第25卷第2期 数学研究与评论 Vol.25, No.2
2005年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2005

文章编号: 1000-341X(2005)02-0299-08 文献标识码: A

具有两个 IM 公共值集的亚纯函数

李进东 [1], 章启兵 [2]
(1. 成都理工大学信息管理学院, 四川 成都 610059; 2. 桂林工学院数理系, 广西 桂林 541004)
(E-mail: jd-li86@sohu.com)

摘 要: 本文讨论了亚纯函数的唯一性问题, 证明了存在一个具有 13 个元素的集合 S 使得对任意两个非常数的亚纯函数 f 与 g, 只要满足 $\overline{E}(S,f)=\overline{E}(S,g)$ 和 $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$, 必有 $f\equiv g$.

关键词: 亚纯函数; 公共值集; 唯一性.
MSC(2000): 30D35
中图分类: O174.52

1 引言和主要结果

本文采用值分布论中的标准记号, 以下无特别说明设 f 与 g 为非常数的亚纯函数, S 为一个具有不同元素的复数集. 令

$$E(S,f)=\cup_{a\in S}\{z|f(z)-a=0, \text{计重数}\},$$

$$\overline{E}(S,f)=\cup_{a\in S}\{z|f(z)-a=0, \text{不计重数}\}.$$

设 f 与 g 为非常数的亚纯函数, S 为一个具有不同元素的集合, 若 $E(S,f)=E(S,g)$ 则称 S 为 f 与 g 的 CM 公共值集, 若 $\overline{E}(S,f)=\overline{E}(S,g)$, 则称 S 为 f 与 g 的 IM 公共值集 [1].

1976 年, Gross[2] 提出问题 A: 能否找到两个 (甚至一个) 有限集合 $S_j=(j=1,2)$, 使得对任何两个非常数的整函数 f 与 g, 只要满足 $E(S_j,f)=E(S_j,g)(j=1,2)$, 必有 $f\equiv g$?

1994 年, 仪洪勋在文 [3] 中完全解决问题 A. 相应于问题 A 的亚纯函数的情形是亚纯函数唯一性理论研究的一个重要课题. 这当中文献 [4,5,6] 都做了重要工作. 2002 年, 仪洪勋 [7] 得到:

定理 A 设 $S=\{\omega\in C|P(\omega)=a\omega^n-n(n-1)\omega^2+2n(n-2)b\omega-(n-1)(n-2)b^2=0$, a,b 为两个非零复数, 满足 $ab^{n-2}\neq 2\}$, 其中 $n\geq 8$, 若 f 与 g 满足: $E(S,f)=E(S,g)$ 和 $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$, 则 $f\equiv g$.

一个自然的问题是, 能否找到两个有限集合 $S_j(j=1,2)$, 使得任意非常数的亚纯函数 f 与 g, 只要满足 $\overline{E}(S_j,f)=\overline{E}(S_j,g)(j=1,2)$, 必有 $f\equiv g$? 本文回答了这一问题得到:

定理 1 集合 S 如同定理 A 所表示, $n\geq 13$. 若 f 与 g 满足 $\overline{E}(S,f)=\overline{E}(S,g)$ 和 $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$, 则 $f\equiv g$.

定理 2 集合 S 如同定理 A 所表示, $n\geq 12$. 若 f 与 g 满足 $\overline{E}(S,f)=\overline{E}(S,g)$ 和 $E(\{\infty\},f)=E(\{\infty\},g)$ 则 $f\equiv g$.

收稿日期: 2002-06-24
基金项目: 四川教育厅自然科学基金 (2000-B18)

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

定理 3 集合 S 如同定理 A 所表示, 若 f 与 g 为满足 $\overline{E}_{k)}(S,f)=\overline{E}_{k)}(S,g)$ 和 $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$, 则当下列条件之一成立时, 必有 $f\equiv g$.

(1) $k\geq 3, n\geq 13$; (2) $k=2, n\geq 14$.

2 一些引理

引理 1[1] 设 $f(z)$ 为非常数的亚纯函数, n 为正整数, 则

$$N(r,\frac{1}{f^{(n)}})\leq N(r,\frac{1}{f})+n\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

引理 2[1] 设 f 是非常数的亚纯函数, $R(f)=\frac{P(f)}{Q(f)}$, 其中 $P(f)=\sum_{k=0}^{p}a_kf^k$ 和 $Q(f)=\sum_{j=0}^{q}b_jf^j$ 是两个互质的关于 f 的多项式, 系数 $\{a_k(z)\}$ 和 $\{b_j(z)\}$ 均为 f 的小函数, 且 $a_p(z)$ 和 $b_q(z)$ 都不恒等于零, 则

$$T(r,R(f))=\max\{p,q\}\cdot T(r,f)+S(r,f).$$

下面引入一些记号, 设 F,G 为非常数的亚纯函数, 1 为其 IM 公共值. 设 z_0 为 F 的 p 级 1 值点. z_0 为 G 的 q 级 1 值点. 用 $N_{E1}(r,\frac{1}{F-1})$ 表 F 与 G 的公共单 1 值点的密指量, 此时, $p=q=1$, 用 $\overline{N}_L(r,\frac{1}{F-1})$ 表 F 的重级大于 G 的重级的 1 值点的密指量, 此时 $p>q$, 每个 1 值点仅计一次. 类似定义 $\overline{N}_L(r,\frac{1}{G-1}), N_{E1}(r,\frac{1}{G-1}), \overline{N}^E_{k)}(r,\frac{1}{F-1})$, 此时 $p=q\leq k, \overline{N}^L_{k)}(r,\frac{1}{F-1})$, 此时 $q<p\leq k$, 明显地

$$\overline{N}_{k)}(r,\frac{1}{F-1})=\overline{N}^E_{k)}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}^L_{k)}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}^L_{k)}(r,\frac{1}{G-1}).$$

引理 3[7] 若 1 为 F 与 G 的 IM 公共值, 设

$$H=(\frac{F''}{F'}-\frac{2F'}{F-1})-(\frac{G''}{G'}-\frac{2G'}{G-1}),\tag{2.1}$$

若 H 不恒等于零, 则

$$N_{E1}(r,\frac{1}{F-1})=N_{E1}(r,\frac{1}{G-1})\leq N(r,H)+S(r,F)+S(r,G).\tag{2.2}$$

引理 4 令

$$R(\omega)=\frac{a\omega^n}{n(n-1)(\omega-\alpha_1)(\omega-\alpha_2)},\tag{2.3}$$

其中 α_1,α_2 是方程 $n(n-1)\omega^2-2n(n-2)b\omega+(n-1)(n-2)b^2=0$ 的两个互相判别的根

$$F=R(f),\quad G=R(g),\tag{2.4}$$

$$R(\omega)-1=\frac{P(\omega)}{n(n-1)(\omega-\alpha_1)(\omega-\alpha_2)},\quad P(\omega)\ \text{如定理 1 所示},\tag{2.5}$$

$$U=(\frac{F'}{F-1}-\frac{F'}{F})-(\frac{G'}{G-1}-\frac{G'}{G})\tag{2.6}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

且 U 不恒等于零，若 F 与 G IM 分担 1, f 与 g IM 分担 ∞, 则

$$(n-5)\overline{N}(r,f) \leq 2(T(r,f)+T(r,g))+S(r,f)+S(r,g). \tag{2.7}$$

证明 从 (2.6) 得： $m(r,U)=S(r,F)+S(r,G)$ 及 F 与 G 的极点不是 U 的极点.
注意到 F 与 G IM 分担 1, 得

$$N(r,U) \leq \overline{N}_L(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}_L(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{G}). \tag{2.8}$$

设 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 是方程 $P(\omega)=0$ 的 n 个判别根. 据引理 1 及 (2.4), (2.5) 得

$$\begin{aligned}\overline{N}_L(r,\frac{1}{F-1}) &\leq N(r,\frac{1}{F-1})-\overline{N}(r,\frac{1}{F-1})\\ &=\sum_{j=1}^{n}(N(r,\frac{1}{f-\omega_j})-\overline{N}(r,\frac{1}{f-\omega_j}))\\ &\leq N(r,\frac{1}{f'}) \leq N(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,f)+S(r,f)\\ &\leq T(r,f)+\overline{N}(r,f)+S(r,f).\end{aligned} \tag{2.9}$$

类似地

$$\overline{N}_L(r,\frac{1}{G-1}) \leq T(r,g)+\overline{N}(r,g)+S(r,g), \tag{2.10}$$

而

$$\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{G})=\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{g}) \leq T(r,f)+T(r,g).$$

此式结合 (2.8)-(2.10) 有

$$T(r,U) \leq 2\overline{N}(r,f)+2(T(r,f)+T(r,g))+S(r,f)+S(r,g). \tag{2.11}$$

设 z_0 为 f 的 m_1 的重极点，是 g 的 m_2 重极点. (2.4) 知 z_0 是 F 的 $(n-2)m_1$ 重极点，是 G 的 $(n-2)m_2$ 重极点. 再从 (2.6) 得， z_0 是 U 的至少 $n-3$ 重零点，于是：

$$(n-3)\overline{N}(r,f) \leq N(r,\frac{1}{U}) \leq T(r,U)+O(1). \tag{2.12}$$

由 (2.11), (2.12) 可得引理结论.

引理 5 U 同引理 4, U 不恒等于零且 $\overline{E}_{k)}(1,F)=\overline{E}_{k)}(1,G), k\geq 2$, f 与 g IM 分担 ∞, 则

$$(n-5-\frac{2}{k})\overline{N}(r,f) \leq (2+\frac{1}{k})\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)+S(r,g). \tag{2.13}$$

证明 从 (2.6) 得 $m(r,U)=S(r,F)+S(r,G)$.
注意到 $\overline{E}_{k)}(1,F)=\overline{E}_{k)}(1,G), k\geq 2$, f 与 g IM 分担 ∞ 有

$$\begin{aligned}N(r,U) \leq &\overline{N}^L_{k)}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}^L_{k)}(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{G-1})+\\ &\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{G})\end{aligned} \tag{2.14}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

由引理 4 证明过程有

$$\overline{N}_{k)}^{L}(r,\frac{1}{F-1})\le \overline{N}_{L}(r,\frac{1}{F-1})\le T(r,f)+\overline{N}(r,f)+S(r,f) \tag{2.15}$$

类似有

$$\overline{N}_{k)}^{L}(r,\frac{1}{G-1})\le T(r,g)+\overline{N}(r,g)+S(r,f)$$

$$\begin{aligned}\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{F-1}) &= \sum_{j=1}^{n}\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{f-\omega_j})\\ &\le \frac{1}{k}N(r,\frac{1}{f'})\le \frac{1}{k}T(r,f)+\frac{1}{k}\overline{N}(r,f)+S(r,f),\end{aligned}$$

$$\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{G-1})\le \frac{1}{k}T(r,g)+\frac{1}{k}\overline{N}(r,g)+S(r,g), \tag{2.16}$$

$$\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{G})\le T(r,f)+T(r,g). \tag{2.17}$$

由 (2.14)-(2.17) 得

$$N(r,U)\le (2+\frac{1}{k})\{T(r,f)+T(r,g)\}+(2+\frac{2}{k})\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g). \tag{2.18}$$

由引理 4 的证明过程有

$$(n-3)\overline{N}(r,f)\le N(r\frac{1}{U})\le T(r,U)+O(1). \tag{2.19}$$

由 (2.18), (2.19) 得引理结论.

引理 6[7] U 如同引理 4 所示，若 U 恒等于零，则 $F\equiv G$.

引理 7[7] H 如同引理 3 所示，若 H 恒等于零，则 $E(1,F)=E(1,G)$.

3 定理 1 的证明

设 F 与 G 由 (2.4) 给出，从 (2.4), (2.5) 和 $\overline{E}(S,f)=\overline{E}(S,g)$ 得

$$\overline{E}(\{1\},F)=\overline{E}(\{1\},G). \tag{3.1}$$

假设 H 由 (2.1) 式给出，若 H 不恒等于零，由引理 3 有 (2.2) 式，从 (2.3), (2.4) 得

$$F'=\frac{(n-2)af^{n-1}(f-b)^2f'}{n(n-1)(f-\alpha_1)^2(f-\alpha_2)^2}, \tag{3.2}$$

$$G'=\frac{(n-2)ag^{n-1}(g-b)^2g'}{n(n-1)(g-\alpha_1)^2(g-\alpha_2)^2}, \tag{3.3}$$

显然 $f-a_1,f-a_2$ 的单零点是 F 的单极点，$f-a_1,f-a_2$ 的重零点是 f' 的零点，$g-a_1,g-a_2$ 的单零点是 F 的单极点，$g-a_1,g-a_2$ 的重零点是 g' 的零点，若 z_0 是 F 的单极点，则

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$h=\frac{F''}{F'}-2\frac{F'}{F-1}$ 在 z_0 点正则，注意到 $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$, 结合 (2.1), (2.4), (3.1),(3.2),(3.3) 有

$$\begin{aligned}N(r,H)\leq&\overline{N}_L(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}_L(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{f-b})+\overline{N}(r,f)+N_0(r,\frac{1}{f'})+\\&\overline{N}(r,\frac{1}{g})+\overline{N}(r,\frac{1}{g-b})+N_0(r,\frac{1}{g'}),\end{aligned}\tag{3.4}$$

这里 $\overline{N}_0(r,\frac{1}{f'})$ 表示 f' 的零点，但不是 $f(f-b)$ 与 $F-1$ 的零点的密指量， $N_0(r,\frac{1}{g'})$ 类似定义. 根据第二基本定理有：

$$\begin{aligned}&(n+1)T(r,f)+(n+1)T(r,g)\\&\leq\overline{N}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{f-b})+\overline{N}(r,f)-N_0(r,\frac{1}{f'})+\\&\quad\overline{N}(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{g})+\overline{N}(r,\frac{1}{g-b})+\overline{N}(r,g)-\\&\quad N_0(r,\frac{1}{g'})+S(r,f)+S(r,g).\end{aligned}\tag{3.5}$$

注意到：

$$\begin{aligned}\overline{N}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{G-1})\leq&N_{E1}(r,\frac{1}{F-1})+\frac{1}{2}\overline{N}_L(r,\frac{1}{F-1})+\frac{1}{2}\overline{N}_L(r,\frac{1}{G-1})+\\&\frac{1}{2}N(r,\frac{1}{F-1})+\frac{1}{2}N(r,\frac{1}{G-1}).\end{aligned}\tag{3.6}$$

由引理 2, (2.2), (3.4), (3.5), (3.6), (2.9), (2.10) 有：

$$(n-9)\{T(r,f)+T(r,g)\}\leq 12\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g).\tag{3.7}$$

设 U 由 (2.6) 式给出，以下区分两种情形：

(i) $U\equiv 0$. 由引理 6: $F\equiv G$, 再由 (2.1) 式知： $H\equiv 0$. 这与假设 H 不恒等于零矛盾.

(ii) U 不恒等于零，由引理 4 得

$$(n-5)\overline{N}(r,f)\leq 2\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)+S(r,g),$$

将此式代入 (3.7) 得

$$(n-9-\frac{24}{n-5})\{T(r,f)+T(r,g)\}\leq S(r,f)+S(r,g),$$

这与 $n\geq 13$ 矛盾.

所以 $H\equiv 0$, 再由引理 7 知 $E(1,F)=E(1,G)$. 结合 (2.3),(2.4) 有

$$E(S,f)=E(S,g),$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

从而由定理 A 知定理 1 结论成立.

4 定理 2 的证明

采用与定理 1 相同的证明方法可证.

5 定理 3 的证明

F,G 由 (2.4) 式给出. 由 (2.4),(2.5) 和 $\overline{E}_{k)}(S,f)==\overline{E}_{k)}(S,g)$, 得

$$\overline{E}_{k)}(1,F)=\overline{E}_{k)}(1,G). \tag{5.1}$$

考虑到 $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}(\{\infty\},g)$, 结合 (5.1),(3.2),(3.3) 有:

$$\begin{aligned}N(r,H)\leq&\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{f-b})+\overline{N}(r,f)+N_0(r,\frac{1}{f'})+\overline{N}^L_{k)}(r,\frac{1}{F-1})+\\&\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{g})+\overline{N}(r,\frac{1}{g-b})+\\&N_0(r,\frac{1}{g'})+\overline{N}^L_{k)}(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{G-1}),\end{aligned} \tag{5.2}$$

这里 $N_0(r,\frac{1}{f'})$ 表示 f' 的零点但不是 $f(f-1)(F-1)$ 的零点的密指量, $N_0(r,\frac{1}{f'})$ 类似定义. 由第二基本定理得:

$$\begin{aligned}(n+1)\{T(r,f)+T(r,g)\}\leq&\overline{N}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{f-b})+\overline{N}(r,f)-N_0(r,\frac{1}{f'})+\\&\overline{N}(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{g})+\overline{N}(r,\frac{1}{g-b})+\overline{N}(r,g)-\\&N_0(r,\frac{1}{g'})+S(r,f)+S(r,g).\end{aligned} \tag{5.3}$$

使用引理 3, 从 (5.2), (5.3) 得:

$$\begin{aligned}&(n-3)\{T(r,f)+T(r,g)\}\\&\leq\overline{N}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}^L_{k)}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{F-1})-N_{E1}(r,\frac{1}{F-1})+\\&\quad\overline{N}(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}^L_{k)}(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{G-1})+\\&\quad3\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g).\end{aligned} \tag{5.4}$$

(i) $k\geq3$ 时, 使用引理 2:

$$\begin{aligned}&\overline{N}(r,\frac{1}{F-1})-\frac{1}{2}\overline{N}_{E1}(r,\frac{1}{F-1})-\frac{1}{2}\overline{N}^L_{k)}(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{F-1})\\&\quad\leq\frac{1}{2}N(r,\frac{1}{F-1})\leq\frac{n}{2}T(r,f),\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\overline{N}(r,\frac{1}{G-1})-\frac{1}{2}\overline{N}_{E1}(r,\frac{1}{G-1})-\frac{1}{2}\overline{N}^L_{k)}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{G-1})$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\leq \frac{n}{2}T(r,g). \tag{5.6}$$

从 (5.4), (5.5), (5.6), 有：

$$\begin{aligned}(n-3)\{T(r,f)+T(r,g)\} \leq & \frac{n}{2}T(r,f)+\frac{3}{2}\overline{N}^{L}_{k)}(r,\frac{1}{F-1})+\frac{n}{2}T(r,g)+\\ & \frac{3}{2}\overline{N}^{L}_{k)}(r,\frac{1}{G-1})+3\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g).\end{aligned} \tag{5.7}$$

使用引理 5, 由 (5.7), (2.15) 得：

$$\left[n-9-\frac{12(2+\frac{1}{k})}{n-5-\frac{2}{k}}\right]\{T(r,f)+T(r,g)\} \leq S(r,f)+S(r,g), \tag{5.8}$$

这与 $n \geq 13$ 矛盾，所以 $H \equiv 0$.

(ii) $k=2$ 时，再区分两种情况：

情形 1

$$\begin{aligned}&\overline{N}(r,\frac{1}{F-1})-\frac{1}{2}\overline{N}_{E1}(r,\frac{1}{F-1})-\frac{1}{2}\overline{N}^{L}_{2)}(r,\frac{1}{G-1})+\frac{1}{2}\overline{N}_{(3}(r,\frac{1}{F-1})+\\ &\quad \overline{N}(r,\frac{1}{G-1})-\frac{1}{2}\overline{N}_{E1}(r,\frac{1}{G-1})+\frac{1}{2}\overline{N}_{(3}(r,\frac{1}{G-1})\\ &\leq \frac{1}{2}N(r,\frac{1}{F-1})+\frac{1}{2}N(r,\frac{1}{G-1}) \leq \frac{n}{2}T(r,f)+\frac{n}{2}T(r,g).\end{aligned} \tag{5.9}$$

情形 2

$$\begin{aligned}&\overline{N}(r,\frac{1}{F-1})-\frac{1}{2}\overline{N}_{E1}(r,\frac{1}{F-1})+\frac{1}{2}\overline{N}_{(3}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{G-1})-\\ &\quad \frac{1}{2}\overline{N}_{E1}(r,\frac{1}{G-1})-\frac{1}{2}\overline{N}^{L}_{2)}(r,\frac{1}{F-1})+\frac{1}{2}\overline{N}_{(3}(r,\frac{1}{G-1})\\ &\leq \frac{1}{2}N(r,\frac{1}{F-1})+\frac{1}{2}N(r,\frac{1}{G-1}) \leq \frac{n}{2}T(r,f)+\frac{n}{2}T(r,g).\end{aligned} \tag{5.10}$$

使用引理 5, 由 (5.4), (5.9), (2.15), (2.16) 得：

$$(n-\frac{17}{2}-\frac{30}{n-6})T(r,f)+(n-\frac{19}{2}-\frac{30}{n-6})T(r,g) \leq S(r,f)+S(r,g),$$

这与 $n \geq 14$ 矛盾.

由引理 5， (5.4), (5.10), (2.15), (2.16) 得：

$$(n-\frac{19}{2}-\frac{30}{n-6})T(r,f)+(n-\frac{17}{2}-\frac{30}{n-6})T(r,g) \leq S(r,f)+S(r,g),$$

这与 $n \geq 14$ 矛盾.

不论以上哪种情形，我们都得到矛盾．故 $H \equiv 0$, 再由引理 7, $E(1,F)=E(1,G)$. 从而 $E(S,f)=E(S,g)$. 因此从定理 A 知定理 3 的结论成立.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

致谢 感谢顾永兴教授的指导与鼓励.

参考文献:

[1] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.
YI Hong-xun, YANG Chong-jun. *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions* [M]. Beijing: Science Press, 1995. (in Chinese)

[2] GROSS F. *Factorization of meromorphic functions and some open problems* [J]. Complex Analysis (Proc. Conf., Univ. Kentucky, Lexington, Ky., 1976), 51–67. Lecture Notes in Math., Vol. 599, Springer, Berlin, 1977.

[3] 仪洪勋. 亚纯函数的唯一性和 Gross 的一个问题 [J]. 中国科学 (A 辑), 1994, **24**(5): 457–466.
YI Hong-xun. *On the uniqueness of Meromorphic and a question of Cross* [J]. Sci. China Ser.A, 1994, **24**(5): 457–466. (in Chinese)

[4] LI Ping, YANG Chung-chun. *On the unique range sets for Meromorphic function* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1996, **124**: 177–185.

[5] LI Ping, YANG Chung-chun. *Some further results on the uniques range sets of Meromorphic functions* [J]. Kodai Math. J., 1995, **18**: 437–450.

[6] FANG Ming-liang, GUO Hui. *On Meromorphic functions sharing two values* [J]. Analysis, 1997, **17**: 355–366.

[7] 仪洪勋. 具有两个公共值集的亚纯函数 [J]. 数学学报, 2002, **45**(1): 75–82.
YI Hong-xu. *Meromorphic functions that share two sets* [J]. Acta. Math. Sinica, 2002, **45**(1): 75–82. (in Chinese)

On Uniqueness of Meromorphic Functions Sharing Two IM Sets

LI Jin-dong[1], *ZHANG Qi-bing*[2]

(1. Dept. of Appl. Math., Chengdu University of Technology, Sichuan 610059, China;
2. Dept. of Math. Phys., Guilin Institute of Technology, Guangxi 541004, China)

Abstract: The problem of the uniqueness of meromorphic functions is discussed, and the following theorem is proved: There exists a set with 13 elements such that any two nonconstant meromorphic functions f and g satisfying $\overline{E}(S,f)=\overline{E}(s,g)$ and $\overline{E}(\{\infty\},f)=\overline{E}\{\infty\},g)$ must be identical.

Key words: meromorphic functions; shared set; uniqueness.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.