第 24 卷第 4 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 24 No. 4
2004年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 2004

Baskakov 型算子加权逼近下的 Stechkin-Marchaud 不等式*

王建军[1]，　薛银川[2]

(1. 西安交通大学理学院信息与系统科学研究所，陕西 西安 710049；
2. 宁夏大学数学计算机学院，宁夏 银川 750021)

摘　要：本文利用 K-泛函与光滑模的等价性，研究了 Baskakov 型算子加 Jacobi 权逼近下的 Stechkin-Marchaud 不等式，并得到了 Baskakov 型算子关于 $\omega_\varphi^2(f,t)_w$ 的逆结果.

关键词：Baskakov 型算子；Steckin-Marchaud 不等式；加权逼近.

分类号：AMS(2000) 41A36, 41A25/CLC number: O174.41

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2004)04-0710-05

1　引　言

设 $v_{n,k}(x)=C_{n+k-1}^k x^k(1+x)^{-(n+k)}$，则

$$V_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty} f(\frac{k}{n})v_{n,k}(x),\quad f\in C_B[0,\infty)$$

称为 Baskakov 算子，此处 $C_B[0,\infty)$ 表示在 $[0,\infty)$ 上连续且有界的函数的全体. 1989 年，M. Heilmann[1]引进了 $V_n(f;x)$ 的 Durrmeyer 变形算子：

$$D_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty} v_{n,k}(x)(n-1)\int_0^{\infty} v_{n,k}(t)f(t)\mathrm{d}t,\quad f\in L_p[0,\infty).$$

文献[2]中研究了这两种算子的加 Jacobi 权逼近，得到了加权逼近时的等价特征定理. Jacobi 权函数为 $\omega(x)=x^{\alpha}(1+x)^{\beta}$（不同的算子可能在不同的 α,β 下才有界），$\varphi^2(x)=x(1+x)$，我们引进如下的 K-泛函

$$K_\varphi^2(f,t)_w=\inf_{g\in W}\{\|f-g\|_w+t^2\|\varphi^2 g''\|_w\},$$

其中 $W=\{f\,|\,\omega f\in L_\infty[0,\infty),f'\in A.C_{\mathrm{loc}},\omega\varphi^2 f''\in L_\infty[0,\infty)\}$.

带权光滑模 $\omega_\varphi^2(f,t)_w=\sup_{0<h\leqslant t}\|\Delta_{h\varphi}^2 f\|_w$，其中 $\|f\|_w=\sup_{x\in[0,\infty)}|\omega(x)f(x)|$，$r$ 阶差分为

* 收稿日期：2002-01-07
基金项目：宁夏大学科研基金资助项目(032105).
作者简介：王建军(1976-)，男，博士研究生.

$$\Delta_{h\varphi}^r f(x)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_r^k f(x+(\frac{r}{2}-k)h\varphi(x)), & x+(\frac{r}{2}-k)h\varphi(x)\in[0,\infty)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

由文献[3]知，K-泛函和光滑模等价. 即存在 $M>0$,使得

$$M^{-1}\omega_\varphi^2(f,t^{\frac{1}{2}})_\omega\leqslant K_\varphi^2(f;t)_\omega\leqslant M\omega_\varphi^2(f,t^{\frac{1}{2}})_\omega.$$

本文讨论这两种算子加 Jacobi 权逼近下的 Stechkin-Marchaud 不等式(本文出现 M 是与 f,n, x 无关的正常数).

2 $D_n(f;x)$ 加 Jacobi 权逼近时的 Stechkin-Marchaud 不等式

设 $-\frac{1}{p}<\alpha<1-\frac{1}{p}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, β 为任意实数，文献[2]证明了在 $\|\cdot\|_\omega$ 范数和此 α,β 下 $D_n(f;x)$ 是有界的，我们通过此范数得到 Stechkin-Marchaud 不等式.

首先通过文献[2]有下面两个引理

引理 1 设 $\omega f\in L_\infty[0,\infty)$,则 $\|\varphi^2 D_n'' f\|_\omega\leqslant Mn\|f\|_\omega$.

引理 2 设 $f\in W$,则 $\|\varphi^2 D_n'' f\|_\omega\leqslant M\|\varphi^2 f''\|_\omega$.

引理 3 若 $\alpha>-1$, β 为任意实数, $h>0$, $x\geqslant h\varphi(x)$,则

$$\omega(x)\int_0^{h\varphi}\int_0^{h\varphi}(x+u+v)^{-\alpha-1}(1+x+u+v)^{-\beta-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\leqslant Mh^2.$$

证明 显然 $-\alpha-1<0$.

(1) 若 $-1-\beta\leqslant 0$,则

$$\begin{aligned}&\omega(x)\int_0^{h\varphi}\int_0^{h\varphi}(x+u+v)^{-\alpha-1}(1+x+u+v)^{-\beta-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ \leqslant\ &\omega(x)\int_0^{h\varphi}\int_0^{h\varphi}x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\leqslant h^2.\end{aligned}$$

(2) 若 $-1-\beta>0$,由于 $x\geqslant h\varphi(x)$,从而

$$\begin{aligned}&\omega(x)\int_0^{h\varphi}\int_0^{h\varphi}(x+u+v)^{-\alpha-1}(1+x+u+v)^{-\beta-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ \leqslant\ &\omega(x)\int_0^{h\varphi}\int_0^{h\varphi}x^{-\alpha-1}(1+x+2h\varphi)^{-\beta-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ \leqslant\ &h^2(\frac{1+x+2h\varphi}{1+x})^{-\beta-1}\leqslant 3^{-\beta-1}h^2\end{aligned}$$

即引理结果.

引理 4[4] 设 $\{\mu_n\}$, $\{v_n\}$, $\{\varphi_n\}$ 均为非负数列，且 $\mu_1=v_1=0\,(0<r<s)$. 若对于 $n\in N$ 成立:

$$\mu_n\leqslant(\frac{k}{n})^r\mu_k+M(v_k+\varphi_k),\quad 1\leqslant k\leqslant n,$$

$$v_n\leqslant(\frac{k}{n})^s v_k+M\varphi_k,\quad 1\leqslant k\leqslant n,$$

则

$$\mu_n \leqslant M(s)n^{-r}\sum_{k=1}^{n}k^{r-1}\varphi_k.$$

定理 1 设 $f\in W$，则存在 $0\leqslant\delta<1$，使得

$$\omega_\varphi^2(f,\frac{1}{\sqrt{n}})_\omega \leqslant M\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|D_k(f)-f\|_\omega.$$

证明 令 $\sigma_n=M\frac{1}{n}\|\varphi^2D_n''f\|_\omega$，$\varphi_n=M\|D_nf-f\|_\omega$，则 $\sigma_1=0$，对 $1\leqslant k\leqslant n$，由引理 1，引理 2 得，

$$\begin{aligned}\sigma_n &\leqslant \frac{1}{n}\|\varphi^2D_n''D_kf\|_\omega+\frac{1}{n}\|\varphi^2D_n''(D_kf-f)\|_\omega\\ &\leqslant M\frac{1}{n}\|\varphi^2D_k''f\|_\omega+M\|D_kf-f\|_\omega\\ &\leqslant \frac{k}{n}\sigma_k+\varphi_k.\end{aligned}$$

利用引理 4（$v_n=0$ 的情况）得 $\sigma_n\leqslant M\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k$，即

$$\|\varphi^2D_n''f\|_\omega\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\|D_kf-f\|_\omega.$$

当 $n\geqslant2$ 时，存在 $m\in N$，使得 $\frac{n}{2}\leqslant m\leqslant n$ 且 $\|D_m(f)-f\|_\omega=\min\limits_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n}\|D_k(f)-f\|_\omega$，因此

$$\|D_m(f)-f\|_\omega\leqslant\frac{2}{n}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n}\|D_k(f)-f\|_\omega.$$

于是由 K-泛函和光滑模等价性得，

$$\begin{aligned}\omega_\varphi^2(f,\frac{1}{\sqrt{n}})_\omega &\leqslant MK_\varphi^2(f,\frac{1}{n})_\omega\leqslant M\{\|D_m(f)-f\|_\omega+\frac{1}{n}\|\varphi^2D_m''f\|_\omega\}\\ &\leqslant M\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|D_kf-f\|_\omega.\end{aligned}$$ □

利用定理 1 我们可以得出 $D_n(f;x)$ 算子关于 $\omega_\varphi^2(f,t)_\omega$ 的逆结果.

定理 2 若 $f(x)\in W$，$0<l<2$，则有 $\omega(x)|D_nf-f|=O(n^{-\frac{l}{2}})\Rightarrow\omega_\varphi^2(f,t)_\omega=O(t^{\frac{1}{2}})$.

证明 $\omega(x)|D_nf-f|\leqslant Mn^{-\frac{l}{2}}\Rightarrow\omega(x)|D_kf-f|\leqslant Mk^{-\frac{1}{2}}$. 由定理 1 之证明得

$$\begin{aligned}K_\varphi^2(f,\frac{1}{n})_\omega &\leqslant M\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|D_kf-f\|_\omega\leqslant M\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^{-\frac{1}{2}}\\ &\leqslant Mn^{-\frac{l}{2}},(\sum_{k=1}^{n}k^{-\frac{l}{2}}\leqslant Mn^{1-\frac{l}{2}}),\end{aligned}$$

当 $t\leqslant1$ 时，取 $t\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$ 由上式知，

$$K_\varphi^2(f,t)_\omega\leqslant K_\varphi^2(f,\frac{1}{n})_\omega\leqslant Mn^{-\frac{l}{2}}\leqslant Mt^{\frac{l}{2}} \tag{1}$$

而 $|\omega(x)\Delta_{h\varphi}^2|\leqslant|\omega(x)\Delta_{h\varphi}^2(f-g)|+|\omega(x)\Delta_{h\varphi}^2g|$，其中第一项，由 $\varphi(x)$ 的单调性和 $x\geqslant h\varphi(x)$ 得

$$|\omega(x)\Delta_{h\varphi}^2(f-g)|\leqslant M\|f-g\|_\omega.$$

第二项，由引理 3 得，

$$|\omega(x)\Delta_{h\varphi}^2 g| = |\omega(x)\int_0^{h\varphi}\int_0^{h\varphi} g''(x+u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v|$$

$$\leqslant \|\varphi^2 g''\|_{\omega}\omega(x)\int_0^{h\varphi}\int_0^{h\varphi}\omega^{-1}(x+u+v)\varphi^{-2}(x+u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\leqslant \|\varphi^2 g''\|_{\omega}\omega(x)\int_0^{h\varphi}\int_0^{h\varphi}(x+u+v)^{-\alpha-1}(1+x+u+v)^{-\beta-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\leqslant M\|\varphi^2 g''\|_{\omega}h^2.$$

另外，由 K-泛函的定义知存在 $g\in W$，使得 $\|f-g\|_{\omega}+t^2\|\varphi^2 g''\|_{\omega}\leqslant 2K_{\varphi}^2(f,t)_{\omega}$. 于是由(1)式可知：

$$|\omega(x)\Delta_{h\varphi}^2 f|\leqslant |\omega(x)\Delta_{h\varphi}^2(f-g)|+|\omega(x)\Delta_{h\varphi}^2 g|$$

$$\leqslant M\{\|f-g\|_{\omega}+\|\varphi^2 g''\|_{\omega}h^2\}$$

$$\leqslant MK_{\varphi}^2(f,h)_{\omega}\leqslant Mh^{\frac{l}{2}}$$

由此即得定理结论.

3 $V_n(f;x)$ 加 Jacobi 权逼近时的 Stechkin-Marchaud 不等式

设 $0<\alpha<1,\beta<0,C_{\alpha,\beta}=\{f|f\in C_B[0,\infty),\omega f\in L_{\infty}[0,\infty)\}$，由于在范数 $\|\omega f\|_{\infty}=\sup\limits_x|\omega f|$ 下，文献[2]已证得 $V_n(f;x)$ 是无界的. 同时引进一种新的加权范数：$\|f\|_{\omega}=\|\omega f\|_{\infty}+|f(0)|$，并证明了在此范数和 α,β 下 $V_n(f;x)$ 是有界的. 我们也是利用该范数得到 Stechkin-Marchaud 不等式，由于 $V_1''(f;x)\neq 0$，所以处理方法与上面不同. 首先有，

引理 5[2] 设 $f\in C_{\alpha,\beta}$，则 $\|\varphi^2 V_n''f\|_{\omega}\leqslant Mn\|f\|_{\omega}$.

定理 3 若 $f\in C_{\alpha,\beta}$，则有 $\omega_{\varphi}^2(f,\frac{1}{\sqrt{n}})_{\omega}\leqslant M\frac{1}{n}\{\sum\limits_{k=1}^{n}\|V_k(f)-f\|_{\omega}+\|f\|_{\omega}\}$.

证明 若 $n\geqslant 2$，则存在 $m\in N$，使 $\frac{n}{2}\leqslant m\leqslant n$，且

$$\|V_m(f)-f\|_{\omega}=\min_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n}\|V_k(f)-f\|_{\omega},$$

故

$$\|V_m(f)-f\|_{\omega}\leqslant\frac{2}{n}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n}\|V_k(f)-f\|_{\omega}.$$

由 K-泛函定义及引理 5 得

$$K_{\varphi}^2(f,\frac{1}{n})_{\omega}\leqslant\|V_m(f)-f\|_{\omega}+\frac{1}{n^2}\|\varphi^2 V_m''(f)\|_{\omega}$$

$$\leqslant\frac{2}{n}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n}\|V_k(f)-f\|_{\omega}+M\frac{1}{n}\|f\|_{\omega}$$

$$\leqslant M\frac{1}{n}\{\sum_{k=1}^{n}\|V_k(f)-f\|_{\omega}+\|f\|_{\omega}\}.$$

由 K-泛函和光滑模等价性，可得到定理的结论.

利用定理 3，我们可以得出 $V_n(f;x)$算子关于 $\omega_\varphi^2(f,t)_\omega$ 的逆结果.

定理 4 若 $f(x)\in W, 0<l<2$,则有

$$\omega(x)\,|V_nf-f| = O(n^{-\frac{l}{2}}) \Rightarrow \omega_\varphi^2(f,t)_\omega = O(t^{\frac{l}{2}}).$$

证明 $\omega(x)\,|V_nf-f|\leqslant Mn^{-\frac{l}{2}} \Rightarrow \omega(x)\,|V_kf-f|\leqslant Mk^{-\frac{l}{2}}$.

由定理 3 之证明得

$$\begin{aligned} K_\varphi^2(f,\frac{1}{n})_\omega &\leqslant M\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\|V_k(f)-f\|_\omega + \|f\|_\omega\} \\ &\leqslant M\frac{1}{n}\{\sum_{k=1}^{n}k^{-\frac{l}{2}} + \|f\|_\omega\} \\ &\leqslant Mn^{-\frac{l}{2}}, \end{aligned}$$

其余处理类似于定理 2 的处理，可完成定理的证明.

参考文献：

[1] HEILMANN M. *Direct and converse results for operators of Baskakov-Durrmeyer type* [J]. Approx Theory & Its Application, 1989, **5**(1): 105—127.

[2] 宣培才. 关于 Baskakov 型算子的加权逼近 [J]. 数学年刊 A 辑，1995，**16**(5)：614—624.
XUAN Pei-cai. *On weighted approximation for Baskakov-type operators* [J]. Chinese. Ann. Math., Ser. A, 1995, **16**(5): 614—624. (in Chinese)

[3] DITZIAN Z, TOTIK V. *Moduli of Smoothness* [M]. Spinger-Verlag, Berlin, Heideberg, New York, 1987.

[4] WICKEREN V. *Weak-type inequalities for Kantorovich polynomials and related operators* [J]. Indag Math., 1987, **49**: 111—120.

Stechkin-Marchaud Type Inequalities of Weighted Approximation for Baskakov-type Operators

WANG Jian-jun[1], XUE Yin-chuan[2]

(1. Institute for Information and System Science, Xi'an Jiaotong University, Shaanxi 710049, China;
2. School of Mathematics & Computer Science, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: Using the equivalence relation between K-functional and moduli of smoothness , the Stechkin-Marchaud type inequality of weighted approximation for Baskakov-type operators are established. Moreover, the inverse result of Baskakov-type operators with $\omega_\varphi^2(f,t)_\omega$ is obtained.

Key words: Baskakov-type operators; Stechkin-Marchaud-type inequalities; weighted approximation.