第25卷第1期 数学研究与评论 Vol.25, No.1
2005年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)01-0144-04 **文献标识码**: A

A_n 型路代数倾斜模的个数

王敏雄 [1]， 林亚南 [2]

(1. 华侨大学数学系，福建 泉州 362011; 2. 厦门大学数学系，福建 厦门 361005)

摘 要: 本文证明 APR- 倾斜过程不改变 Dynkin 型路代数的倾斜模的个数，并给出计算 A_n 型路代数的倾斜模的个数的递推公式.

关键词: APR- 倾斜; branch; 倾斜代数.
MSC(2000): 16G20
中图分类: O153.3

1 基本概念与主要结论

本文总约定代数 A 是代数闭域 k 上的有向箭图 $\vec{\Delta}$ 的路代数 $k\vec{\Delta}$. 本文总讨论 $\vec{\Delta}$ 是 Dynkin 型的情况. 由著名的 Gabriel 定理知，它是有限表示型的遗传代数. 特别地，当 $\vec{\Delta}$ 是 A_n 型的有向箭图，则其路代数 $k\vec{\Delta}$ 称为 A_n 型的路代数. 本文中的模总指有限生成右 $A-$ 模. 我们记 A 的右模范畴为 $\mathrm{mod}A$. 本文不区分一个模和它的同构类，不区分一个不可分解 $A-$ 模与代数 A 的 Auslander-Reiten 箭图的点. 记 τ 为 mod A 中的 Auslander-Reiten 变换. 记 $\{P_A(i)\}_{i=1}^n$ 为不可分解投射 A- 模的全体做成的集合，这里 n 是箭图的顶点个数，也是 A 的 Grothendieck 群的秩. 若 C 为一有限集合，则 $\#C$ 表示有限集 C 中所包含元素的个数. 若 $\mathcal{C}$ 为一范畴，$M\in\mathcal{C}$，则 $\mathcal{C}\backslash M$ 表示范畴 $\mathcal{C}$ 中所有不包括 M 作为直和项的对象所构成的满子范畴.

定义 1[1] 设 $T\in\mathrm{mod}A$ 满足:

1) $\mathrm{pd}T_A\leq 1$;

2) $\mathrm{Ext}_A^1(T_A,T_A)=0$;

3) $T_A=\bigoplus_{i=1}^n T_i$, 这里 n 为 A 的 Grothendieck 群的秩，T_i 是不可分解模且 $T_i\not\cong T_j, i\neq j$;

则称 T_A 是倾斜模，并称 $B=\mathrm{End}(T_A)$ 为 A 的倾斜代数.

若 $P_A(i)$ 为单投射且非入射 A- 模，则 $T_A=\tau_A^{-1}P_A(i)\bigoplus(\bigoplus_{j\neq i}P_A(j))$ 是倾斜模，称为 APR- 倾斜模 [2], 此时称 $B=\mathrm{End}(T_A)$ 为 A 的 APR- 倾斜代数. 注意 B 是与 A 同型的路代数.

设 T_A 是一个倾斜模， $B=\mathrm{End}(T_A)$. 令

$$\mathcal{F}(T_A)=\{M_A|\mathrm{Hom}_A(T,M)=0\},\mathcal{T}(T_A)=\{M_A|\mathrm{Ext}_A(T,M)=0\},$$

$$\mathcal{X}(T_A)=\{N_B|N\otimes_B T=0\},\mathcal{Y}(T_A)=\{N_B|\mathrm{Tor}_1^B(N,T)=0\},$$

则 $\mathcal{F}(T_A)$ 和 $\mathcal{T}(T_A)$ 是 $\mathrm{mod}A$ 的满子范畴，$\mathcal{X}(T_A)$ 和 $\mathcal{Y}(T_A)$ 是 $\mathrm{mod}B$ 的满子范畴. 由 Brenner-Butler-Happel-Ringel 定理 [1,3] 知函子 $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ 与 $-\bigotimes_B T$ 是 $\mathcal{T}(T_A)$ 与 $\mathcal{Y}(T_A)$ 的互逆等价函子，函子 $\mathrm{Ext}_A(T,-)$ 与 $\mathrm{Tor}_1^B(-,T)$ 是 $\mathcal{F}(T_A)$ 与 $\mathcal{X}(T_A)$ 的互逆等价函子.

收稿日期: 2002-09-29
基金项目: 国家自然科学基金 (10371101), 华侨大学自然科学基金 (01HZR05).

本文的主要结论如下：

定理 1 设 A 是 Dynkin 型的路代数， $B=\mathrm{End}(T_A)$ 为 A 的 APR- 倾斜代数，即 $T_A=\tau_A^{-1}P_A(i)\bigoplus(\bigoplus_{j\neq i}P_A(j))$, 这里 $P_A(i)$ 为单投射且非入射 A- 模. 则 mod$A$ 和 mod$B$ 中的倾斜模的个数相同.

定理 2 记 A_n 型路代数 A 的倾斜模的个数为 $f(n)$, 则有

$$f(n)=\sum_{s=0}^{n-1}f(s)f(n-1-s).$$

定理的证明依赖于 branch 与垂范畴的基本性质，下面回顾一下有关定义.

定义 2[4] 满足下列关系的的箭图称为对于顶点 b 的完全 branch,

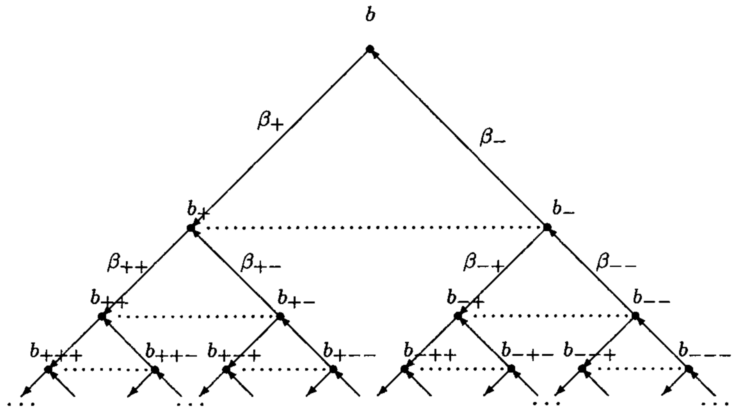

图 1

其中点为 $b_{i_1\cdots i_n}, i_1,\cdots,i_n\in\{+,-\}$, 箭为 $\beta_{i_1\cdots i_n-}:b_{i_1\cdots i_n-}\longrightarrow b_{i_1\cdots i_n}$ 和 $\beta_{i_1\cdots i_n+}:b_{i_1\cdots i_n}\longrightarrow b_{i_1\cdots i_n+}$ ，关系为 $\beta_{i_1\cdots i_n-}\beta_{i_1\cdots i_n+}$.

定义 3[4] 对于顶点 b 的完全 branch 的一个有限的连通满子箭图，若其有 n 个点且包含点 b, 并满足所有的导出关系，则我们称此子箭图为长度是 n 的 branch.

定义 4[5] 设 A 是路代数， X 是不可分解 A- 模，则称 mod$A$ 中的满子范畴

$$X^{\perp}=\{M\in\mathrm{mod}A|\mathrm{Hom}_A(X,M)=\mathrm{Ext}_A^1(X,M)=0\}$$

为 X 的右垂范畴，称 ${}^{\perp}X=\{M\in\mathrm{mod}A|\mathrm{Hom}_A(M,X)=\mathrm{Ext}_A^1(M,X)=0\}$ 为 X 的左垂范畴.

2 定理的证明

引理 1 设 A 是路代数 $k\vec{\Delta}$. $P_A(i)$ 是单投射 A- 模，则 $P_A(i)\bigoplus T'_A$ 是倾斜 A- 模的充要条件是 T'_A 是 $(\tau_A^{-1}P_A(i))^{\perp}$ 中的倾斜模.

证明 设 $P_A(i)\bigoplus T'_A$ 是倾斜 A- 模，则 $Ext_A^1(T'_A,P_A(i))=0$. 由 Auslander-Reiter 公式知 $\mathrm{Hom}_A(\tau_A^{-1}P_A(i),T'_A)=0$. 又因为 $P_A(i)$ 是单投射模，所以

$$\mathrm{Ext}_A^1(\tau_A^{-1}P_A(i),T'_A)\cong D\mathrm{Hom}_A(T'_A,P_A(i))=0.$$

故有 $T'_A \in (\tau_A^{-1}P_A(i))^{\perp}$. 进一步，由于路代数的不可分解模的垂范畴是扩张闭的，易知 T'_A 是 $(\tau_A^{-1}P_A(i))^{\perp}$ 中的倾斜模. 反之，设 T'_A 是 $(\tau_A^{-1}P_A(i))^{\perp}$ 中的倾斜模. 根据垂范畴的定义和 Auslander-Reiten 公式知

$$\mathrm{Ext}_A^1(T'_A, T'_A) = 0, \quad \mathrm{Ext}_A^1(T'_A, P_A(i)) = 0.$$

所以 $P_A(i) \bigoplus T'_A$ 是倾斜 A- 模. □

对偶地，我们有

引理 1′ 设 $I_B(i)$ 是 mod$B$ 的单入射模，则 $T'_B \bigoplus I_B(i)$ 是倾斜 B- 模的充要条件是 T'_B 是 ${}^{\perp}(\tau_B I_B(i))$ 中的倾斜模.

设 $P_A(i)$ 是 Dynkin 型路代数 $\vec{\Delta}_1$ 的单投射模，则 $\vec{\Delta}_1$ 为如下所示的有向箭图：

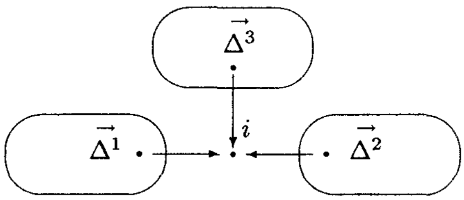

图 2

其中 $\vec{\Delta}^t, t = 1,2,3$ 可为空集. 令 $\vec{\Delta}_2$ 是改变 $\vec{\Delta}_1$ 中与 i 点连接的箭头的方向得到的有向箭图：

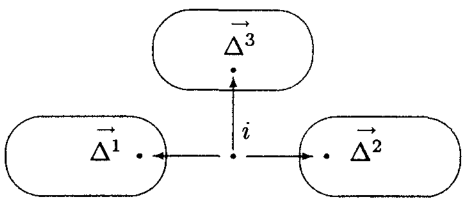

图 3

则 $B = k\,\vec{\Delta}_2$ 是 $A = k\,\vec{\Delta}_1$ 的 APR- 倾斜代数. 即 $B = \mathrm{End}(T_A)$, 其中 $T_A = \tau_A^{-1}P_A(i) \bigoplus (\bigoplus_{j\neq i} P(j))$.

定理 1 的证明 设 $A = k\,\vec{\Delta}_1$ 是 Dynkin 型的路代数, $P_A(i)$ 是单投射 A- 模. $T_A = \tau_A^{-1}P_A(i) \bigoplus (\bigoplus_{j\neq i} P_A(j))$, $B = \mathrm{End}(T_A)$. 则

$$\mathcal{F}(T_A) = \{P_A(i)\};\ \mathcal{T}(T_A) = \mathrm{mod}A \backslash P_A(i);\ \mathcal{X}(T_A) = \{I_B(i)\};\ \mathcal{Y}(T_A) = \mathrm{mod}B \backslash I_B(i).$$

我们断言 $(\tau_A^{-1}P_A(i))^{\perp} \cong {}^{\perp}(\tau_B I_B(i))$. 事实上, $\mathrm{Hom}_A(T_A, -)$ 导出 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{Y}$ 的等价. 而 $\mathrm{Hom}_A(T_A, \tau_A^{-1}P_A(i)) = P_B(i)$, $(\tau_A^{-1}P_A(i))^{\perp} \subseteq \mathcal{T}$, $(P_B(i))^{\perp} \subseteq \mathcal{Y}$. 所以

$$(\tau_A^{-1}P_A(i))^{\perp} \cong (P_B(i))^{\perp}.$$

由垂范畴的基本性质 [5] 知 ${}^{\perp}I'_i$ 与 $\mathrm{mod}(k\,\vec{\Delta}^1) \bigoplus \mathrm{mod}(k\,\vec{\Delta}^2) \bigoplus \mathrm{mod}(k\,\vec{\Delta}^3)$ 同构. 故

$$(\tau_A^{-1}P_A(i))^{\perp} \cong \mathrm{mod}(k\,\vec{\Delta}^1) \bigoplus \mathrm{mod}(k\,\vec{\Delta}^2) \bigoplus \mathrm{mod}(k\,\vec{\Delta}^3).$$

对偶地,

$$^{\perp}(\tau_B I_B(i)) \cong \mathrm{mod}(k\,\vec{\Delta}^1)\bigoplus \mathrm{mod}(k\,\vec{\Delta}^2)\bigoplus \mathrm{mod}(k\,\vec{\Delta}^3).$$

因此 $(\tau_A^{-1}P_A(i))^{\perp} \cong^{\perp} (\tau_B I_B(i))$. 所以

$$\#\{T'_A|T'_A\text{为}(\tau_A^{-1}P_A(i))^{\perp}\text{中的倾斜模}\} = \#\{T'_B|T'_B\text{为}^{\perp}(\tau_B I_B(i))\text{中的倾斜模}\}.$$

故

$$\#\{T'_A\oplus P_A(i)|T'_A\oplus P_A(i)\text{为倾斜}A-\text{模}\} = \#\{T'_B\oplus I_B(i)|T'_B\oplus I_B(i)\text{为倾斜}B-\text{模}\}.$$

又 $\mathcal{T}\cong\mathcal{Y}$. 所以

$$\#\{\text{倾斜}A\text{-模}T_A|P_A(i)\text{非}T_A\text{的直和项}\} = \#\{\text{倾斜}B\text{-模}T_B|I_B(i)\text{非}T_B\text{的直和项}\}.$$

综上所述, $\#\{T_A|T_A$ 为倾斜 $A-$ 模 $\} = \#\{T_B|T_B$ 为倾斜 B- 模 $\}$. □

定理 2 的证明 记 $f(s)$ 为长度为 s 的 branch 的个数. 设 $B(b)$ 是顶点为 b 长度为 n 的 branch. 设 $B(b_+)$ 是顶点为 b_+ 长度为 s 的 branch, 这里 $0\le s\le n-1$, 它是 $B(b)$ 的子 branch. 则 $B(b)$ 的以 b_- 为顶点的子 branch $B(b_-)$ 的长度为 $n-1-i$. 所以 $f(n)=\sum_{s=0}^{n-1}f(s)f(n-1-s)$, 这里令 $f(0)=1$.

由于长度为 n 的 branch 与线性 A_n 型路代数的倾斜模是一一对应的 [2]. 所以线性 A_n 型路代数的倾斜模个数为 $f(n)=\sum_{i=0}^{n-1}f(i)f(n-1-i)$.

因为任意的 A_n 型路代数是线性 A_n 型路代数做有限次 APR- 倾斜过程得到, 定理 1 说明 APR- 倾斜过程保持倾斜模个数不变, 因此 A_n 型路代数的倾斜模个数为 $f(n)=\sum_{i=0}^{n-1}f(i)f(n-1-i)$. □

参考文献:

[1] HAPPEL D, RINGEL C M. *Tilted algebras* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, **274**: 399–433.
[2] AUSLANDER M, PLATZECK M I, REITEN I. *Coxeter functors without diagrams* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1979, **250**: 1–46.
[3] BRENNER S, BUTLER M C R. *Generalization of the Bernstein-Gel'fand-Ponomarev reflection functors* [J]. Springer Lecture Notes in Math., 1980, **832**: 103–169.
[4] RINGEL C M. *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms* [M]. Springer Lecture Notes in Math., 1984, **1099**: 1–376.
[5] CRAWLEY-BOEVEY W. *Exceptional sequences of representations of quivers* [J]. Can. Math. Soc. Conference Proc., 1993, **14**: 117–124.

The Numbers of Tilting Modules over Path Algebras of A_n

WANG Min-xiong[1], *LIN Ya-nan*[2]
(1. Dept. of Math., Huaqiao University, Quanzhou 362011, China;
2. Dept. of Math., Xiamen University, Fujian 361005, China)

Abstract: In this paper, we prove that the numbers of tilting modules over path algebras of A_n are unchanged in APR-tilting process, and give a formula for counting its numbers.

Key words: APR-tilting; branch; tilting algebra.