < \infty. \tag{3.28}$$

又由引理 3.1 证明过程中的(3.4)和(3.5)式可知

$$E_{(T,\theta)}(\hat{\theta}_{1B}^2 w_1^{-1}(\theta)) \leqslant cE(\theta_1\theta_4^{-1}) < \infty. \tag{3.29}$$

再由 $w_1(\theta)$的定义,有

$$E(w_1^{-1}(\theta)) < E(\theta_4^{-2}) < \infty. \tag{3.30}$$

故由(3.28)—(3.30)得

$$E_{(T,\theta)}[M_1(T,\theta)] \leqslant c_1E(w_1^{-1}(\theta)) + c_2E_{(T,\theta)}\left[\frac{p(t)\varphi(t)}{u(t)}w_1^{-1}(\theta)\right] +$$

$$c_3E_{(T,\theta)}\left[\hat{\theta}_{1B}^2 \frac{p(t)\varphi(t)}{u(t)}w_1^{-1}(\theta)\right] + c_4E_{(T,\theta)}(\hat{\theta}_{1B}^2 w_1^{-1}(\theta)) < \infty. \tag{3.31}$$

故(i)得证.

由(3.21),(3.22)和(3.26)及 $h_n=o(\delta_n)$可知,对任意固定的 t 和 θ 有

$$\lim_{n\to\infty} w_1^{-1}(\theta)E_n(\hat{\theta}_{1n}-\hat{\theta}_{1B})^2 \leqslant \lim_{n\to\infty}\{\delta_n^{-2}h_n^2\left[c\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)+c_1\right]w_1^{-1}(\theta) +$$

$$c_2\hat{\theta}_{1B}^2 w_1^{-1}(\theta) I_{[|p_{t_1t_3}^{(2)}(t)|<\delta_n]} + \delta_n^{-2}h_n^2\hat{\theta}_{1B}^2\left[c\frac{p(t)}{u(t)}\varphi(t)+c_1\right]w_1^{-1}(\theta)\} = 0, \tag{3.32}$$

故(ii)得证. 所以

$$\lim_{n\to\infty} Q_1 = 0. \tag{3.33}$$

同理可证

$$\lim_{n\to\infty} Q_i = 0, \quad i = 2,3,4. \tag{3.34}$$

由(3.33)和(3.34)可知定理得证.

注 3.1(特例和推广) 易见平衡的单向分类随机效应模型和平衡无交互效应的 双向分类随机效应模型皆为本文的特例. 由类似本文的方法可获得这些模型中方差分量的 Bayes 估计和 EB 估计,并证明其渐近最优性. 其结果的表述和证明都要比本文简单得多.

考虑一般的 k 向分类随机效应模型:$Y_{m\times1}=\mu\mathbf{1}_m+U_1\xi_1+\cdots+U_k\xi_k+e_{m\times1}$,其中 $k>3$,ξ_1,$\cdots$,ξ_k 和 e 相互独立,$\xi_i\sim N_{l_i}(0,\sigma_i^2I)$,$i=\overline{1,k}$,$e\sim N_m(0,\sigma_i^2I)$. $\xi_1,\cdots,\xi_k$ 称为随机效应,e 是随机误差. $\sigma_1^2,...,\sigma_k^2$ 和 $\sigma_{k+1}^2=\sigma_e^2$ 称为方差分量. 由王松桂[13]定理 9.2.1,利用类似本文的方法可获得方差分量的 Bayes 估计和 EB 估计,并证明其渐近最优性. 与本文不同的仅是结果的表述和证明要更繁琐一些.

4 例 子

取 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)^\tau$ 的先验分布密度如下:

$$\mathrm{d}G(\theta) = h_0\left[\prod_{i=1}^4 (a_i^2)^{-(\delta_i+1)}\right]\exp\left(-\sum_{i=1}^4 \frac{1}{2a_i^2}\right)I_{[\theta_i>0\ i=\overline{1,4}]}\mathrm{d}\theta \overset{\triangle}{=} g(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{4.1}$$

若记 $a=(a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2)^\tau$,作变换 $a_1^2=bl\theta_1+l\theta_3+\theta_4$,$a_2^2=al\theta_2+l\theta_3+\theta_4$,$a_3^2=l\theta_3+\theta_4$和 $a_4^2=\theta_4$,则可见 $g(\theta)\mathrm{d}\theta=\tilde{g}(a)\mathrm{d}a$,此处

$$\widetilde{g}(a)=\widetilde{h}_0[\prod_{i=1}^{4}(a_i^2)^{-(\delta_i+1)}]\exp(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{2a_i^2})\,I_{[D]},\tag{4.2}$$

其中 $D=\{a=(a_1^2,\cdots,a_4^2)^{\tau}:0<a_4^2\leqslant a_3^2\leqslant a_1^2<\infty,0<a_4^2\leqslant a_3^2\leqslant a_2^2<\infty\}$；且 h_0 和 $\widetilde{h}_0$ 为给定的常数，分别使(4.1)和(4.2)为概率密度；$\delta_i>1\ (i=\overline{1,4})$.

下面验证定理的条件.

(1) 由于对 $r\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}&E[c(\theta)\theta_4^{-r}]\\&\leqslant \widetilde{h}_0\int_{(0,\infty)^4}(a_4^2)^{-(m_4/2+\delta_4+r+1)}[\prod_{i=1}^{3}(a_i^2)^{-(m_i/2+\delta_i+1)}]\exp(-\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{2a_i^2})\mathrm{d}a\\&=\widetilde{h}_0 2^{m_4/2+\delta_4+r}\Gamma(m_4/2+\delta_4+r)\prod_{i=1}^{4}[2^{m_i/2+\delta_i}\Gamma(m_i/2+\delta_i)]<\infty.\end{aligned}\tag{4.3}$$

故知当分别取 $r=0,2$ 时 $E[c(\theta)]<\infty$，$E[c(\theta)\theta_4^{-2}]<\infty$. 因此 $G\in\mathscr{F}$.

类似(4.3)有

$$E(\theta_4^{-2})=\widetilde{h}_0\int_D(a_4^2)^{-(\delta_4+3)}[\prod_{i=1}^{3}(a_i^2)^{-(\delta_i+1)}]\exp(-\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{2a_i^2})\mathrm{d}a<\infty.\tag{4.4}$$

同理可求

$$E(\theta_i\theta_4^{-1})\leqslant E[a_i^2(a_4^2)^{-1}]\leqslant \widetilde{h}_0\Gamma(\delta_4+1)\Gamma(\delta_i-1)\prod_{j\neq i}^{3}\Gamma(\delta_j)2^{-\sum_{i=1}^{4}\delta_i}<\infty.\tag{4.5}$$

由(4.3)，(4.4)和(4.5)可知定理 3.1 条件(1)成立.

(2) 容易验证

$$\begin{aligned}E[\theta_i\theta_4^{-1}c(\theta)]\leqslant E[a_i^2(a_4^2)^{-1}c(\theta)]\leqslant \widetilde{h}_0\Gamma(\frac{m_4}{2}+\delta_4+1)\Gamma(\frac{m_i}{2}+\delta_i-1)\times\\ \prod_{j\neq i}^{3}\Gamma(m_i/2+\delta_j)2^{-\sum_{i=1}^{4}(m_i/2+\delta_i)}<\infty.\end{aligned}\tag{4.6}$$

且

$$\begin{aligned}&E[c(\theta)\prod_{i=1}^{4}(a_i^2+1)]=E[\prod_{i=1}^{4}((a_i^2)^{-\frac{m_i}{2}+1}+(a_i^2)^{-\frac{m_i}{2}})]\\&\leqslant \widetilde{h}_0\prod_{i=1}^{4}\int_0^{\infty}[(a_i^2)^{-(\frac{m_i}{2}+\delta_i)}+(a_i^2)^{-(\frac{m_i}{2}+\delta_i+1)}]\exp\{-\frac{1}{2a_i^2}\}\mathrm{d}a_i^2<\infty.\end{aligned}\tag{4.7}$$

由(4.6)和(4.7)可知定理 3.1 的条件(2)成立.

本例说明适合定理条件的先验分布是存在的.

参考文献：

[1] RAO C R. *Estimation of variance and covariance components* [J]. J. Mult. Anal., 1971, **1**: 257—275.

[2] HARTLEY H O, RAO J N K. *Maximum likelihood estimation for the mixed analysis of variance model* [J]. Biometrika, 1967, **54**: 93—108.

[3] KLEFFE J. *Bayes invariant quadratic estimators for variance components in linear model* [J]. Math. Operationsforsch. U. Statist., 1975, **6**: 753—767.

[4] MOSTAFA S M, AHMAD R. *Empirical Bayes quadratic estimators of variance components in normal linear models* [J]. Statistics, 1986, **17**: 337—348.

[5] ROBBINS H. *An empirical Bayes approach to statistics* [A]. Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., 1955, Universityof California Press 1: 157—163.

[6] ROBBINS H. *The empirical Bayes approach to statistical decision problem* [J]. Ann. Math. Statist., 1964, **35**: 1—20.

[7] SINGH R S. *Empirical Bayes estimation in Lebesgue-exponential families with rates near the best possible rate* [J]. Ann. Statist., 1979, **7**: 890—902.

[8] CHEN Xi-ru. *Asymptotically optimal empirical Bayes estimation for parameter of one-dimension discrete exponential families* [J]. Chin. Ann. of Math., Ser. B, 1983, **4**(1): 41—50.

[9] SINGH R S, WEI L S. *Empirical Bayes with rates and best possible rate of convergence in* $u(x)c(\theta)\exp(-x/\theta)$*-family: Estimation Case* [J]. Ann. Inst. Statist. Math., 1992, **44**: 435—449.

[10] SINGH R S. *Empirical Bayes estimation in a multiple linear regression model* [J]. Ann. Inst. Statist. Math., 1985, **37**: 71—86.

[11] Wei L S, ZHANG S P. *The convergence rates of empirical Bayes estimation in a multiple linear regression model* [J]. Ann. Inst. Statist. Math., 1995, **47**: 81—97.

[12] WEI L S. *Convergence rates of empirical Bayesian estimation in a class of linear models* [J]. Statistica Sinica, 1998, **8**: 589—605.

[13] 王松桂. 线性模型的理论及其应用[M]. 合肥：安徽教育出版社，1987.
WANG S G. *The Theory of Linear Models and Its Applications* [M]. Hefei: Anhui Education Press, 1987.

[14] 陈希孺. 数理统计引论[M]. 北京：科学出版社，1981，1997.
CHEN Xi-ru. *An Introduction to Statistics* [M]. Beijing: Science Press, 1981, 1997.

[15] SINGH R S. *Speed of convergence in nonparameter estimation of a multivariate* μ*-density and its mixed partial derivatives* [J]. J. Statist. Plann. Inf., 1981, **5**: 287—298.

Asymptotically Optimal Empirical Bayes Estimation for Variance Components in Random Effects Models

WEI Lai-sheng, WANG Li-chun

(Department of Statistics and Finance, University of Science & Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: In this paper, the Bayes estimators of variance components for two-way classification random effects models is derived under weighted quadratic loss function, and the empirical Bayes (EB) estimators are constructed by the kernel estimation of multivariate density and its mixed partial derivatives. The asymptotically optimality of the EB estimators are obtained under some suitable conditions, and the special cases and the generalizations of the model are shown. Finally, an example satisfying the conditions of theorem is given.

Key words: Random effects models; variance components; Bayes estimators; empirical Bayes estimators; asymptotic optimality.