第24卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 24 No. 4
2004年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 2004

关于复平面上 H^∞ 空间，β^p 空间以及 β_0^p 空间的几个问题*

张　学　军
（湖南师范大学数学与计算机科学学院，湖南 长沙 410006）

摘　要：本文讨论了单位圆中 Hardy 空间 H^∞ 到 p-Bloch 空间 β^p 的复合算子 $T_{1,\varphi}$ 和加权复合算子 $T_{\Psi,\varphi}$ 的有界性，也讨论了 H^∞ 到小 p-Bloch 空间 β_0^p 的复合算子 $T_{1,\varphi}$ 的有界性问题；另外还讨论了小 p-Bloch 空间到 H^∞ 空间的点乘子及小 p-Bloch 空间上复合算子的紧性等.

关键词：有界性；加权复合算子；点乘子；紧算子.
分类号：AMS(2000) 30D99/CLC number：O174.56
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2004)04-0697-08

1　关于 H^∞ 空间到 p-Bloch 空间的复合算子的有界性问题

设 D 是单位圆，最近 Madigan 和 Matheson[1] 研究了 D 上 Bloch 空间 $\beta(D)$ 和小 Bloch 空间 $\beta_0(D)$ 上复合算子的问题，他们证明了 $T_{1,\varphi}$ 在 $\beta(D)$ 上总是有界的，$T_{1,\varphi}$ 在 $\beta_0(D)$ 上有界当且仅当 $\varphi\in\beta_0(D)$，他们也讨论了 $T_{1,\varphi}$ 在 $\beta(D)$ 及 $\beta_0(D)$ 上的紧性问题. 就在近期，史济怀先生和罗罗博士将此结论推广到了 C^n 中齐性域 Ω 上[2].

设 $H(D)$ 表示单位圆 D 上的全纯函数类；H^∞ 表示 D 上有界全纯函数全体；定义 p-Bloch 空间 $\beta^p=\{f: f\in H(D)$ 且 $\|f\|_{\beta^p}=|f(0)|+\sup\limits_{z\in D}(1-|z|^2)^p|f'(z)|<\infty\}$ 及小 p-Bloch 空间 $\beta_0^p=\{f: f\in H(D)$ 且 $\lim\limits_{|z|\to1}(1-|z|^2)^p|f'(z)|=0\}$（$p$ 为实数），由极大模原理知，当 $p<0$ 时 β^p 中只含常值函数，$p\leqslant0$ 时 β_0^p 中只有零函数.

设 φ 是 $D\to D$ 的一个全纯自映射，$\Psi(z)$ 为 D 上的全纯函数，定义 $H(D)$ 上的加权复合算子 $T_{\Psi,\varphi}: T_{\Psi,\varphi}(f)(z)=\Psi(z)f(\varphi(z)), f\in H(D)$. 我们曾经在 β^p 和 β_0^p 上讨论过 $T_{\Psi,\varphi}$ 的有界性问题[13]，我们知道，$\bigcup\limits_{0\leqslant p<1}\beta^p\subset H^\infty\subset\beta^1$，那末 H^∞ 到 β^1 乃至 H^∞ 到一般的 β^p 的复合算子之有界性如何呢？另外将原来的复合算子加权后的有界性又会怎样？本文首先解决这些问题.

1996 底，任广斌博士在其博士论文中利用混合模空间得到了 Begman 型算子

* 收稿日期：2002-02-19
基金项目：国家自然科学基金(19871026)，浙江省自然科学基金(M103104)和湖南省教育厅资助项目.
作者简介：张学军(1964-)，男，硕士，副教授.

$$P_{s,t}f(z)=\binom{n+t-1}{n}(1-|z|^2)^s\int_B \frac{(1-|w|^2)^{t-1}f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+t+s}}\mathrm{d}v(w)$$

在 $L_{p,q}(\varphi)$ 上的有界性,其结果和相应混合模空间 $H_{p,q}(h)$、正规函数 h 的定义可见文[12],本文在论证中要用到混合模空间和 Bergman 型算子.

引理 1.1 (1) $f\in H_{p,1}(h)$,则当 $t>b$ 时

$$f(z)=P_{0,t}f(z)=t\int_D \frac{(1-|w|^2)^{t-1}f(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{1+t}}\mathrm{d}v(w);$$

(2) 若 $f\in H(D)$ 且 $|f(z)|\leqslant \frac{c}{(1-|z|^2)^{p-1}}$,则

$$f\in H_{p,1}((1-r)^{p-\frac{1}{2}}),$$

其中 b 为正规函数定义中的正数,$p>1$.

证明 这是文[13]中引理 2.1.

引理 1.2 (1) $f\in H(D)$,$p>1$ 时,$f\in\beta^p$ 当且仅当 $|f(z)|\leqslant\frac{c}{(1-|z|^2)^{p-1}}$;

(2) 若 $f\in H^\infty$,则 $\|f\|_{\beta^1}\leqslant c\|f\|_{H^\infty}$.

证明 (1) 充分性见文[11]引理 1 中 $n=1$ 的情形.

反过来,若 $|f(z)|\leqslant\frac{c}{(1-|z|^2)^{p-1}}$,用引理 1.1 的结论取 $t=p$,$b=p-\frac{1}{4}$,则 $t>b$,有

$$f(z)=p\int_D \frac{(1-|w|^2)^{p-1}f(w)}{(1-z\overline{w})^{1+p}}\mathrm{d}v(w)$$

$$\Rightarrow f'(z)=p(p+1)\int_D \frac{(1-|w|^2)^{p-1}\overline{w}f(w)}{(1-z\overline{w})^{p+2}}\mathrm{d}v(w),$$

则由文[5]中命题 1.4.10 有

$$|f'(z)|\leqslant c\int_D \frac{1}{|1-z\overline{w}|^{2+p}}\mathrm{d}v(w)\leqslant\frac{c}{(1-|z|^2)^p},$$

故 $f\in\beta^p$.

(2) 若 $f\in H^\infty$,则由文[5]中命题 7.1.2 有

$$f(z)=\int_D \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^2}\mathrm{d}v(w),$$

再由文[5]中命题 1.4.10 知

$$|f'(z)|=\left|\int_D \frac{2\overline{w}f(w)}{(1-z\overline{w})^3}\mathrm{d}v(w)\right|\leqslant 2\int_D \frac{\|f\|_{H^\infty}}{|1-z\overline{w}|^3}\mathrm{d}v(w)\leqslant\frac{c\|f\|_{H^\infty}}{1-|z|^2},$$

从而

$$\|f\|_{\beta^1}=|f(0)|+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)|\leqslant c\|f\|_{H^\infty}.$$

定理 1.1 $p\geqslant 0$,设 φ 是 $D\to D$ 的一个全纯自映射,则 $T_{1,\varphi}$ 是 H^∞ 到 β^p 的有界算子之充要条件为

$$\sup_{z\in D}\left\{\frac{(1-|z|^2)^p|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}\right\}<\infty.$$

证明 任取 $f\in H^\infty$,有

$$\|T_{1,\varphi}\|_{\beta^p}=|f(\varphi(0))|+\sup_{z\in D}\{(1-|z|^2)^p|f'(\varphi(z))\varphi'(z)|\}$$

$$\leqslant \|f\|_{H^\infty} + \sup_{z\in D}\{[(1-|\varphi(z)|^2)|f'(\varphi(z))|]\cdot[\frac{(1-|z|^2)^p}{(1-|\varphi(z)|^2)}|\varphi'(z)|]\}$$

$$\leqslant \|f\|_{H^\infty} + c\|f\|_{\beta^1} \leqslant c\|f\|_{H^\infty}.$$

再证必要性:若 $T_{1,\varphi}$ 是 H^∞ 到 β^p 的有界算子,任取 $w\in D$,作 $f_w(z)=\frac{z}{1-z\overline{\varphi(w)}}$,则

$$f_w(z)=\frac{1}{(1-z\overline{\varphi(w)})^2}$$

且 $\|f_w\|_{H^\infty}\leqslant\frac{2}{1-|\varphi(w)|^2}$,故

$$(1-|z|^2)^p|f_w(\varphi(z))\varphi'(z)|\leqslant\|T_{1,\varphi}(f_w)\|_{\beta^p}\leqslant\|T_{1,\varphi}\|\cdot\|f_w\|_{H^\infty}\leqslant\frac{c}{1-|\varphi(w)|^2},$$

即

$$(1-|z|^2)^p|\frac{\varphi'(z)}{(1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)})^2}|\leqslant\frac{c}{1-|\varphi(w)|^2},$$

取 $z=w$ 得 $\frac{(1-|w|^2)^p|\varphi'(w)|}{1-|\varphi(w)|^2}\leqslant c$,因 c 与 w 无关,由 w 的任意性知必要性成立.

推论 1.2 设 φ 是 D 上的一个全纯自映射,(1) 当 $p\geqslant1$ 时 $T_{1,\varphi}$ 总是 H^∞ 到 β^p 的有界算子;(2) 当 $0\leqslant p<1$ 时存在 φ 使 $T_{1,\varphi}$ 不是 H^∞ 到 β^p 的有界算子.

证明 (1) 由 Pick 引理知当 $p\geqslant1$ 时

$$\frac{(1-|z|^2)^p|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}=(1-|z|^2)^{p-1}\frac{(1-|z|^2)|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}\leqslant1,$$

由定理 1.1 知命题结论成立.

(2) 当 $0\leqslant p<1$ 时,取 $\varphi(z)=\frac{(1-z)^{\frac{1-p}{2}}}{2}$,则 $\varphi\in H(D)$ 且 $|\varphi(z)|<1$,但沿实轴有

$$\frac{(1-r^2)^p|\varphi'(r)|}{1-|\varphi(r)|^2}\geqslant(1-r^2)^p\frac{1-p}{4(1-r)^{\frac{1+p}{2}}}\geqslant\frac{1-p}{4(1-r)^{\frac{1-p}{2}}}\to\infty(r\to1),$$

由定理 1.1 知 $T_{1,\varphi}$ 不是 H^∞ 到 β^p 的有界算子.

定理 1.3 设 φ 是 D 上的一个全纯自映射,Ψ 在 D 上全纯,则(1) $p>1$ 时 $T_{\Psi,\varphi}$ 是 H^∞ 到 β^p 的有界算子之充要条件为 $\Psi\in\beta^p$.

(2) $0\leqslant p\leqslant1$ 时 $T_{\Psi,\varphi}$ 是 H^∞ 到 β^p 的有界算子之充要条件为 $\Psi\in\beta^p$ 且

$$\sup_{z\in D}\{\frac{(1-|z|^2)^p|\Psi(z)\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}\}<\infty.$$

证明 (1) $p>1$,若 $\Psi\in\beta^p$,则 $(1-|z|^2)^p|\Psi'(z)|\leqslant c$,任取 $f\in H^\infty$,由引理 1.2 和 Pick 引理知

$$\|T_{\Psi,\varphi}\|_{\beta^p}=|\Psi(0)f(\varphi(0))|+\sup_{z\in D}\{(1-|z|^2)^p|\Psi'(z)f(\varphi(z))+\Psi(z)f'(\varphi(z))\varphi'(z)|\}$$

$$\leqslant(|\Psi(0)|+c)\|f\|_{H^\infty}+\sup_{z\in D}\{[1-|z|^2)^{p-1}|\Psi(z)|]\cdot$$

$$[(1-|\phi(z)|^2)f'\phi(z))|].\frac{(1-|z|^2)|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}\}$$

$$\leqslant|\Psi(0)|.\|f\|_{H^\infty}+c\|f\|_{H^\infty}+c\|f\|_{\beta^1}\leqslant c\|f\|_{H^\infty}.$$

反过来,若 $T_{\Psi,\varphi}$是 H^∞到 β^p 的有界算子,令 $f(z)=1$,则

$$(1-|z|^2)^p|[\Psi(z)f(\varphi(z))]'|\leqslant\|T_{\Psi,\varphi}\|\cdot\|f\|_{H^\infty}\leqslant c,$$

即$(1-|z|^2)^p|\Psi'(z)|\leqslant c$，故$\Psi\in\beta^p$.

(2) $0\leqslant p\leqslant 1$时，先证充分性：任取$f\in H^\infty$，则由题设条件和引理1.2有

$$\|T_{\Psi,\varphi}\|_{\beta^p}\leqslant|\Psi(0)f(\varphi(0))|+\sup_{z\in D}\{(1-|z|^2)^p|\Psi'(z)f(\varphi(z))|+\frac{(1-|z|^2)^p|\Psi(z)\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}\|f\|_{\beta^p}\}$$
$$\leqslant|\Psi(0)|.\|f\|_{H^\infty}+\sup_{z\in D}\{(1-|z|^2)^p|\Psi'(z)|\}\|f\|_{H^\infty}+c\|f\|_{\beta^1}$$
$$\leqslant c\|f\|_{H^\infty}.$$

再证必要性：若$T_{\Psi,\varphi}$是H^∞到β^p的有界算子，取$f\equiv 1$推得$\Psi\in\beta^p$；现任取$w\in D$，作$f_w(z)=\dfrac{z}{1-z\overline{\varphi(w)}}$，则$f_w(z)=\dfrac{1}{(1-z\overline{\varphi(w)})^2}$，得$\|f_w\|_{H^\infty}\leqslant\dfrac{2}{1-|\varphi(w)|^2}$，从而

$$(1-|z|^2)^p|\Psi'(z)\frac{\varphi(z)}{1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)}}+\frac{\Psi(z)\varphi'(z)}{(1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)})^2}|$$
$$\leqslant\|T_{\Psi,\varphi}\|\cdot\|f_w\|_{H^\infty}\leqslant\frac{c}{1-|\varphi(w)|^2},$$

取$z=w$又$\Psi\in\beta^p$可得

$$(1-|w|^2)^p\frac{|\Psi(w)\varphi'(w)|}{1-|\varphi(w)|^2}\leqslant c+(1-|w|^2)^p|\Psi'(w)|\cdot|\varphi(w)|\leqslant c,$$

由w的任意性知必要性成立. $0\leqslant p\leqslant 1$时，很容易举例说明仅仅$\Psi\in\beta^p$是不够的.

由定理1.1知$\sup\limits_{z\in D}\dfrac{(1-|z|^2)^p|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}<\infty$是$T_{1,\varphi}$为$H^\infty$到$\beta^p$有界算子的必要条件，而$\beta_0^p\subset\beta^p$，故$\begin{cases}\sup\limits_{z\in D}\dfrac{(1-|z|^2)^p|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}<\infty\\ \varphi\in\beta_0^p\end{cases}$是$T_{1,\varphi}$为$H^\infty$到$\beta_0^p$的有界算子的必要条件，我们进一步有

定理1.4 设φ是D上的全纯自映射，则(1)当$p>1$时$T_{1,\varphi}$总是H^∞到β_0^p的有界算子.

(2) $0<p\leqslant 1$时，若$\lim\limits_{|z|\to 1}\dfrac{(1-|z|^2)^p|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}=0$，则$T_{1,\varphi}$是$H^\infty$到$\beta_0^p$的有界算子.

证明 (1) 当$p>1$时，任取$f\in H^\infty$，由引理1.2和Pick引理知

$$(1-|z|^2)^p|(f(\varphi(z)))'|=(1-|z|^2)^p|f'(\varphi(z))|\cdot|\varphi'(z)|\leqslant\frac{c(1-|z|^2)^p|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}$$
$$\leqslant c(1-|z|^2)^{p-1},$$

从而有$(1-|z|^2)^p|[f(\varphi(z))]'|\to 0(|z|\to 1)$，则$T_{1,\varphi}(f)\in\beta_0^p$.因此$p>1$时$T_{1,\varphi}$总是$H^\infty$到$\beta_0^p$的有界算子.

(2) $0<p\leqslant 1$时，若$\lim\limits_{|z|\to 1}\dfrac{(1-|z|^2)^p|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}=0$，由于$H^\infty\subset\beta^1$，故对任给的$f\in H^\infty$，有

$$(1-|z|^2)^p|(f(\varphi(z)))'|=(1-|z|^2)^p|f'(\varphi(z))|\cdot|\varphi'(z)|$$
$$=\frac{(1-|z|^2)^p|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}(1-|\varphi(z)|^2)|f'(\varphi(z))|$$
$$\leqslant\frac{c(1-|z|^2)^p|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}\to 0(|z|\to 1)$$
$$\Rightarrow T_{1,\varphi}(f)\in\beta_0^p\Rightarrow T_{1,\varphi}$$

是H^∞到β_0^p的有界算子.

2 关于小 p-Bloch 空间到 H^∞ 空间的点乘子问题

乘子理论和函数空间算子理论的研究有着密切的关系，因此对于函数空间上乘子理论的研究，无论是系数乘子还是点乘子，许多国内外学者如 Sheldox Axler[10]，Keiji Izuchi[9]，Kehe Zhu[7][8]等都作过很多研究工作，其中 Kehe Zhu 讨论了 C^n 中有界对称域上 Bloch 空间和小 Bloch 空间上的点乘子. p－Bloch 空间是 Bloch 空间的推广，文[11]、[14]分别讨论了 C^n 中单位球上 p－Bloch 空间和 p-Bloch 空间与 Dirichlet 型空间之间的点乘子，至于 β_0^p 空间之间以及 H^∞到小 p－Bloch 空间的点乘子我们已在其他文章中作过讨论.

X 到 Y 的点乘子空间 $M(X,Y)=\{\varphi:$对一切 $f\in X$ 都有 $\varphi.f\in Y\}$，其中 X 和 Y 为任意复函数空间.

定理 2.1 $p\geqslant 1$ 时，$\varphi\in M(\beta_0^p,H^\infty)\Leftrightarrow\varphi\equiv 0$.

证明 设 $\varphi\in M(\beta_0^p,H^\infty)$，任取满足$\frac{1}{2}<|w|<1$ 的 w，当 $p>1$ 时，

令 $f_w(z)=\dfrac{z}{(1-z\overline{w})^{\frac{p-1}{2}}}$，有

$$f'_w(z)=\frac{1}{(1-z\overline{w})^{\frac{p-1}{2}}}+\frac{p-1}{2}\frac{z\overline{w}}{(1-z\overline{w})^{\frac{p+1}{2}}}\Rightarrow(1-|z|^2)^p|f'_w(z)|$$
$$\leqslant c(1-|z|^2)^{\frac{p+1}{2}}+c(1-|z|^2)^{\frac{p-1}{2}}\to(|z|\to1)\Rightarrow f_w\in\beta_0^p.$$

由于上述趋于 0 与 w 无关，从而由闭图像定理知，存在与 w 无关的常数 A 使
$$|\varphi(z)f_w(z)|\leqslant A,$$
取 $z=w$ 得$|\varphi(w)|\leqslant A(1-|w|^2)^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{|w|}\leqslant 2A(1-|w|^2)^{\frac{p-1}{2}}$，故有$|\varphi(w)|\to0(|w|\to1)$；

当 $p=1$ 时，令 $f_w(z)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(z\overline{w})^n}{n\log n}$，则

$$f'_w(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-1}\overline{w}^n}{\log n}\Rightarrow(1-|z|^2)|f'_w(z)|\leqslant 2(1-|z|)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|z|^{n-1}}{\log n}$$
$$=\frac{2|z|}{\log 2}-2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right)|z|^n,$$

因$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\log n}-\dfrac{1}{\log(n+1)}\right)$收敛，故上行右边级数在 $|z|\leqslant 1$ 上一致收敛

$$\Rightarrow\lim_{|z|\to1}(1-|z|^2)|f_w(z)|\leqslant 2\lim_{|z|\to1}\left\{\frac{|z|}{\log 2}-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right)|z|^2\right\}$$
$$=\frac{2}{\log 2}-2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right)=0\Rightarrow f_w\in\beta_0^1,$$

上述趋于 0 与 w 无关，因此存在与 w 无关的常数 B 使得 $|\varphi(w)|\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{|w|^{2n}}{n\log n}\leqslant B$，由于$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\log n}=\infty\Rightarrow|\varphi(w)|\to 0(|w|\to 1)$.

总之，当 $p\geqslant 1$ 时 $|\varphi(w)|\to 0(|w|\to 1)$，由极大模原理知 $\varphi\equiv 0$.

定理 2.2 $0<p<1$ 时，$M(\beta_0^p,H^\infty)=H^\infty$.

证明　设 $\varphi \in M(\beta_0^p, H^\infty)$，显然 $\varphi \in H^\infty \Rightarrow M(\beta_0^p, H^\infty) \subset H^\infty$. 反过来，设 $\varphi \in H^\infty$，任取 $f \in \beta_0^p \subset \beta^p$，则

$$
\begin{aligned}
|f'(z)| \leqslant \frac{c}{(1-|z|^2)^p} &\Rightarrow |f(z)| = \left|f(0) + z\int_0^1 f'(tz)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant |f(0)| + c\int_0^1 \frac{1}{(1-|tz|^2)^p}\mathrm{d}t \leqslant |f(0)| + c\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^p}\mathrm{d}t \\
&= |f(0)| + \frac{c}{1-p} \Rightarrow f \in H^\infty \Rightarrow \varphi f \in H^\infty \Rightarrow \varphi \in M(\beta_0^p, H^\infty) \\
&\Rightarrow H^\infty \subset M(\beta_0^p, H^\infty).
\end{aligned}
$$

3　关于小 p-Bloch 空间上复合算子的紧性

在文[1]中 Madigan 和 Matheson 就单位圆盘 D 上讨论了复合算子 $T_{1,\varphi}$ 在小 Bloch 空间 $\beta_0(D)$ 上的紧性，他们得到：

$T_{1,\varphi}$ 在 $\beta_0(D)$ 上为紧算子当且仅当 $\lim\limits_{|z|\to 1} \dfrac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}|\varphi'(z)| = 0$，下面我们在小 p-Bloch 空间上讨论 $T_{1,\varphi}$ 的紧性.

引理 3.1　$p > 0$，$\Delta = \{f : f \in \beta^p$ 且 $\|f\|_{\beta^p} \leqslant 2^p\}$ 是 β_0^p 中紧集的充要条件为

$$\lim_{|z|\to 1} \sup_{g\in\Delta} (1-|z|^2)^p |g'(z)| = 0.$$

证明　由 Montel's 定理和定义可证之，这里不再叙述.

定理 3.1　$p, q > 0$，设 φ 为 $D \to D$ 的一个全纯自映射，则 $T_{1,\varphi}$ 是 β_0^p 到 β_0^q 紧算子的充要条件为

$$\lim_{|z|\to 1} (1-|z|^2)^q \frac{|\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^p} = 0.$$

证明　若 $T_{1,\varphi}$ 是 β_0^p 到 β_0^q 的紧算子，由引理 3.1 知

$$\lim_{|z|\to 1} \sup_{\|f\|_{\beta^p}\leqslant 2^p} (1-|z|^2)^q |[f(\varphi(z))]'| = 0,$$

而 $(1-|z|^2)^q |[f(\varphi(z))]'| = \dfrac{(1-|z|^2)^q |\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^p}(1-|\varphi(z)|^2)^p |f'(\varphi(z))|$，由于对每个 $0 \neq w \in D$，可取 $f_0(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\overline{w}}\log\dfrac{1}{1-z\overline{w}} & p = 1 \\ \dfrac{(1-z\overline{w})^{1-p}-1}{(1-p)\overline{w}} & 0 < p \neq 1 \end{cases}$，有 $\|f_0\|_{\beta^p} \leqslant 2^p$ 且

$$(1-|w|^2)^p |f_0'(w)| = 1 \Rightarrow \sup_{\|f\|_{\beta^p}\leqslant 2^p} (1-|w|^2)^p |f'(w)| \geqslant 1,$$

故有

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{(1-|z|^2)^q |\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^p} = 0.$$

反过来，若 $\lim\limits_{|z|\to 1} \dfrac{(1-|z|^2)^q |\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^p} = 0$，则

$$\sup_{\|f\|_{\beta^p}\leqslant 2^p} (1-|z|^2)^q |[f(\varphi(z))]'| = \sup_{\|f\|_{\beta^p}\leqslant 2^p} \frac{(1-|z|^2)^q |\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^p}(1-|\varphi(z)|^2)^p |f'(\varphi(z))|$$

$$\leqslant 2^{p}\frac{(1-|z|^2)^q|\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^p}\to 0(|z|\to 1),$$

由引理 3.1 知 $T_{1,\varphi}$ 是 β_0^p 到 β_0^q 的紧算子.

推论 当 $\begin{cases}0<p<q\\ q>1\end{cases}$ 时,$T_{1,\varphi}$ 总是 β_0^p 到 β_0^q 的紧算子.

证明 因 $|\varphi(z)|<1$,由 Schwarz-Pick 引理知 $(1-|z|^2)|\varphi'(z)|\leqslant 1-|\varphi(z)|^2$.

(i) 当 $0<p\leqslant 1<q$ 时

$$\frac{(1-|z|^2)^q}{(1-|\varphi(z)|^2)^p}|\varphi'(z)|=\frac{(1-|z|^2)|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}(1-|z|^2)^{q-1}(1-|\varphi(z)|^2)^{1-p}$$
$$\leqslant (1-|z|^2)^{q-1}\to 0(|z|\to)$$

总成立,由定理 3.1 即得 $T_{1,\varphi}$ 总是 β_0^p 到 β_0^q 的紧算子;

(ii) 当 $q>p\geqslant 1$ 时,令 $g(z)=\dfrac{\varphi(z)-\varphi(0)}{1-\bar{\varphi}(0)\varphi(z)}$,则 $g(0)=0,|g(z)|<1$,由 Schwarz 引理知 $|g(z)|\leqslant|z|$,则

$$\frac{(1-|z|^2)^q}{(1-|\varphi(z)|^2)^p}|\varphi'(z)|=\frac{(1-|z|^2)^q|1+\bar{\varphi}(0)g(z)|^{2(p-1)}}{(1-|\varphi(0)|^2)^{p-1}(1-|g(z)|^2)^p}|g'(z)|$$
$$=\frac{(1-|z|^2)^{q-1}|1+\bar{\varphi}(0)g(z)|^{2(p-1)}}{(1-|\phi(0)|^2)^{p-1}(1-|g(z)|^2)^{p-1}}\frac{(1-|z|^2)|g'(z)|}{1-|g(z)|^2}$$
$$\leqslant\frac{(1-|z|^2)^{q-p}(1+|\varphi(0)|)^{2(p-1)}}{(1-|\varphi(0)|^2)^{p-1}}\to 0(|z|\to 1),$$

则由定理 3.1 和 $T_{1,\varphi}$ 总是 β_0^p 到 β_0^q 的紧算子.

参考文献:

[1] MADIGAN K,MATHESON A. *Composition operators on the Bloch space* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1995, **347**: 2679—2687.

[2] SHI J H, LUO L. *Composition operators on the Bloch space of several complex variables* [J]. Acta Math. Sinica, Einglish Series, 2000, **16**(1): 85—98.

[3] TIMONEY R. *Bloch function in several complex variables*, Ⅰ [J]. Bull. London Math. Soc., 1980, **12**: 241—267.

[4] TIMONEY R. *Bloch function in several complex variables*, Ⅱ [J]. J. Reine Angew. Math., 1980, **319**: 1—22.

[5] RUDIN W. *Founction Theory in the Unit Ball of* C^n[M]. Springer-Verlag, New York, 1980.

[6] HARDY G H. *Divergent Series* [M]. Oxford, at the Clarendon, 1949.

[7] ZHU K H. *Multipliers of BMO in the Bergman metric with applications to Toeplitz operators* [J]. J. Func. Anal., 1989, **87**: 31—50.

[8] ZHU K H. *Bloch type spaces of analytic functions* [J]. Rochy Mountain J. Math., 1993, **23**: 1143—1177.

[9] KEIJI I. *A function theoretic proof of Axlers zero multiplier theorem* [J]. Cand. Math. Bull., 1988, **31**: 117—120.

[10] AXLER S. *Zero multipliers of Bergman spaces* [J]. Canad. Math. Bull, 1985, **28**: 237—242.

[11] 张学军,王敏. C^n 中超球上 p-Bloch 空间的点乘子 [J]. 数学研究, 2001, **34**(2): 158—163.

ZHANG Xue-jun, WANG Min. *The pointwise multipliers of p-Block space in the unit ball of* C^n[J]. J. Math. Study, 2001, **34**(2): 158—163. (in Chinese)

[12] REN G B, SHI J H. *Bergman type operator on mixed spaces with applications* [J]. Chin. Ann. Math., Ser. B, 1997, **18**(3): 265—276.

[13] 张学军. p-Bloch 空间上的复合算子和加权复合算子 [J], 数学年刊 A 辑, 2003, **24**(6): 711—720.
ZHANG Xue-jun. *The composition operator and weighted composition operator on p-Bloch space* [J]. Chinese Ann. Math., Ser. A, 2003, **24**(6): 711—720. (in Chinese)

[14] ZHANG X J. *The pointwise multipliers of Bloch type space* β^p *and Dirichlet type space* D_p on the unit ball of C^n[J]. J. Math. Anal. Appl., 2003, **285**(2): 376—386.

Remarks on Spaces H^∞, β^p, and β_0^p on Complex Plane

ZHANG Xue-jun

(College of Math. Comp. Sci., Hunan Normal University, Changsha 410006, China)

Abstract: In this paper, we discuss the boundedness of the composition operator $T_{1,\varphi}$ and weighted composition operator $T_{\Psi,\varphi}$ from Hardy space H^∞ to p-Bloch space β^p on the unit disc, and obtain the sufficient and necessary condition. We study the pointwise multipliers from space β_0^p to H^∞ on the unit disc and the compactness of $T_{1,\varphi}$ from space β_0^p to β_0^q. We consider the boundedness of the composition operator $T_{1,\varphi}$ from H^∞ to little p-Bloch space, and obtain the sufficient and necessary condition.

Key words: boundedness; weighted composition operator; pointwise multiplier; compact operator.