第 24 卷第 4 期 2004 年 11 月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 24 No. 4 Nov. 2004

具有广义可行性余弦序列的 $E_1 \circ E_d$ 型距离正则图*

高锁刚
(河北师范大学数学系，河北 石家庄 050016)

摘　要：给出了具有广义可行性余弦序列的 $E_1 \circ E_d$ 型距离正则图的特征，并计算了这类图的交叉数.

关键词：距离正则图；广义可行性的余弦序列；$E_1 \circ E_d$ 型的距离正则图.
分类号：AMS(2000) 05E30/CLC number：O157.3
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2004)04-0733-07

1 引　言

设 $\Gamma=(X,R)$ 是一个没有圈和重边的，有限无向连通图，这里 X 是顶点集，R 是边集. 又设 Γ 的直径为 $d:=\max\{\partial(x,y)\mid x,y\in X\}$，其中 ∂ 是距离函数. 我们称 Γ 是距离正则图，如果对所有整数 $h,i,j(0\leqslant h,i,j\leqslant d)$ 和 $x,y\in X,\partial(x,y)=h$

$$p^h_{i,j}=|\{z\in X\mid\partial(x,z)=i,\partial(y,z)=j\}|$$

与 x,y 无关. 这些整数 $p^h_{i,j}$ 叫做 Γ 的交叉数. 我们简写 $a_i=p^i_{1,i},(0\leqslant i\leqslant d),b_i=p^i_{1,i+1}(0\leqslant i\leqslant d-1)$，$c_i=p^i_{1,i-1}(1\leqslant i\leqslant d)$，且 $k:=k_1=b_0,c_0=0,b_d=0$.

设 $\mathrm{Mat}_X(C)$ 表示复数域 C 上的矩阵代数，其中矩阵的行与列由 X 标定. 对每个 $i(0\leqslant i\leqslant d)$，设 A_i 表示 $\mathrm{Mat}_X(C)$ 中的矩阵，其 (x,y) 元素为

$$(A_i)_{xy}=\begin{cases}1 & \text{若 } \partial(x,y)=i,\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$$

A_i 叫做 Γ 的第 i 个距离矩阵. 记 $A:=A_1$，用 M 表示由 A 生成的 $\mathrm{Mat}_X(C)$ 的子代数. 我们称 M 为 Γ 的 Bose-Mesner 代数. 熟知，$A_0,A_1,\cdots,A_d$ 组成 M 的一个基. 由[1]知 M 还有另一个基 $E_0,E_1,\cdots,E_d$，且 $E_0,E_1,\cdots,E_d$ 叫做 Γ 的本原幂等元. 设 Γ 是直径 $d\geqslant 3$ 的距离正则图. 称 Γ 为紧距离正则图[2]，如果 Γ 不是二部图并且下式成立：

$$\left(\theta_1+\frac{k}{a_1+1}\right)\left(\theta_d+\frac{k}{a_1+1}\right)=\frac{-ka_1b_1}{(a_1+1)^2}.$$

* 收稿日期：2003-02-21
基金项目：河北省自然科学基金(102132)，河北师范大学博士基金资助项目.
作者简介：高锁刚(1958-)，男，博士，教授.

由文献[2,定理8.3]和[3,定理2],紧距离正则图又等价于具有条件 $E_1\circ E_d=\alpha E_{d-1}$($\alpha$ 是实数)的距离正则图.文[4]讨论了 $E_1\circ E_d$ 型的距离正则图. 所谓 $E_1\circ E_d$ 型的距离正则图就是满足条件 $E_1\circ E_d=\lambda_1 E_h+\lambda_2 E_l$,其中 $\lambda_1\geqslant 0,\lambda_2\geqslant 0$ 的非二部距离正则图.本文是[4]的继续,讨论了 $E_1\circ E_d$ 型距离正则图的广义可行性,并计算了这类图的参数.为此再介绍一些相关结果.

设 $\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_d\in C$,且满足

$$A=\sum_{i=0}^{d}\theta_i E_i.$$

熟知 $\theta_0=k$ 且 $\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_d$ 是不同实数,$-k\leqslant\theta_i\leqslant k,(0\leqslant i\leqslant d)$[5,p197].
我们称 θ_i 是 Γ 的与 E_i 相对应的特征值,θ_0 为平凡特征值.对每个整数 $i(0\leqslant i\leqslant d)$,设 m_i 表示 E_i 的秩.我们称 m_i 是 E_i(或 θ_i)的重数.

设 θ 表示 Γ 的一个特征值,E 表示与其对应的本原幂等元,m 表示 E 的重数.由[5]知,存在 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 使得

$$E=|X|^{-1}m\sum_{i=0}^{d}\sigma_i A_i.$$

由[5]知,$\sigma_0=1$.我们称 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 为 Γ 的与 E(或 θ)对应的余弦序列.由[5]知,E_0 的余弦序列全由1组成.我们记 $\sigma=\sigma_1$.

定义1[2,定义9.2] 设 Γ 是直径 $d\geqslant 3$ 的紧距离正则图,具有特征值 $\theta_0>\theta_1>\cdots>\theta_d$.设 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 是 Γ 的任意余弦序列,θ 是与其对应的特征值.我们称 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$(或 θ)是可行性的,如果下列两条件成立:

i) θ 是 θ_1,θ_d 中之一.

ii) 对每个 $1\leqslant i\leqslant d-1$,都有 $\sigma_{i-1}\neq\sigma_{i+1}$.

设 θ' 是 θ 在 $\{\theta_1,\theta_d\}$ 中的余.A. Jurišić 等在文献[2]中证明了 $\sigma_{i-1}\neq\sigma_{i+1}$ 等价于 $\sigma_{i-1}\neq\epsilon\sigma_i$,也等价于 $\sigma_{i+1}\neq\epsilon\sigma_i$.这里 $1\leqslant i\leqslant d-1$,$\epsilon=\dfrac{1-\sigma\rho}{\sigma-\rho}$ 为辅助参数,$\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_d$ 是与 θ' 对应的余弦序列.继而得到下列深刻特征定理.

命题1[2,定理9.3] 设 Γ 是直径 $d\geqslant 3$ 的非二部距离正则图,具有特征值 $\theta_0>\theta_1>\cdots>\theta_d$.设 θ,θ' 是 Γ 的任意特征值,与 θ,θ' 相对应的余弦序列分别是 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 和 $\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_d$.又设 $\epsilon=\dfrac{1-\sigma\rho}{\sigma\text{-}\rho}$.那么下列论述等价:

i) Γ 是紧的距离正则图,θ 是可行性的,θ' 是 θ 在 $\{\theta_1,\theta_d\}$ 中的余,ϵ 为辅助参数.

ii) θ' 是非平凡的

$$\rho_i=\prod_{k=1}^{i}\frac{\sigma_{k-1}-\epsilon\sigma_k}{\sigma_k-\epsilon\sigma_{k-1}}\quad 0\leqslant i\leqslant d,$$

且上式中的分母都不为零.

为在 $E_1\circ E_d$ 型的距离正则图中讨论与命题1相类似的结果,我们给出如下定义.

定义2 设 Γ 是直径 $d\geqslant 3$ 的 $E_1\circ E_d$ 型的距离正则图,具有特征值 $\theta_0>\theta_1>\cdots>\theta_d$.又设 $E_0,E_1,\cdots,E_d$ 是 Γ 的本原幂等元,$1',d'$ 是 $1,d$ 的一个置换.与 $\theta_{1'},\theta_{d'}$ 相对应的余弦序列分别是 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 和 $\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_d$.我们称余弦序列 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$(或 $\theta_{1'}$),是广义可行性的,如果对每

个 $1 \leqslant i \leqslant d$，下列条件成立：

i) $\sigma_i - \varepsilon_1\sigma_{i-1} \neq 0$，这里 $\varepsilon_1 = \dfrac{\lambda - \sigma\rho}{\lambda(\sigma - \rho)}$，$0 < \lambda \leqslant 1$，若 $E_h \neq E_0, E_l \neq E_0$，

ii) $\sigma_i - \dfrac{\varepsilon_0\sigma_{i-1}}{1-\lambda} \neq 0$，这里 $\varepsilon_0 = \dfrac{1-\sigma\rho}{\sigma-\rho}$，$0 \leqslant \lambda < 1$，若 $E_h = E_0$，

iii) $\sigma_i - \dfrac{\varepsilon_0\sigma_{i-1}}{\lambda} \neq 0$，这里 $\varepsilon_0 = \dfrac{1-\sigma\rho}{\sigma-\rho}$，$0 < \lambda \leqslant 1$，若 $E_l = E_0$.

注记 在定义 2 中令 $\theta = \theta_{1'}, \theta' = \theta_{d'}$，$2 \leqslant i \leqslant d$ 且当 $E_h \neq E_0$ 时，令 $\lambda = 1$，或 $E_h = E_0$ 时，令 $\lambda = 0$，那么定义 2，即为定义 1.

2 主要结果及证明

命题 2[4] 设 Γ 是直径 $d \geqslant 3$ 的距离正则图，具有特征值 $\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d$. 与本元幂等元 E, F, E_h, E_l 相对应的余弦序列分别是 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_d$，$\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_d$，$\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_d$，和 $\gamma'_0, \gamma'_1, \cdots, \gamma'_d$.

那么下列论述等价：

i) Γ 是 $E_1 \circ E_d$ 型的距离正则图，辅助参数 $\varepsilon_0 = (\sigma\rho - 1)/(\rho - \sigma)$，$\varepsilon_1 = (\lambda - \sigma\rho)/\lambda(\sigma - \rho)$，$\varepsilon_2 = (1-\lambda)\gamma'/(\gamma - 1)$，$\varepsilon_3 = (1-\lambda)(\lambda\gamma' - \sigma\rho)/\lambda(\gamma' - 1)$，$0 \leqslant \lambda \leqslant$ i.

ii) E, F 是 E_1, E_d 的一个置换，且

$\sigma_i\rho_i - \sigma_{i-1}\rho_{i-1} =$

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon_0}{1-\lambda}(\sigma_{i-1}\rho_i - \sigma_i\rho_{i-1}) - \lambda(\gamma' - 1)\Phi_i, & \text{若 } E_h = E_0, 0 \leqslant \lambda < 1, \\ \dfrac{\varepsilon_0}{\lambda}(\sigma_{i-1}\rho_i - \sigma_i\rho_{i-1}) - (1-\lambda)(\gamma - 1)\Phi_i, & \text{若 } E_l = E_0, 0 < \lambda \leqslant 1, \\ \varepsilon_1(\sigma_{i-1}\rho_i - \sigma_i\rho_{i-1}) - \varepsilon_2(\gamma_i - \gamma_{i-1}) + \varepsilon_3(\gamma'_i - \gamma'_{i-1}), & \text{若 } E_h \neq E_0, E_l \neq E_0, 0 < \lambda \leqslant 1, \end{cases}$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant d$，$\Phi_i = \dfrac{c_1\cdots c_{i-1}}{b_1\cdots b_{i-1}}\sum_{h=0}^{i-1}k_h$.

定理 1 设 Γ 是直径 $d \geqslant 3$ 的非二部距离正则图，具有特征值 $\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d$. $1', d'$ 是 $1, d$ 的一个置换. 与 $\theta_{1'}, \theta_{d'}$ 相对应的余弦序列分别是 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_d$ 和 $\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_d$. 那么下列论述等价：

i) Γ 是 $E_1 \circ E_d$ 型的距离正则图，$\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_d$ 是广义可行性的，辅助参数 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 与命题 2 中的相同.

$$\text{ii) } \rho_i = \begin{cases} D_i - \varepsilon_2 H_i + \varepsilon_3 L_i, & \text{若 } E_h \neq E_0, E_l \neq E_0, 0 < \lambda \leqslant 1, \\ D_i^* - \lambda(\gamma' - 1)H_i^*, & \text{若 } E_h = E_0, 0 \leqslant \lambda < 1, \\ D'_i - (1-\lambda)(\gamma - 1)H'_i, & \text{若 } E_l = E_0, 0 < \lambda \leqslant 1. \end{cases} \tag{1}$$

这里

$$1 \leqslant i \leqslant d, D_i = \prod_{j=1}^{i}\frac{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_j}{\sigma_j - \varepsilon_1\sigma_{j-1}},$$

$$H_i = \frac{1}{\sigma_i - \varepsilon_1\sigma_{i-1}}\Big[\gamma_i - \gamma_{i-1} + \sum_{t=2}^{i}\prod_{j=t}^{i}\frac{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_j}{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_{j-2}}(\gamma_{j-1} - \gamma_{j-2})\Big],$$

$$L_i = \frac{1}{\sigma_i - \varepsilon_1\sigma_{i-1}}[\gamma'_i - \gamma'_{i-1} + \sum_{t=2}^{i}\prod_{j=t}^{i}\frac{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_j}{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_{j-2}}(\gamma'_{j-1} - \gamma'_{j-2})],$$

$$D_i^* = \prod_{j=1}^{i}\frac{\sigma_{j-1} - \varepsilon_0\sigma_j/(1-\lambda)}{\sigma_j - \varepsilon_0\sigma_{j-1}/(1-\lambda)},$$

$$H_i^* = \frac{1}{\sigma_i - \frac{\varepsilon_0\sigma_{i-1}}{1-\lambda}}[\Phi_i + \sum_{t=2}^{i}\prod_{j=t}^{i}\frac{\sigma_{j-1} - \frac{\varepsilon_0\sigma_j}{1-\lambda}}{\sigma_{j-1} - \frac{\varepsilon_0\sigma_{j-2}}{1-\lambda}}\Phi_{j-1}]$$

$$H'_i = \frac{1}{\sigma_i - \frac{\varepsilon_0\sigma_{i-1}}{\lambda}}[\Phi_i + \sum_{t=2}^{i}\prod_{j=t}^{i}\frac{\sigma_{j-1} - \frac{\varepsilon_0\sigma_j}{\lambda}}{\sigma_{j-1} - \frac{\varepsilon_0\sigma_{j-2}}{\lambda}}\Phi_{j-1}],$$

其中 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\Phi_j$ 与命题 2 中的相同，并且(1) 中的分母不为零.

证明 只证 E_h,E_l 都不是平凡本原幂等元的情形. 当 $E_h = E_0$ 或 $E_l = E_0$ 时，证明类似.

i)⇒ii) 设 Γ 是 $E_1 \circ E_d$ 型的距离正则图，由命题 2 得

$$\sigma_i\rho_i - \sigma_{i-1}\rho_{i-1} = \varepsilon_1(\sigma_{i-1}\rho_i - \sigma_i\rho_{i-1}) - \varepsilon_2(\gamma_i - \gamma_{i-1}) + \varepsilon_3(\gamma'_i - \gamma'_{i-1}),$$

即

$$\rho_i(\sigma_i - \varepsilon_1\sigma_{i-1}) = \rho_{i-1}(\sigma_{i-1} - \varepsilon_1\sigma_i) - \varepsilon_2(\gamma_i - \gamma_{i-1}) + \varepsilon_3(\gamma'_i - \gamma'_{i-1}).$$

由于 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 是广义可行性的，故 $\sigma_i - \varepsilon_1\sigma_{i-1} \neq 0, 1 \leqslant i \leqslant d$.

于是，

$$\rho_i = \frac{\sigma_{i-1} - \varepsilon_1\sigma_i}{\sigma_i - \varepsilon_1\sigma_{i-1}}\rho_{i-1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_i - \varepsilon_1\sigma_{i-1}}(\gamma_i - \gamma_{i-1}) + \frac{\varepsilon_3}{\sigma_i - \varepsilon_1\sigma_{i-1}}(\gamma'_i - \gamma'_{i-1}).$$

归纳可得，

$$\rho_i = D_i - \varepsilon_2 H_i + \varepsilon_3 L_i,$$

其中，

$$D_i = \prod_{j=1}^{i}\frac{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_j}{\sigma_j - \varepsilon_1\sigma_{j-1}},$$

$$H_i = \frac{1}{\sigma_i - \varepsilon_1\sigma_{i-1}}[\gamma_i - \gamma_{i-1} + \sum_{t=2}^{i}\prod_{j=t}^{i}\frac{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_j}{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_{j-2}}(\gamma_{j-1} - \gamma_{j-2})],$$

$$L_i = \frac{1}{\sigma_i - \varepsilon_1\sigma_{i-1}}[\gamma'_i - \gamma'_{i-1} + \sum_{t=2}^{i}\prod_{j=t}^{i}\frac{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_j}{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_{j-2}}(\gamma'_{j-1} - \gamma'_{j-2})],$$

而 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 与命题 2 中的相同.

ii)⇒i) 我们只需证明命题 2 中的 ii)成立. 因为，

$$\begin{aligned}
(\sigma_i - \varepsilon_1\sigma_{i-1})\rho_i &= (\sigma_i - \varepsilon_1\sigma_{i-1})(D_i - \varepsilon_2 H_i + \varepsilon_3 L_i)\\
&= (\sigma_{i-1} - \varepsilon_1\sigma_i)\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_j}{\sigma_j - \varepsilon_1\sigma_{j-1}} - \varepsilon_2[\gamma_i - \gamma_{i-1} + \sum_{t=2}^{i}\prod_{j=t}^{i}\frac{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_j}{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_{j-2}}(\gamma_{j-1} - \gamma_{j-2})] +\\
&\quad \varepsilon_3[\gamma'_i - \gamma'_{i-1} + \sum_{t=2}^{i}\prod_{j=t}^{i}\frac{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_j}{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_{j-2}}(\gamma'_{j-1} - \gamma'_{j-2})]\\
&= (\sigma_{i-1} - \varepsilon_1\sigma_i)[\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\sigma_{j-1} - \varepsilon_1\sigma_j}{\sigma_j - \varepsilon_1\sigma_{j-1}} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_{i-1} - \varepsilon_1\sigma_{i-2}}(\gamma_{i-1} - \gamma_{i-2} +
\end{aligned}$$

$$\sum_{t=2}^{i-1}\prod_{j=t}^{i-1}\frac{\sigma_{j-1}-\varepsilon_1\sigma_j}{\sigma_{j-1}-\varepsilon_1\sigma_{j-2}}(\gamma_{j-1}-\gamma_{j-2}))+$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\sigma_{i-1}-\varepsilon_1\sigma_{i-2}}(\gamma'_{i-1}-\gamma'_{i-2}+\sum_{t=2}^{i-1}\prod_{j=t}^{i-1}\frac{\sigma_{j-1}-\varepsilon_1\sigma_j}{\sigma_{j-1}-\varepsilon_1\sigma_{j-2}}(\gamma'_{j-1}-\gamma'_{j-2}))]-$$

$$\varepsilon_2(\gamma_i-\gamma_{i-1})+\varepsilon_3(\gamma'_i-\gamma'_{i-1})$$

$$=(\sigma_{i-1}-\varepsilon_1\sigma_i)(D_{i-1}-\varepsilon_2H_{i-1}+\varepsilon_3L_{i-1})-\varepsilon_2(\gamma_i-\gamma_{i-1})+\varepsilon_3(\gamma'_i-\gamma'_{i-1})$$

$$=(\sigma_{i-1}-\varepsilon_1\sigma_i)\rho_{i-1}-\varepsilon_2(\gamma_i-\gamma_{i-1})+\varepsilon_3(\gamma'_i-\gamma'_{i-1}),$$

这里 $1\leqslant i\leqslant d$. 因此,Γ 是 $E_1\circ E_d$ 型的距离正则图. 而由于(1) 中的分母都不为零,故,$\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 是广义可行性的. 证毕.

注记 在定理 1 中令 $\theta=\theta_{1'},\theta'=\theta_{d'}$,且当 $E_h\neq E_0$ 时,令 $\lambda=1$,或 $E_h=E_0$ 时,令 $\lambda=0$,并注意这时 $\varepsilon=\varepsilon_0$,即可得到命题 1,或[2],定理 9.3.

下面,我们计算具有广义可行性余弦序列的 $E_1\circ E_d$ 型距离正则图的交叉数. 首先我们给出一般距离正则图交叉数的计算公式.

命题 3[2,引理10.1] 设 Γ 是直径 $d\geqslant 3$ 的距离正则图,具有特征值 $\theta_0>\theta_1>\cdots>\theta_d$. $1',d'$ 是 $1,d$ 的一个置换. 与 $\theta_{1'},\theta_{d'}$ 相对应的余弦序列分别是 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 和 $\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_d$. 那么

$$k=\frac{(\sigma-\sigma_2)(1-\rho)-(\rho-\rho_2)(1-\sigma)}{(\rho-\rho_2)(1-\sigma)\sigma-(\sigma-\sigma_2)(1-\rho)\rho},$$

$$b_i=k\frac{(\sigma_{i-1}-\sigma_i)(1-\rho)\rho_i-(\rho_{i-1}-\rho_i)(1-\sigma)\sigma_i}{(\rho_i-\rho_{i+1})(\sigma_{i-1}-\sigma_i)-(\sigma_i-\sigma_{i+1})(\rho_{i-1}-\rho_i)}\quad(1\leqslant i\leqslant d-1),$$

$$c_i=k\frac{(\sigma_i-\sigma_{i+1})(1-\rho)\rho_i-(\rho_i-\rho_{i+1})(1-\sigma)\sigma_i}{(\rho_i-\rho_{i+1})(\sigma_{i-1}-\sigma_i)-(\sigma_i-\sigma_{i+1})(\rho_{i-1}-\rho_i)}\quad(1\leqslant i\leqslant d-1),$$

$$c_d=k\rho_d\frac{\rho-1}{\rho_{d-1}-\rho_d}$$

并且上式中的分母都不为零.

命题 4[5,命题4.1.1] 设 Γ 是直径 $d\geqslant 3$ 的距离正则图, 那么对任意复数 $\theta,\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$. 下列论述等价:

1) θ 是 Γ 的一个特征值,$\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 是它的余弦序列.

2) $\sigma_0=1,k\sigma=\theta$ 且

$$c_i(\sigma_{i-1}-\sigma_i)-b_i(\sigma_i-\sigma_{i+1})=k(\sigma-1)\sigma_i\quad(1\leqslant i\leqslant d),$$

其中 σ_{d+1} 是未定元.

定理 2 设 Γ 是直径 $d\geqslant 3$ 的非二部距离正则图,具有特征值 $\theta_0>\theta_1>\cdots>\theta_d$. $1',d'$ 是 $1,d$ 的一个置换. 与 $\theta_{1'},\theta_{d'}$ 相对应的余弦序列分别是 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 和 $\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_d$. 而辅助参数 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 与命题 2 中的相同. 那么下列论述等价:

i) Γ 是 $E_1\circ E_d$ 型的距离正则图,$\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 是广义可行性的余弦序列,辅助参数 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 与命题 2 中的相同.

ii) $\sigma_0=1,k\sigma=\theta_{1'}$ 且

$$k=\frac{(\sigma-\sigma_2)\xi_0-\xi_1(1-\sigma)}{\xi_1(1-\sigma)\sigma-(\sigma-\sigma_2)\eta_1},$$

$$b_i = k\frac{(\sigma_{i-1}-\sigma_i)\eta_i - \xi_{i-1}(1-\sigma)\sigma_i}{\xi_i(\sigma_{i-1}-\sigma_i)-(\sigma_i-\sigma_{i+1})\xi_{i-1}},$$

$$c_i = k\frac{(\sigma_i-\sigma_{i+1})\eta_i - \xi_i(1-\sigma)\sigma_i}{\xi_i(\sigma_{i-1}-\sigma_i)-(\sigma_i-\sigma_{i+1})\xi_{i-1}},$$

$$c_d = k\frac{-\eta_d}{\xi_{d-1}},$$

其中 $1\leqslant i\leqslant d-1, \xi_i=\rho_i-\rho_{i+1}, \eta_i=(1-\rho)\rho_i$，并且

若 $E_h=E_0$ 时，

$$p_i = D_i^* - \lambda(\gamma'-1)H_i^*;$$

若 $E_l=E_0$ 时，

$$p_i = D_i' - \lambda(1-\lambda)(\gamma-1)H_i';$$

若 $E_h\neq E_0, E_l\neq E_0$ 时，

$$p_i = D_i - \varepsilon_2 H_i + \varepsilon_3 L_i,$$

这里 $D_i, D_i^*, D_i', H_i, L_i, H_i', H_i^*$ 与定理 1 中的相同，并且上式中的分母都不为零.

证明　只就 $E_h\neq E_0, E_l\neq E_0$ 的情形证明，其余的证明类似.

i)⇒ii) 由命题 4，$\sigma_0=1$. 设 $\theta_{1'}$ 是与 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 相对应的特征值. 由广义可行性余弦序列的定义，$\theta_{1'}$ 是 θ_1,θ_d 中之一. 设 θ_d' 是 θ_1' 在 $\{\theta_1,\theta_d\}$ 中的余，$\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_d$ 表示与 θ_d' 对应的余弦序列. 则有

$$\rho_i = D_i - \varepsilon_2 H_i + \varepsilon_3 L_i \quad (1\leqslant 1\leqslant d).$$

把上式代入命题 3 化简即可.

ii)⇒i) 利用 k, c_i, b_i 的表达式，易证

$$c_i(\sigma_{i-1}-\sigma_i) - b_i(\sigma_i-\sigma_{i+1}) = k(\sigma-1)\sigma_i \quad (1\leqslant i\leqslant d).$$

因此，由命题 4 知，$\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 是余弦序列. 由 D_i, H_i, L_i 有意义知，$\sigma_j\neq\varepsilon_1\sigma_{j-1}$，即 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 是广义可行性的.

设

$$\rho_i = D_i - \varepsilon_2 H_i + \varepsilon_3 L_i \quad (1\leqslant 1\leqslant d).$$

要证 Γ 是 $E_1\circ E_d$ 型的距离正则图，由定理 1 只需证 $\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_d$ 是余弦序列，把 ρ_i 的表达式代入 c_i, b_i 中易证

$$c_i(\rho_{i-1}-\rho_i) - b_i(\rho_i-\rho_{i+1}) = k(\rho-1)\rho_1 \quad (1\leqslant i\leqslant d)$$

成立. 因此，$\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_d$ 是余弦序列. 证毕.

推论 1[2,定理10.2]　设 Γ 是直径 $d\geqslant 3$ 的非二部距离正则图，具有特征值 $\theta_0>\theta_1>\cdots>\theta_d$. $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 和 ε, h 是实数. 那么下列论述等价：

i) Γ 是紧的距离正则图，$\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_d$ 是可行性的余弦序列，辅助参数

$$\varepsilon = \frac{1-\sigma\rho}{\sigma-\rho}, \quad h = \frac{(1-\sigma)(1-\sigma_2)}{(\sigma^2-\sigma_2)(1-\varepsilon\sigma)}.$$

ii) $\sigma_0=1, \varepsilon\neq -1$,

$$k = h\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma-1},$$

$$b_i = h\frac{(\sigma_{i-1}-\sigma\sigma_i)(\sigma_{i+1}-\varepsilon\sigma_i)}{(\sigma_{i-1}-\sigma_{i+1})(\sigma_{i+1}-\sigma_i)}\quad (1\leqslant i\leqslant d-1),$$

$$c_i = h\frac{(\sigma_{i+1}-\sigma\sigma_i)(\sigma_{i-1}-\varepsilon\sigma_i)}{(\sigma_{i+1}-\sigma_{i-1})(\sigma_{i-1}-\sigma_i)}\quad (1\leqslant i\leqslant d-1),$$

$$c_d = h\frac{\sigma-\varepsilon}{\sigma-1},$$

且以上式子中的分母都不为零.

证明 在定理 2 中,若 $E_h\neq E_0$ 时,令 $\lambda=1,\varepsilon=\varepsilon_1$,若 $E_h=E_0$ 时,令 $\lambda=0,\varepsilon=\varepsilon_0$,并把 k,b_i,c_i,c_d 化简即可. □

参考文献:

[1] BANNAI E, ITO T. *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes* [M]. Benjamin-Cummings, California, 1984.

[2] JURIŠIC A A, KOOLEN J, TERWILLIGER P. *Tight distance-regular graphs* [J]. Algebraic Combin., 2000, **12**: 163—197.

[3] PASCASIO A A. *Tight distance-regular graphs and their primitive idempotents* [J]. Algebraic Comb., 1999, **10**(1): 47—59.

[4] GAO Suo-gang, YOU Hong. *A distance-regular graph of type* $E_1\circ E_d$[J]. Chinese Science Bulletin, 2000, **45**(18): 1656—1658.

[5] BROUWER A E, COHEN A M, NEUMAIER A. *Distance-Regular Graphs* [M]. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

Distance-Regular Graphs of Type $E_1\circ E_d$ with a Generalized Feasible Cosine Sequence

GAO Suo-gang

(Dept. of Math., Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China)

Abstract: In this paper, we characterize the distance-regular graphs of type $E_1\circ E_d$ with a generalized feasible cosine sequence, and obtain the intersection numbers of these graphs.

Key words: distance-regular graphs; generalized feasible cosine sequence; distance-regular graphs of type $E_1\circ E_d$.