第25卷第1期 数学研究与评论 Vol.25, No.1
2005年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)01-0092-07 **文献标识码**: A

关于增生算子方程解的 Ishikawa 迭代逼近

曾六川
(上海师范大学数学系，上海 200234)
(E-mail: zenglc@hotmail.com)

摘 要: 设 X 是任意实 Banach 空间，$T: X \to X$ 是 Lipschitz 连续的增生算子. 本文证明了，带误差的 Ishikawa 迭代序列强收敛到方程 $x + Tx = f$ 的唯一解. 而且，还给 Ishikawa 迭代序列提供了一般的收敛率估计. 利用该结果，本文推得，若 $T: X \to X$ 是 Lipschitz 连续的强增生算子，则带误差的 Ishikawa 迭代序列强收敛到方程 $Tx = f$ 的唯一解.

关键词: 任意实 Banach 空间；增生算子；带误差的 Ishikawa 迭代序列；收敛率估计.
MSC(2000): 47H09, 47H10, 47H17
中图分类: O177.91

1 引言与预备知识

设 X 是一实 Banach 空间，其对偶空间为 X^*. 记 X 与 X^* 之间的对偶对为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 且记 X 的正规对偶映象为 $J(\cdot)$, 即

$$J(x) = \left\{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}, \quad \forall x \in X.$$

X 中具有定义域 $D(T)$ 与值域 $R(T)$ 的算子 T 称为增生的，若对一切 $x, y \in D(T)$ 及 $r > 0$, 有

$$\|x - y\| \le \|x - y + r(Tx - Ty)\|. \tag{1.1}$$

已熟知，T 是增生的，当且仅当，对任意 $x, y \in D(T)$, 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$ 使得

$$\langle Tx - Ty, j(x-y) \rangle \ge 0.$$

一个增生算子 T 称为 m- 增生的，若 $R(I + rT) = X$ 对一切 $r > 0$, 其中，I 是 X 上的恒等算子. T 称为耗散算子 (m- 耗散算子), 若 $(-T)$ 是增生的 (m- 增生的)．在增生算子理论中，一个归功于 Browder 的早期的基本结果是，若 T 是 X 上的局部 Lipschitz 增生算子，则初值问题

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t + Tu = 0, \quad u(0) = u_0 \tag{1.2}$$

有解. 进一步，利用方程 (1.2) 的存在性结果，Browder[1] 证明了，如果 T 是局部 Lipschitz 连续的增生算子，则 T 是 m- 增生的. 特别地，对任给 $f \in X$, 方程 $x + Tx = f$ 有解. 后来，Martin[8] 证明了，当 T 是连续增生算子时方程 (1.2) 有解，从而推广了 Browder 的结果. 而且，利用该结果，他还证明了，当 T 是连续增生算子时，T 是 m- 增生算子.

收稿日期: 2002-03-29
基金项目: 国家教育部高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金，上海市曙光计划基金

设 X 是一实 Banach 空间. 回顾到，X 中具有定义域 $D(T)$ 与值域 $R(T)$ 的映象 T 称为强增生的，若对任意 $x,y\in D(T)$, 存在 $j(x-y)\in J(x-y)$ 使得

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle \geq k\|x-y\|^2 \tag{1.3}$$

对某个常数 $k>0$. 不等式 (1.3) 等价于下列不等式

$$\|x-y\|\leq\|x-y+r[(T-kI)x-(T-kI)y]\| \tag{1.4}$$

对 $\forall x,y\in D(T)$ 及 $r>0$. 这表明，T 是强增生的，当且仅当，$(T-kI)$ 是增生的. 对此类映象，Morales[9] 已证，若 $T:X\to X$ 是连续强增生算子，则 T 映 X 到 X 上，即，对每个 $f\in X$, 方程 $Tx=f$ 在 X 中有解.

Mann 迭代程序与 Ishikawa 迭代程序，已被许多作者用于迭代逼近非线性算子方程的解和非线性映象的不动点；见文 [2–7, 10–15].

本文始终假设 T 定义在全空间 X 上. 设 T 是 Lipschitz 连续的增生算子, 则对任给 $x_0\in X$, X 中序列 $\{x_n\}$ 由下列 Ishikawa 迭代程序生成:

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n(f-Ty_n), \tag{1.5}$$

$$y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n(f-Tx_n),\quad \forall n\geq 0, \tag{1.6}$$

其中，$\{\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的序列，且满足某些条件.

若取 $\beta_n=0\forall n\geq 0$, 这时，Ishikawa 迭代程序化为 Mann 迭代程序，即，对任给 $x_0\in X$, 序列 $\{x_n\}$ 由 $x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n(f-Tx_n)\,(\forall n\geq 0)$ 生成，其中 $\{\alpha_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的序列，且满足某些条件.

如果 T 是 Lipschitz 连续的强增生算子，则遵循 Liu[2] 的做法，用 $L(\geq 1)$ 表 T 的 Lipschitz 常数. 不失一般性，假设出现在强增生算子定义中的常数 k 为 1.

最近，Liu[2] 把 Tan 与 Xu[11] 的结果从 p 一致光滑 Banach 空间推广到了任意 Banach 空间，而且还提供了收敛率的估计.

定理 1.1[2, 定理 1] 设 X 是一实 Banach 空间，$T:D(T)=X\to X$ 是 Lipschitz 连续的增生算子. 又设 $\{\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_n\}$ 是实序列，满足下列条件:

(i) $0\leq\alpha_n,\beta_n<1,\ \forall n\geq 0$;

(ii) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, 且 $\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$;

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$,

则对任给 $x_0\in X$, 由等式 (1.5) 与 (1.6) 生成的序列 $\{x_n\}$ 强收敛到方程 $x+Tx=f$ 的唯一解 x^*. 而且，若 $\alpha_n=2n/(1+n)^2$, 则

$$\|x_m-x^*\|=O(1/m),$$

其中，x^* 记成方程 $x+Tx=f$ 的解.

如果算子 T 是强增生的，则 $(T-I)$ 是增生的. 据此，Liu[2] 由定理 1.1 得到如下结果.

定理 1.2[2, 定理 3] 设 $T:D(T)=X\to X$ 是 Lipschitz 连续的强增生算子. 又设 $\{\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_n\}$ 如同在定理 1 中一样. 则对任给 $x_0\in D(T)$, 由下式生成的序列 $\{x_n\}$:

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n(f-Ty_n+y_n), \tag{1.7}$$

$$y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n(f - Tx_n + x_n), \quad \forall n \ge 0, \tag{1.8}$$

强收敛到方程 $Tx = f$ 的唯一解.

此外，当 $\beta_n = 0, \forall n \ge 0$ 时，Liu[2] 还从定理 1.1 与定理 1.2 直接得到关于 Mann 迭代程序的两个结论；见 Liu[2] 的定理 2 与定理 4.

另一方面，Liu[16] 首次引入与考虑了带误差的 Mann 与 Ishikawa 迭代程序的概念. 而且，在一致光滑 Banach 空间中，Liu[17] 研究了用带误差的 Mann 与 Ishikawa 迭代程序逼近 Lipschitz 连续的 m- 增生算子方程 $x + Tx = f$ 的解的问题.

本文证明了，如果去掉定理 1.1 中的限制：(ii) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, 且 $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$, 则带误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 仍然强收敛到方程 $x + Tx = f$ 的唯一解. 而且，这个结果对 Ishikawa 迭代序列提供了一般的收敛率估计. 利用这个结果，我们立即推得，若去掉定理 1.2 中的限制 (ii), 则带误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 也仍然强收敛到方程 $Tx = f$ 的唯一解. 我们的结果与 Liu[2] 的结果比较，区别在于，对 $\{\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_n\}$ 的限制条件不同. 而且，收敛率的估计也不一样. 事实上，Liu[2] 得到的收敛率估计是基于 $\{\alpha_n\}$ 取特定值，即，$\alpha_n = 2n/(1+n)^2$; 我们的收敛率估计是基于 $\{\alpha_n\}$ 在某个区间上取值. 同时，关于结果的证明，两者也有相当大的区别. 在我们结果的证明中，每个不等式的估计都比较精细. 两者的证明绝大部分不同. 另外，与 Liu 的定理 2.2[17] 比较，我们的结果也去掉了其结果中的多方面限制，如，空间 X 的一致光滑性，$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$,$\{Ty_n\}$ 的有界性. 在一定程度上，我们的结果也推广了 Reich[10] 的定理 1. 由于我们的结果只要求一般 Banach 空间，所以，这也是作者 [12–15] 的结果的推进.

后面，我们将需要下列引理.

引理 1.1[4] 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 与 $\{t_n\}$ 是非负实数列，满足下列条件：

(i) $t_n \in [0,1]$, 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n = \infty$; (1.9)

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$. (1.10)

若 $a_{n+1} \le (1-t_n)a_n + b_n a_n + c_n, \forall n \ge 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

证明 令 $M_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $M_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, 则由 (1.10) 知

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\le (1+b_n)a_n + c_n \le \prod_{i=0}^{n}(1+b_i)a_0 + \sum_{j=0}^{n}\left(c_j\prod_{i=j}^{n}(1+b_i)\right) \\ &\le a_0 e^{M_1} + e^{M_1}\cdot M_2 < \infty. \end{aligned}$$

可见，序列 $\{a_n\}$ 有界. 据 Dunn 的引理 [18], 有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2 主要结果

定理 2.1 设 X 是一实 Banach 空间，$T: D(T) = X \to X$ 是 Lipschitz 连续的增生算子. 又设 $\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$ 是 X 中的序列，$\{\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的序列，满足下列条件：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\|v_n\| < \infty$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$;

(2) $0 \le \beta_n \le \frac{1-\eta L(L+4)}{L^2+2L-1}, \forall n \ge 0$, 对某个 $\eta \in \left(0, \frac{1}{L(L+4)}\right)$;

(3) $0 < \alpha_n \le \max(\varepsilon, \eta-\varepsilon)\ \forall n \ge 0$, 对某个 $\varepsilon \in (0,\eta)$,

则对任给 $x_0 \in X$, 由下列带误差的 Ishikawa 迭代程序:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n(f - Ty_n) + u_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n(f - Tx_n) + v_n, \quad \forall n \geq 0, \end{cases} \tag{I}$$

生成的序列 $\{x_n\}$ 强收敛到方程 $x+Tx=f$ 的唯一解 x^*. 特别地，若取 $u_n = v_n = 0\ \forall n \geq 0$, 则存在 $(0,1)$ 中的序列 $\{\gamma_n\}$, 满足 $\gamma_n \geq \min(\varepsilon, \eta-\varepsilon)\cdot L(L+4)\alpha_n, \forall n \geq 0$, 使得对一切 $n \geq 0$,

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0 - x^*\|.$$

证明　首先，由 Browder[1] 的结果知，T 是 m- 增生的. 所以，方程 $x+Tx=f$ 有解，记为 $x^* \in D(T)$. 置 $Sx = f - Tx$. 故可见，S 有不动点 x^*, 且 S 为 Lipschitz 连续的映象，具有 Lipschitz 常数 L. 又由 T 的增生性知，对一切 $x, y \in D(T)$ 及 $r > 0$, 有

$$\|x-y\| \leq \|x-y-r(Sx-Sy)\|.$$

利用 (I), 得到

$$\begin{aligned} \|y_n - x^*\| &= \|(1-\beta_n)(x_n - x^*) + \beta_n(Sx_n - x^*) + v_n\| \\ &\leq (1-\beta_n+L\beta_n)\|x_n - x^*\| + \|v_n\|, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\|x_n - Sy_n\| \leq \|x_n - x^*\| + L\|y_n - x^*\| \leq \left[1 + L + \left(L^2 - L\right)\beta_n\right]\|x_n - x^*\| + L\|v_n\|, \tag{2.2}$$

且

$$\begin{aligned} \|Sx_{n+1} - Sy_n\| \leq& L(\|x_n - y_n\| + \alpha_n\|Sy_n - x_n\| + \|u_n\|) \\ \leq& L(\beta_n\|Sx_n - x_n\| + \|v_n\| + \alpha_n\|Sy_n - x_n\| + \|u_n\|) \\ =& \left[L(L+1)\beta_n + L\alpha_n\left(L+1+\left(L^2-L\right)\beta_n\right)\right]\|x_n - x^*\| + \\ & L\|v_n\| + L^2\alpha_n\|v_n\| + L\|u_n\|. \end{aligned} \tag{2.3}$$

观察到

$$\begin{aligned} x_n =& x_{n+1} + \alpha_n x_n - \alpha_n Sy_n - u_n = (1+\alpha_n)x_{n+1} + \alpha_n(-S)x_{n+1} + \alpha_n^2(x_n - Sy_n) + \\ & \alpha_n(Sx_{n+1} - Sy_n) - (\alpha_n+1)u_n. \end{aligned}$$

所以，有

$$\begin{aligned} x_n - x^* =& (1+\alpha_n)(x_{n+1} - x^*) + \alpha_n[(-S)x_{n+1} - (-S)x^*] + \\ & \alpha_n^2(x_n - Sy_n) + \alpha_n(Sx_{n+1} - Sy_n) - (\alpha_n+1)u_n. \end{aligned}$$

由于 S 是耗散算子，因此，由 (2.2) 与 (2.3), 有

$$\begin{aligned}\|x_n - x^*\| =& \|(1+\alpha_n)[x_{n+1} - x^* + (\alpha_n/(1+\alpha_n))((-S)x_{n+1} - (-S)x^*)] + \\ & \alpha_n^2(x_n - Sy_n) + \alpha_n(Sx_{n+1} - Sy_n) - (\alpha_n+1)u_n\| \\ \geq& (1+\alpha_n)\|x_{n+1} - x^*\| - \alpha_n^2\|x_n - Sy_n\| - \alpha_n\|Sx_{n+1} - Sy_n\| - (\alpha_n+1)\|u_n\| \\ \geq& (1+\alpha_n)\|x_{n+1} - x^*\| - \alpha_n^2[(1+L+(L^2-L)\beta_n)\|x_n - x^*\| + L\|v_n\|] - \\ & \alpha_n\{[L(L+1)\beta_n + L\alpha_n(L+1+(L^2-L)\beta_n)]\|x_n - x^*\| + \\ & L\|v_n\| + L^2\alpha_n\|v_n\| + L\|u_n\|\} - (\alpha_n+1)\|u_n\| \\ \geq& (1+\alpha_n)\|x_{n+1} - x^*\| - [(L+1)^2\alpha_n^2 + L(L+1)\alpha_n\beta_n + \\ & L(L+1)(L-1)\alpha_n^2\beta_n] \cdot \|x_n - x^*\| - \\ & L\alpha_n\|v_n\|(\alpha_n(L+1)+1) - L\alpha_n\|u_n\| - (\alpha_n+1)\|u_n\|.\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\| \leq& \frac{1}{1+\alpha_n}\|x_n - x^*\| + \frac{1}{1+\alpha_n} \cdot [(L+1)^2\alpha_n^2 + L(L+1)\alpha_n\beta_n + \\ & L(L+1)(L-1)\alpha_n^2\beta_n]\|x_n - x^*\| + \\ & L\alpha_n\|v_n\|(\alpha_n(L+1)+1) + L\alpha_n\|u_n\| + \|u_n\| \\ \leq& (1-\alpha_n+\alpha_n^2)\|x_n - x^*\| + [(L+1)^2\alpha_n^2 + L(L+1)\alpha_n\beta_n + \\ & L(L+1)(L-1)\alpha_n^2\beta_n]\|x_n - x^*\| + \\ & L\alpha_n\|v_n\|(\alpha_n(L+1)+1) + L\alpha_n\|u_n\| + \|u_n\| \\ \leq& (1-\gamma_n)\|x_n - x^*\| + L\alpha_n\|v_n\|(\alpha_n(L+1)+1) + L\alpha_n\|u_n\| + \|u_n\|, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $\gamma_n = \alpha_n - ((L+1)^2+1)\alpha_n^2 - L(L+1)\alpha_n\beta_n - L(L+1)(L-1)\alpha_n^2\beta_n$, $\forall n \geq 0$. 由于 $0 < \alpha_n \leq \max(\varepsilon, \eta-\varepsilon) < \eta < \frac{1}{L(L+4)}$, $\forall n \geq 0$, 所以

$$\begin{aligned}\gamma_n =& \alpha_n - ((L+1)^2+1)\alpha_n^2 - L(L+1)\alpha_n\beta_n - L(L+1)(L-1)\alpha_n^2\beta_n \\ \geq& \alpha_n - (L^2+2L+2L)\alpha_n^2 - L(L+1)\alpha_n\beta_n - L(L+1)(L-1)\frac{1}{L(L+4)}\alpha_n\beta_n \\ \geq& \alpha_n - L(L+4)\alpha_n^2 - L(L+1)\alpha_n\beta_n - (L-1)\alpha_n\beta_n \\ \geq& \alpha_n - L(L+4)\max(\varepsilon, \eta-\varepsilon)\alpha_n - (L^2+2L-1)\alpha_n\beta_n \\ =& \alpha_n - \max(\varepsilon, \eta-\varepsilon)\cdot L(L+4)\alpha_n - (L^2+2L-1)\alpha_n\beta_n.\end{aligned} \tag{2.5}$$

又因 $0 \leq \beta_n \leq \frac{1-\eta L(L+4)}{L^2+2L-1}$, $\forall n \geq 0$, 故由 (2.5) 推得

$$\begin{aligned}\gamma_n \geq& \alpha_n - \max(\varepsilon, \eta-\varepsilon)\cdot L(L+4)\alpha_n - (L^2+2L-1)\alpha_n\beta_n \\ \geq& \alpha_n - \max(\varepsilon, \eta-\varepsilon)\cdot L(L+4)\alpha_n - (L^2+2L-1)\cdot\frac{1-\eta L(L+4)}{L^2+2L-1}\alpha_n \\ =& \alpha_n - \max(\varepsilon, \eta-\varepsilon)\cdot L(L+4)\alpha_n - (1-\eta L(L+4))\alpha_n \\ =& -\max(\varepsilon, \eta-\varepsilon)\cdot L(L+4)\alpha_n + \eta L(L+4)\alpha_n \\ =& \min(\varepsilon, \eta-\varepsilon)\cdot L(L+4)\alpha_n.\end{aligned} \tag{2.6}$$

从而，据 (2.4), (2.6) 即得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\| \leq & [1-\min(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\cdot L(L+4)\alpha_n]\|x_n-x^*\|+ \\ & L\alpha_n\|v_n\|(\alpha_n(L+1)+1)+L\alpha_n\|u_n\|+\|u_n\|. \end{aligned} \tag{2.7}$$

令 $a_n=\|x_n-x^*\|$, $b_n=0$, $t_n=\min(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\cdot L(L+4)\alpha_n$, 且

$$c_n=L\alpha_n\|v_n\|(\alpha_n(L+1)+1)+L\alpha_n\|u_n\|+\|u_n\|.$$

则 (2.7) 化为 $a_{n+1}\leq(1-t_n)a_n+b_na_n+c_n$. 于是，据条件 (1), (2), (3) 即知， $t_n\in(0,1)$, $\sum_{n=0}^{\infty}t_n=\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n<\infty$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n<\infty$. 所以，由引理 1.1 知， $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 即，序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 x^*, 且 x^* 是方程 $x+Tx=f$ 的唯一解.

收敛率估计：今取 $u_n=v_n=0\ \forall n\geq 0$, 则据 (2.4) 即得

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leq(1-\gamma_n)\|x_n-x^*\|\leq\cdots\leq\prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|.$$

显然，由 (2.6) 即知 $\gamma_n\geq\min(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\cdot L(L+4)\alpha_n$. 这就结束了证明.

定理 2.2 设 $T:D(T)=X\to X$ 是 Lipschitz 连续的强增生算子，且 $L_*(\geq 1)$ 是 $(T-I)$ 的 Lipschitz 常数. 又设 $\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$ 是 X 中的序列， $\{\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的序列，满足下列条件：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\|v_n\|<\infty$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;

(2) $0\leq\beta_n\leq\frac{1-\eta L_*(L_*+4)}{L_*^2+2L_*-1}, \forall n\geq 0$, 对某个 $\eta\in(0,\frac{1}{L_*(L_*+4)})$;

(3) $0<\alpha_n\leq\max(\varepsilon,\eta-\varepsilon), \forall n\geq 0$, 对某个 $\varepsilon\in(0,\eta)$,

则对任给 $x_0\in X$, 由下列带误差的 Ishikawa 迭代程序：

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n(f-Ty_n+y_n)+u_n, \\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n(f-Tx_n+x_n)+v_n, \quad \forall n\geq 0, \end{array}\right. \tag{II}$$

生成的序列 $\{x_n\}$ 强收敛到方程 $Tx=f$ 的唯一解 x^*. 特别地，若取 $u_n=v_n=0, \forall n\geq 0$, 则存在 $(0,1)$ 中的序列 $\{\gamma_n\}$, 满足 $\gamma_n\geq\min(\varepsilon,\eta-\varepsilon)\cdot L_*(L_*+4)\alpha_n, \forall n\geq 0$, 使得对一切 $n\geq 0$,

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leq\prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|.$$

证明 由于 T 是强增生算子，且具有强增生常数 $k=1$, 所以， $(T-I)$ 是增生算子. 又由于方程 $Tx=f$ 等价于方程 $x+(T-I)x=f$, 因此，根据定理 2.1, 当以 $(T-I)$ 代替 T 时，定理 2.2 的结论成立.

参考文献：

[1] BROWDER F E. *Nonlinear mapping of nonexpansive and accretive type in Banach spaces* [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, **73**: 875–882.

[2] LIU Li-wei. *Strong convergence of iteration methods for equations involving accretive operators in Banach spaces* [J]. Nonlinear Anal., 2000, **42**: 271–276.

[3] LIU Li-wei. *Approximation of fixed points of a strictly pseudocontractive mapping* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1997, **125**: 1363–1366.

[4] 李育强, 刘理蔚. 关于 Lipschitz 强增生算子的迭代程序 [J]. 数学学报, 1998, **41**(4): 845–850.
LI Yu-qiang, LIU Li-wei. *On iterative process for Lipschitz strongly accretive operators* [J]. Acta Math. Sinica, 1998, **41**(4): 845–850. (in Chinese)

[5] CHIDUME C E. *An iterative process for nonlinear Lipschitzian strongly accretive mappings in L^p spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1990, **15**: 453–461.

[6] CHIDUME C E, OSILIKE M O. *Ishikawa iteration process for nonlinear Lipschitz strongly accretive mappings* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, **192**: 727–741.

[7] RHOADES B E. *Comments on two fixed point iteration methods* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1976, **56**: 741–750.

[8] MARTIN R H. *A global existence theorem for autonomous differential equations in Banach spaces* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1970, **26**: 307–314.

[9] MORALES C. *Pseudocontractive mappings and Leray-Schauder boundary condition* [J]. Comment. Math. Univ. Carolina, 1979, **20**: 745–746.

[10] REICH S. *Constructive techniques for accretive and monotone operators* [A], in: Applied Nonlinear Anamnlysis [M]. New York: Academic Press, 1979, 335–345.

[11] TAN K K, XU Hong-kun. *Iterative solutions to nonlinear equations of strongly accretive operators in Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1993, **178**: 9–21.

[12] ZENG Lu-chuan. *Error bounds for approximation solutions to nonlinear equations of strongly accretive operators in uniformly smooth Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1997, **209**: 67–80.

[13] ZENG Lu-chuan. *Iterative approximation of solutions to nonlinear equations of strongly accretive operators in Banach spaces* [J]. Nonlinear Anal., 1998, **31**: 589–598.

[14] 曾六川. Lipschitz 局部强增殖算子的非线性方程的解的迭代构造 [J]. 应用数学和力学, 1995, **16**: 543–552.
ZENG Lu-chuan. *Iterative construction of solutions to nonlinear equations of Lipschitzian and local strongly accretive operators* [J]. Appl. Math. Mech., 1995, **16**: 583–592. (in Chinese)

[16] 曾六川, 杨亚立. Banach 空间中 Lipschitz 严格伪压缩映象的迭代逼近 [J]. 数学年刊 (A 辑), 1999, **20**(3): 389–398.
ZENG Lu-chuan, YANG Ya-li. *Iterative approximation of Lipschitzian and strictly pseudocontractive mappings in Banach spaces* [J]. Chinese Ann. Math., Ser.A, 1999, **20**(3): 389–398. (in Chinese)

[16] LIU Li-shan. *Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, **194**: 114–125.

[17] LIU Li-shan. *Ishikawa-type and Mann-type iterative process with errors for constructing solutions of nonlinear equations involving m-accretive operators in Banach spaces* [J]. Nonlinear Anal., 1998, **34**: 307–317.

[18] DUNN J C. *Iterative construction of fixed points for multivalued operators of the monotone type* [J]. J. Funct. Anal., 1978, **27**: 38–50.

Ishikawa Iterative Approximations of Solutions to Equations Involving Accretive Operators

ZENG Lu-chuan
(Dept. of Math., Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Let X be an arbitrary real Banach space and $T : X \to X$ be a Lipschitz continuous accretive operator. It is shown that the Ishikawa iterative sequence with errors converges strongly to the unique solution of the equation $x+Tx = f$. Moreover, our result provides a general convergence rate estimate for the Ishikawa iterative sequence. Utilizing this result, we show that if $T : X \to X$ is a Lipschitz continuous strongly accretive operator, then the Ishikawa iterative sequence with errors converges strongly to the unique solution of the equation $Tx = f$.

Key words: arbitrary real Banach space; accretive operator; Ishikawa iterative sequence with errors; convergence rate estimate.