文章编号: 1000-341X(2005)02-0319-06 文献标识码: A

Banach 空间中几类非线性算子方程的迭代解法及其应用

张庆政
(商丘师范学院计算机科学系，河南 商丘 476000)
(E-mail: zhangqz2003@yahoo.com.cn)

摘 要: 利用单调迭代技巧和锥与半序理论，讨论几类非线性二元算子方程解的存在性与唯一性，并给出迭代序列收敛速度的估计，改进和推广了某些已有结果. 最后给出所得结果的应用.

关键词: 非线性算子; 算子方程; 迭代解法; 锥与半序.
MSC(2000): 47H10
中图分类: O177.91

1 引 言

设 D 为 Banach 空间 E 中的集合，$A:D\times D\to E$ 为二元算子. 关于算子方程 $A(x,x)=x$ 解的存在性与唯一性研究已有一些好的结果 [1–6]. 本文在文献 [3] 中给出的结果的基础上，进一步讨论下述六类算子方程的迭代求解方法:

$$A(x,x)=x,\quad A(x,x)=(1+\alpha)x,\quad A(x,x)=(1-\alpha)x,$$

$$A(x,x)+u=(1+\alpha)x,\quad A(x,x)+v=(1+\alpha)x,\quad A(x,x)+u=x,$$

其中常数 $\alpha\geq 0$. 所得结果改进和推广了文献 [4–6] 中的相应结果，最后将结果应用于超线性二阶常微分方程的两点边值问题.

以下总假设 P 为 E 中的正规锥， N 为 P 的正规常数，由锥 P 导出 E 中的半序 $\leq$, θ 表示 E 中零元素 [1].

设 $A:D\times D\to E$ 为二元算子，若存在正有界线性算子 $L:E\to E$ 且其谱半径 $r(L)<1$, 使对任意 $x,y\in D, x\leq y$ 有 $A(y,x)-A(x,y)\leq L(y-x)$, 则称 A 为 L- 序对称压缩算子， L 称为 A 的压缩算子.

2 主要结果

假设 $u,v\in E, u<v, D=[u,v]$ 为 E 中序区间.

定理 1 设 $A:D\times D\to E$ 是 L- 序对称压缩算子，且存在 $\alpha\geq 0$, 使得

$$A(x_2,y_2)-A(x_1,y_1)\geq -\alpha(x_2-x_1),\quad u\leq x_1\leq x_2\leq v, u\leq y_2\leq y_1\leq v. \tag{1}$$

若下列条件之一成立:

收稿日期: 2003-01-20
基金项目: 商丘市科技攻关项目 (200211125)

(i) $u \le A(u,v), A(v,u) \le v - \alpha(v-u)$; (ii) $u + \alpha(v-u) \le A(u,v), A(v,u) \le v$,
则有下述结论:

(C_1) 方程 $A(x,x)=x$ 存在唯一解 $x^* \in D$, 且其任意耦合解 $x, y \in D$ 都有 $x=y=x^*$;

(C_2) 对任意 $x_0, y_0 \in D$, 作对称迭代序列

$$x_n = \frac{1}{\alpha+1}[A(x_{n-1}, y_{n-1}) + \alpha x_{n-1}], \quad y_n = \frac{1}{\alpha+1}[A(y_{n-1}, x_{n-1}) + \alpha y_{n-1}], \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{2}$$

都有 $x_n \to x^*, y_n \to x^* (n \to \infty)$, 且对任意 $\beta \in (r(L), 1)$, 存在自然数 m, 当 $n \ge m$ 时有误差估计: $\|x_n(y_n) - x^*\| \le 2N(\frac{\alpha+\beta}{\alpha+1})^n \|u-v\|$.

证明 对任意 $x, y \in D$, 令 $B(x,y) = \frac{1}{\alpha+1}[A(x,y)+\alpha x]$, 当条件 (i) 或 (ii) 成立时, 易知

$$u \le B(u,v), B(v,u) \le v.$$

由 (1) 容易验证 $B: D \times D \to E$ 为混合单调算子, 且对任意 $u \le x \le y \le v$, 有

$$\theta \le B(y,x) - B(x,y) \le H(y-x),$$

其中 $H = \frac{1}{\alpha+1}(L + \alpha I)$ 为正有界线性算子, I 为恒等算子. 由归纳法易证

$$\theta \le B^n(y,x) - B^n(x,y) \le H^n(y-x), \quad u \le x \le y \le v,$$

其中 $B^n(x,y) = B(B^{n-1}(x,y), B^{n-1}(y,x)), \quad x, y \in D, n \ge 2$.

由锥 P 正规得

$$\|B^n(y,x) - B^n(x,y)\| \le N\|H^n\|\|x-y\|, u \le x \le y \le v.$$

对任意 $\beta \in (r(L), 1)$, 由于 $\lim_{n\to\infty} \|H^n\|^{\frac{1}{n}} = r(H) \le \frac{\alpha + r(L)}{\alpha+1} < \frac{\alpha+\beta}{\alpha+1} < 1$, 故存在自然数 m, 当 $n \ge m$ 时有

$$\|H^n\| < (\frac{\alpha+\beta}{\alpha+1})^n, \quad N\|H^m\| < 1.$$

对混合单调算子 B^m 及常数 $N\|H^m\|$ 应用文献 [3] 中定理 3, 可知方程 $B^m(x,x)=x$ 存在唯一解 x^*, 且其任意耦合解 $x, y \in D$ 都有 $x=y=x^*$, 由 $B^m(B(x^*,x^*), B(x^*,x^*)) = B(B^m(x^*,x^*), B^m(x^*,x^*)) = B(x^*,x^*)$ 及 $B^m(x,x)=x$ 的解的唯一性可得

$$B(x^*,x^*) = x^*, \text{ 从而 } A(x^*,x^*) = x^*.$$

注意到方程 $A(x,x)=x$ 与 $B(x,x)=x$ 有相同的耦合解、且方程 $B(x,x)=x$ 的耦合解必为方程 $B^m(x,x)=x$ 的耦合解, 即得结论 (C_1).

考虑迭代序列 (2) 和迭代序列: $u_n = B(u_{n-1}, v_{n-1}), v_n = B(v_{n-1}, u_{n-1})$, 其中 $u_0 = u, v_0 = v$, 易知

$$x_n = B(x_{n-1}, y_{n-1}), y_n = B(y_{n-1}, x_{n-1}), \theta \le v_n - u_n \le H^n(v-u),$$

由 $x^*, x_0, y_0 \in D$,B 混合单调及归纳法易证

$$u_n \le x^* \le v_n, u_n \le x_n \le v_n, u_n \le y_n \le v_n,$$

于是有

$$\|x_n(y_n)-u_n\|\le N\|v_n-u_n\|,\|x^*-u_n\|\le N\|v_n-u_n\|,n=1,2,3,\cdots,$$

从而当 $n\ge m$ 时有

$$\|x_n(y_n)-x^*\|\le 2N\|v_n-u_n\|\le 2N\|H^n\|\|v-u\|\le 2N(\frac{\alpha+\beta}{\alpha+1})^n\|u-v\|,$$

进而 $x_n\to x^*,y_n\to x^*(n\to\infty)$. □

注 1 (1) 式蕴含 $A(x,y)$ 关于 y 递减，因此文献 [4] 中定理 1 是本文定理 1 在条件 (i) 或 (ii) 中取 $\alpha=0$ 的特例.

推论 1 设 $A:D\times D\to E$ 是混合单调的 L- 序对称压缩算子，若存在 $\alpha\ge 0$ 使定理 1 的条件 (i),(ii) 之一成立，则有结论 (C_1), (C_2) 成立，且有： (C_3) 对任意 $\beta\in(r(L),1)$, $\alpha+\beta<1$, 由 $u_0=u,v_0=v$ 作非对称迭代序列

$$u_n=A(u_{n-1},v_{n-1}),v_n=A(v_{n-1},u_{n-1})+\alpha(v_{n-1}-u_{n-1}),n=1,2,3,\cdots,\tag{3}$$

或

$$u_n=A(u_{n-1},v_{n-1})-\alpha(v_{n-1}-u_{n-1}),v_n=A(v_{n-1},u_{n-1}),n=1,2,3,\cdots,\tag{4}$$

有 $u_n\to x^*,v_n\to x^*(n\to\infty)$, 且存在自然数 m, 当 $n\ge m$ 时有误差估计:

$$\|u_n(v_n)-x^*\|\le N(\alpha+\beta)^n\|u-v\|.\tag{5}$$

证明 由 A 混合单调知 (1)(取 $\alpha=0$) 成立，于是可得结论 (C_1), (C_2) (在 (C_2) 中取 $\alpha=0$). 下证 (C_3). 考虑迭代序列 (3), 由 $u\le x^*\le v$ 知

$$u_1=A(u,v)\le A(x^*,x^*)=x^*\le A(v,u)=v_1-\alpha(v-u)\le v_1,$$

由归纳法可得 $u_n\le x^*\le v_n$,$n\ge 1$, 从而

$$\theta\le x^*-u_n\le v_n-u_n,\theta\le v_n-x^*\le v_n-u_n.$$

易知

$$\theta\le v_n-u_n\le(L+\alpha I)(v_{n-1}-u_{n-1})=(L+\alpha I)^n(v-u),\quad n\ge 1.$$

对任意 $\beta\in(r(L),1)$,$\alpha+\beta<1$, 由于 $\lim_{n\to\infty}\|(L+\alpha I)^n\|^{\frac{1}{n}}=r(L+\alpha I)\le r(L)+\alpha<\alpha+\beta<1$, 故存在 m, 当 $n\ge m$ 时有 $\|(L+\alpha I)^n\|<(\alpha+\beta)^n$, 于是有

$$\|u_n(v_n)-x^*\|\le N\|(L+\alpha I)\|\|u-v\|\le N(\alpha+\beta)^n\|u-v\|,\quad n\ge m,$$

进而 $u_n\to x^*$,$v_n\to x^*$,$(n\to\infty)$. 最后，考虑迭代序列 (4), 由 $u\le x^*\le v$ 知

$$u_1\le u_1+\alpha(v-u)=A(u,v)\le A(x^*,x^*)=x^*\le A(v,u)=v_1,$$

同上可证结论成立. □

注 2 由 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha+1}\le\alpha+\beta$ 可知，在求解方程 $A(x,x)=x$ 的三种迭代 (2),(3),(4) 中， (2) 的收敛速度比 (3),(4) 快.

定理 2 设 $A:D\times D\to E$ 同推论 1, 若存在 $\alpha\geq 0$ 使 $u+\alpha v\leq A(u,v), A(v,u)\leq v+\alpha u$, 则

(C_4) 方程 $A(x,x)=(1+\alpha)x$ 存在唯一解 $x^*\in D$, 且其任意耦合解 $x,y\in D$ 都有 $x=y=x^*$;

(C_5) 对任意 $x_0,y_0\in D$, 作对称迭代序列 $x_n=\frac{1}{1+\alpha}A(x_{n-1},y_{n-1})$, $y_n=\frac{1}{1+\alpha}A(y_{n-1},x_{n-1})$, $n=1,2,3,\cdots$, 都有 $x_n\to x^*, y_n\to x^*(n\to\infty)$, 且对任意 $\beta\in(r(L),1)$, 存在自然数 m, 当 $n\geq m$ 时有误差估计

$$\|x_n(y_n)-x^*\|\leq 2N(\frac{\beta}{\alpha+1})^n\|u-v\|;$$

(C_6) 对任意 $\beta\in(r(L),1), \alpha+\beta<1$, 由任意 $w_0,z_0\in D$ 作对称迭代序列 $w_n=A(w_{n-1},z_{n-1})-\alpha z_{n-1}$, $z_n=A(z_{n-1},w_{n-1})-\alpha w_{n-1}, n\geq 1$ 有 $w_n\to x^*, z_n\to x^*(n\to\infty)$, 且存在自然数 m, 当 $n\geq m$ 时有误差估计:

$$\|w_n(z_n)-x^*\|\leq 2N(\alpha+\beta)^n\|u-v\|. \tag{6}$$

证明 仿定理 1 的证明, 令 $B(x,y)=\frac{1}{1+\alpha}A(x,y)$ 或 $C(x,y)=A(x,y)-\alpha x$ 即可.

仿定理 1 或推论 1 的证明可得下述定理 3–6.

定理 3 设 $A:D\times D\to E$ 同推论 1, 若存在 $\alpha\in[0,1)$ 使 $(1-\alpha)u\leq A(u,v), A(v,u)\leq(1-\alpha)v$, 则有: (C_7) 方程 $A(x,x)=(1-\alpha)x$ 存在唯一解 $x^*\in D$, 且其任意耦合解 $x,y\in D$ 都有 $x=y=x^*$; (C_8) 对任意 $x_0,y_0,w_0,z_0\in D$, 分别作对称迭代序列

$$x_n=\frac{1}{1-\alpha}A(x_{n-1},y_{n-1}),\quad y_n=\frac{1}{1-\alpha}A(y_{n-1},x_{n-1}),\quad n=1,2,3,\cdots,$$

$$w_n=A(w_{n-1},z_{n-1})+\alpha w_{n-1},\quad z_n=A(z_{n-1},w_{n-1})+\alpha z_{n-1},\quad n=1,2,3,\cdots,$$

都有 $x_n\to x^*, y_n\to x^*, w_n\to x^*, z_n\to x^*(n\to\infty)$, 且对任意 $\beta\in(r(L),1)$, $\alpha+\beta<1$, 存在自然数 m, 当 $n\geq m$ 时分别有误差估计: $\|x_n(y_n)-x^*\|\leq 2N(\frac{\beta}{1-\alpha})^n\|u-v\|$ 和 (6).

注 3 因 $\frac{\beta}{1-\alpha}\leq\alpha+\beta$, 故迭代序列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 比 $\{w_n\},\{z_n\}$ 的收敛速度快.

注 4 文献 [4] 中推论 2 是上述定理 1-3 取 $\alpha=0$ 的特例.

定理 4 设 $A:D\times D\to E$ 同推论 1, 若 $\exists\alpha\geq 0$ 使 $\alpha v\leq A(u,v), A(v,u)\leq v-(1-\alpha)u$, 则对方程 $A(x,x)+u=(1+\alpha)x$ 而言结论 (C_4)-(C_6) 成立, 此时

$$x_n=\frac{1}{1+\alpha}[A(x_{n-1},y_{n-1})+u],\quad y_n=\frac{1}{1+\alpha}[A(y_{n-1},x_{n-1})+u],$$

$$w_n=A(w_{n-1},z_{n-1})+u-\alpha z_{n-1},\quad z_n=A(z_{n-1},w_{n-1})+u-\alpha w_{n-1},\quad n=1,2,3,\cdots.$$

定理 5 设 $A:D\times D\to E$ 同推论 1, 若 $\exists\alpha\geq 0$ 使 $u-(1-\alpha)v\leq A(u,v), A(v,u)\leq\alpha u$, 则对方程 $A(x,x)+v=(1+\alpha)x$ 而言结论 (C_4)-(C_6) 成立, 此时的 x_n,y_n,w_n,z_n 是将定理 5 中的 u 换为 v.

定理 6 设 $A:D\times D\to E$ 同推论 1, 若下列条件之一成立:

(i) $\exists\alpha\in[0,1)$ 使 $\theta\leq A(u,v), A(v,u)\leq(1-\alpha)(v-u)$,

(ii) $\exists\alpha\geq 0$ 使 $\alpha(v-u)\leq A(u,v), A(v,u)\leq v-u$, 则有:

(C_9) 方程 $A(x,x)+u=x$ 存在唯一解 $x^*\in D$, 且其任意耦合解 $x,y\in D$ 都有 $x=y=x^*$;

(C_{10}) 对任意 $x_0, y_0 \in D$, 作对称迭代序列 $x_n = A(x_{n-1}, y_{n-1}) + u$, $y_n = A(y_{n-1}, x_{n-1}) + u$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, 都有 $x_n \to x^*, y_n \to x^*(n \to \infty)$, 且对任意 $\beta \in (r(L), 1)$, 存在自然数 m, 当 $n \geq m$ 时有误差估计: $\|x_n(y_n) - x^*\| \leq 2N\beta^n\|u - v\|$;

(C_{11}) 对任意 $\beta \in (r(L), 1), \alpha + \beta < 1$, 由 $u_0 = u, v_0 = v$ 作非对称迭代序列 $u_n = A(u_{n-1}, v_{n-1}) + u - \alpha(v_{n-1} - u_{n-1}), v_n = A(v_{n-1}, u_{n-1}) + u, n = 1, 2, \cdots$, 或 $u_n = A(u_{n-1}, v_{n-1}) + u$, $v_n = A(v_{n-1}, u_{n-1}) + u + \alpha(v_{n-1} - u_{n-1}), n = 1, 2, \cdots$, 有 $u_n \to x^*, v_n \to x^*(n \to \infty)$, 且存在自然数 m, 当 $n \geq m$ 时有误差估计 (5).

注 5 由 $\frac{\beta}{\alpha+1} \leq \beta \leq \alpha + \beta$ 知, 在上述定理中, 分别用迭代序列 $\{w_n\}, \{z_n\}$ (或 $\{u_n\}, \{v_n\}$) 求对应方程的解, 不如用相应的 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 求解效果好.

注 6 本文结果是文献 [4–6] 中的某些相应结果的改进和推广.

3 应用

作为本文结果的应用，我们考察超线性二阶常微分方程的两点边值问题

$$\begin{cases} x'' + a(t)x^m + \dfrac{1}{1 + b(t)x} = 0, & t \in [0, 1], \\ x(0) = x'(1) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

其中自然数 $m \geq 2$. 设 $k(t, s)$ 是相应于边值问题 $x'' = 0, x(0) = x'(1) = 0$ 的 Green 函数 [7], 即 $k(t, s) = \min\{t, s\} = \begin{cases} t, & t \leq s \\ s, & s < t, \end{cases}$ 则边值问题 (7) 属于 $C^2[0, 1]$ 的解等价于非线性 Hammerstein 型积分方程

$$x(t) = \int_0^1 k(t, s)\{a(s)[x(s)]^m + \frac{1}{1 + b(s)x(s)}\}\mathrm{d}s \tag{8}$$

属于 $C[0, 1]$ 的解. 直接计算可得 $\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 k(t, s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}$.

定理 7 设 $a(t), b(t)$ 在 $[0, 1]$ 上非负连续, $p = \max_{t\in[0,1]} a(t), q = \max_{t\in[0,1]} b(t)$. 若 $p < 1, mp + q < 2$, 则问题 (7) 存在唯一满足 $0 \leq x^*(t) \leq 1(t \in [0, 1])$ 的解 $x^*(t)$; 对任意满足 $0 \leq x_0(t) \leq 1, 0 \leq y_0(t) \leq 1(t \in [0, 1])$ 的初始函数 $x_0(t), y_0(t)$, 作迭代序列

$$x_n(t) = \int_0^1 k(t, s)a(s)[x_{n-1}(s)]^m + \frac{1}{1 + b(s)y_{n-1}(s)}\}\mathrm{d}s,$$

$$y_n(t) = \int_0^1 k(t, s)\{a(s)[y_{n-1}(s)]^m + \frac{1}{1 + b(s)x_{n-1}(s)}\}\mathrm{d}s, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

都有 $x_n(t), y_n(t)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 $x^*(t)$, 且有误差估计:

$$|x_n(t)(y_n(t)) - x^*(t)| \leq 2(\frac{mp + q}{2})^n, \quad t \in [0, 1], \ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

证明 令 $E = C[0, 1], P = \{x \in E | x(t) \geq 0, t \in [0, 1]\}$, 则 E 按范数 $\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$ 成为 Banach 空间, P 为 E 中的正规锥, 且其正规常数 $N = 1$. 易知积分方程 (8) 可写为算子方程 $A(x, x) = x$, 其中算子 A 的定义如下:

$$A(x, y)(t) = \int_0^1 k(t, s)\{a(s)[x(s)]^m + \frac{1}{1 + b(s)y(s)}\}\mathrm{d}s, \quad t \in [0, 1].$$

取 E 中元素 $u=u(t)\equiv 0, v=v(t)\equiv 1$, 则 $D=[0,1]$ 是 E 中序区间. 经计算可知, $A:D\times D\to E$ 是混合单调算子, $0\le A(0,1), A(1,0)\le \frac{1+p}{2}<1$. 记

$$Lx(t)=\int_0^1 k(s,t)[ma(s)+b(s)]x(s)\mathrm{d}s, t\in[0,1],$$

则 $L:E\to E$ 是正有界线性算子, 其谱半径 $r(L)\le \frac{mp+q}{2}<1$, 且对任意 $x,y\in E, 0\le x(t)\le y(t)\le 1$, 有 $0\le A(y,x)(t)-A(x,y)(t)\le L(y-x)(t)$, 即 A 是 $L-$ 序对称压缩算子, 由定理 1(取 $\alpha=0$) 即得结论. □

参考文献:

[1] GUO Da-jun, LAKSHMIKANTHAM V. *Coupled fixed points of nonlinear operators with applications* [J]. Nonlinear Anal. T. M. A., 1987, **11**(5): 623–632.

[2] SUN Yong. *A fixed point theorem for mixed monotone operators with applications* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1991, **156**: 240–252.

[3] ZHANG Qing-zheng. *Contraction mapping principle of mixed monotone mapping and application* [J]. Henan Science, 2000, **18**(2): 121–125.

[4] 孙经先, 刘立山. 非线性算子方程的迭代求解及其应用 [J]. 数学物理学报, 1993, **13**(3): 141–145.
SUN Jing-xian, LIU Li-shan. *Iterative solution of nonlinear operators equations with applications* [J]. Acta Math. Sci., 1993, **13**(3): 141–145. (in Chinese)

[5] 张庆政. 序对称压缩算子方程的迭代求解及其应用 [J]. 工程数学学报, 2000, **17**(2): 131–134.
ZHANG Qing-zheng. *Iterative solution of ordering symmetric contraction operators equations with applications* [J]. J. Engrg. Math., 2000, **17**(2): 131–134. (in Chinese)

[6] 颜心力. 对称压缩算子方程解的存在与唯一性定理及应用 [J]. 科学通报, 1990, **35**(10): 733–736.
YAN Xin-li. *Existence and uniqueness theorem of solution for symmetric contraction operators equations with application* [J]. Science Bulletin, 1990, **35**(10): 733–736. (in Chinese)

[7] 郭大钧, 孙经先. 非线性积分方程 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1987.
GUO Da-jun, SUN Jing-xian. *Nonlinear Integral Equation* [M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 1987. (in Chinese)

Iterative Solution of Some Classes of Nonlinear Operators Equations in Banach Space and Its Applications

ZHANG Qing-zheng

(Department of Computer Science, Shangqiu Teachers College, Henan 476000, China)

Abstract: By using the cone and partial ordering theory and the monotone iterative technique, we obtain the existence and uniqueness of solutions for some classes of nonlinear binary operators equations, and determial the convergence rate for iterative sequences. This extends known results. We also give the applications.

Key words: nonlinear operator; operator equations; iterative solution; cone and partial ordering.