第25卷第2期 数学研究与评论 Vol.25, No.2
2005年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2005

文章编号: 1000-341X(2005)02-0331-06 **文献标识码**: A

可交换随机变量序列重对数律的收敛速度

赵月旭
(杭州电子科技大学信息与数学科学系，浙江 杭州 310018)
(E-mail: yxzhao2003@sohu.com)

摘 要: 本文讨论了可交换随机变量序列 $\{X_n: n\geq 1\}$ 重对数律的收敛速度，得到了可交换随机变量序列与独立序列类似的极限性质，同时给出了可交换序列重对数律收敛速度的一种描述.

关键词: 可交换随机变量序列；重对数律；收敛速度.
MSC(2000): 60F15
中图分类: O211.4

1 引 言

众所周知，重对数律是概率极限理论中极为深刻的结果，所以其收敛速度也成为一个很活跃的研究方向，对于收敛速度，众多学者从不同的角度研究了级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}P(|S_n|\geq n^{\frac{1}{2}}\varphi(n))$ 的收敛性问题. 1968 年，Davis[1] 指出，在一定的矩条件下，上述级数的收敛性与函数 $f(x),\varphi(x)$ 的性质密切相关，并给出了在 $f(x)=\varphi^2(x)$ 的特殊条件下独立同分布随机变量序列重对数律的收敛速度. 1983 年，Gafurov[2] 改进了 Davis 的结果. 1991 年，王启应和 Gafurov[3] 又进一步扩展和改进了 Gafurov 等人的结果. 可交换随机变量是一类重要的相依随机变量，它与独立序列有着特殊的关系，但涉及其收敛速度方面的文章甚少，基于此，在文 [3] 的启示下，作者考虑了可交换随机变量与独立序列是否有着类似的极限性质？本文做了这方面的一些探讨，回答了这个问题，并给出了可交换序列重对数律收敛速度的一种描述.

称随机变量有限列 $\{X_n: n\geq 1\}$ 是可交换的，如果 $(X_1,X_2,...,X_n)$ 的联合分布是置换不变的，即对 $(1,2,...,n)$ 的每一个置换 $\pi, (X_1,X_2,...,X_n)\overset{D}{=}(X_{\pi(1)},X_{\pi(2)},...,X_{\pi(n)})$. 随机变量无限列是可交换的，如果其中任何有限子集都是可交换的. 对于可交换随机变量序列，有大家熟知的体现可交换随机变量序列与独立同分布序列关系最基本的结果 [4]:

(1) $\{X_n: n\geq 1\}$ 在给定其尾 $\sigma-$ 域下是条件独立同分布的；

(2) 对任意的 $\omega\in\Omega$, 存在 $\{X_n: n\geq 1\}$ 的尾 $\sigma-$ 域下的条件正则分布 P^ω, 在概率空间 $(R^\infty,\beta^\infty,P^\omega)$ 上，$\{X_n: n\geq 1\}$ 所对应的坐标随机变量 $\{\xi_n^\omega: n\geq 1\}$ 是独立同分布的，且有

$$P(X_1<x_1,X_2<x_2,...,X_n<x_n)=\int\prod_{j=1}^{n}P(X_1<x_j|\mathcal{F})\mathrm{d}P=\int\prod_{j=1}^{n}P^\omega(\xi_1^\omega<x_j)\mathrm{d}P.$$

以下将沿用 P^ω,ξ_i^ω 等的记法.

收稿日期: 2002-05-07

文中恒设 $\{X_n : n \ge 1\}$ 为可交换随机变量， $EX_1 = 0, EX_1^2 = 1, S_n = \sum_1^n X_i, \mathcal{F}$ 为其尾 σ-域， $\{\xi_n^\omega : n \ge 1\}$ 为其坐标随机变量，

$$T_n^\omega = \sum_{i=1}^n \xi_i^\omega, Lx = \max(1, \log x), L_2x = \max(1, \log\log x),$$

$$E^\omega \xi_1^\omega = \int_{-\infty}^\infty \xi_1^\omega \mathrm{d}P, H(x) = x^{\frac{1}{2}}\varphi(x).$$

设函数 $f(x), \varphi(x)$ 为定义在 $[1,\infty)$ 上的正值实函数，且满足：

(A) $\varphi(x) \uparrow \infty$ 或 $\varphi(x) \to c > 0$;

(B) 对某一 $k \ge 3, 0 < \delta < 1, x^{\frac{1}{2}} f(x) \uparrow, \frac{f(x)}{x^{\frac{\delta}{2}}\varphi^k(x)} \downarrow$.

其中 c 为绝对常数，不同的地方可表示不同的值，即使在同一式中也可表示不同的值.

2 主要结果

定理 2.1 在条件 (A)–(B) 之下，若

$$EX_1X_2 = 0, \quad E(X_1^2 - 1)(X_2^2 - 1) = 0, \quad EH^{-1}(|X_1|)f(H^{-1}(|X_1|)) < \infty,$$

则当 $\sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n\varphi(n)} \exp\{-\frac{\varphi^2(n)}{2\sigma_\omega^2(n)}\} \le c < \infty$ a.s. 时，必有 $\sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n} P(|S_n| \ge H(n)) < \infty$.

注 1 为行文方便，在本文中我们始终记 $H(n) = n^{\frac{1}{2}}\varphi(n)$.

定理 2.2 在条件 (A)–(B) 之下，若

$$EX_1X_2 = 0, \quad E(X_1^2 - 1)(X_2^2 - 1) = 0, \quad EH^{-1}(|X_1|)f(H^{-1}(|X_1|)) < \infty,$$

则当 $\sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n} P(|S_n| \ge H(n)) < \infty$ 时，必有

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n\varphi(n)} \exp\{-\frac{\varphi^2(n)}{2\sigma_\omega^2(n)}\} < \infty \quad \text{a.s.},$$

其中 $\sigma_\omega^2(n) = E^\omega \xi_1^{\omega 2} I(|\xi_1^\omega| \le H(n)) - (E^\omega \xi_1^\omega I(|\xi_1^\omega| \le H(n)))^2$.

注 2 由于 $EX_1X_2 = 0, E(X_1^2 - 1)(X_2^2 - 1) = 0$, 所以

$$E(X_1|\mathcal{F}) = E^\omega \xi_1^\omega = 0, \quad E(X_1^2|\mathcal{F}) = E^\omega \xi_1^{\omega 2} = 1, \quad \text{a.s.},$$

故

(I) $\sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n\varphi(n)} \exp\{-\frac{\varphi^2(n)}{2\sigma_\omega^2(n)}\} \le c < \infty$ a.s. 等价于

(II) $\sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n\varphi(n)} \exp\{-\frac{\varphi^2(n)}{2E^\omega \xi_1^{\omega 2} I(|\xi_1^\omega| \le H(n))}\} \le c < \infty$ a.s..

因此在定理 2.1 和定理 2.2 中让 (II) 取代 (I) 是同样成立的.

命题 2.3 在条件 (A)–(B) 之下，若

$$EX_1X_2 = 0, \quad E(X_1^2 - 1)(X_2^2 - 1) = 0, \quad EH^{-1}(|X_1|)f(H^{-1}(|X_1|)) < \infty,$$

则当 $\sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n\varphi(n)} \exp\{-\frac{\varphi^2(n)}{2}\} \le c < \infty$ 时，必有 $\sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n} P(|S_n| \ge H(n)) < \infty$.

定理 2.4　在条件 (A)–(B) 之下，若

$$EX_1X_2=0,\quad E(X_1^2-1)(X_2^2-1)=0,\quad EH^{-1}(|X_1|)f(H^{-1}(|X_1|))<\infty,$$

如果对某一 $\varepsilon_0>0$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n\varphi(n)}\exp\{-\frac{(\varepsilon+\varepsilon_0)\varphi^2(n)}{2}\}\le c<\infty,$$

则对任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}P(|S_n|\ge\sqrt{(\varepsilon+\varepsilon_0)n}\varphi(n))<\infty.$$

推论 2.5　若 $EX_1X_2=0, E(X_1^2-1)(X_2^2-1)=0, E|X_1|^2(L|X_1|)^\alpha(L_2|X_1|)^\beta<\infty, \alpha>-1, \beta\in R.$

$$I(\varepsilon,\alpha,\beta)\triangleq\sum_{n=10}^{\infty}\frac{(Ln)^\alpha(L_2n)^{\beta+1}}{n}P(|S_n|\ge\sqrt{(2(1+\alpha)+\varepsilon)nL_2n}),$$

如果对某一 $\varepsilon_0>0$, 使得

$$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{(Ln)^\alpha(L_2n)^{\beta+1}}{n(L_2n)^{\frac12}}\exp\{-\frac{(\varepsilon+\varepsilon_0)L_2n}{2}\}\le c<\infty,$$

则对任意的 $\varepsilon>0$, 有 $I(\varepsilon,\alpha,\beta)<\infty$.

3　主要结果的证明

为证以上定理，首先我们给出下面的引理：

引理 3.1[5]　设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，每个 $EX_i=0, EX_i^2=\sigma_i^2, B_n^2=\sum_1^n\sigma_i^2, L_{r,n}=B_n^{-r}\sum_1^n E|X_i|^r<\infty, r\ge3$ 不必为整数，则

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\le C(r)(1+|x|)^{-r}(L_{3,n}+L_{r,n}).$$

对一切 n 和 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都成立，其中 $C(r)$ 仅与 r 有关，式中及以下的 $\Phi(x)$ 均表示标准正态分布.

注 3　引理 3.1 可参阅文献 [5] 中的定理 5.

定理 2.1 的证明

(1) 若 $\varphi(x)\to c$, 则结果是显然的.

(2) 若 $\varphi(x)\uparrow\infty$, 令 $\xi_{nk}=\xi_k^\omega I(|\xi_k^\omega|\le H(n)), \eta_{nk}=\xi_{nk}-E\xi_{nk}$, $T_{1n}=\sum_{k=1}^n\xi_{nk}, T_{2n}=\sum_{k=1}^n\eta_{nk}$.

类似于文 [3], 由 $E(X_1|\mathcal{F})$=0 可知,

$$\begin{aligned}|E^\omega T_{1n}|&=n|E^\omega\xi_1^\omega I(|\xi_1^\omega|\ge H(n))|\\&\le\frac{H(n)}{\varphi^2(n)}E^\omega(\xi_1^\omega)^2I(|\xi_1^\omega|\ge H(n))\quad\text{a.s.}\end{aligned}$$

由 $|T_{1n}| \le |T_{2n}| + |E^\omega T_{1n}|$, 我们可得

$$\begin{aligned} & P^\omega(|T_n^\omega| \ge H(n)) \\ & \le P^\omega(|T_n^\omega| \ge H(n), T_n^\omega = T_{1n}) + P^\omega(T_n^\omega \ne T_{1n}) \\ & \le P^\omega(|T_{2n}| \ge H_1(n)) + nP^\omega(|\xi_1^\omega| \ge H(n)) \\ & \le P^\omega(|T_{2n}| \ge H(n)(1-\varphi^{-2}(n))) + nP^\omega(|\xi_1^\omega| \ge H(n)) \\ & \triangleq I_1 + I_2 \quad \text{a.s.,} \end{aligned} \tag{3.11}$$

其中 $H_1(n) = H(n)(1-\varphi^{-2}(n)E^\omega\xi_1^{\omega 2}I(|\xi_1^\omega| \ge H(n)))$.

下面我们分别考察 I_2 和 I_1, 由条件 (A),(B), 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n} I_2 &= \sum_{n=1}^\infty f(n) P^\omega(|\xi_1^\omega| \ge H(n)) \\ &\le \sum_{j=1}^\infty P^\omega(H(j) \le |\xi_1^\omega| < H(j+1)) \sum_{n=1}^j n^{\delta/2} f(n) \cdot n^{-\delta/2} \\ &\le c\sum_{j=1}^\infty jf(j)P^\omega(H(j) \le |\xi_1^\omega| < H(j+1)) \\ &\le cE^\omega H^{-1}(|\xi_1^\omega|)f(H^{-1}(|\xi_1^\omega|)) \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

进一步我们可得到

$$\begin{aligned} E(\sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n} I_2) = E(\sum_{n=1}^\infty f(n)P^\omega(|\xi_1^\omega| \ge H(n))) &\le cE(E^\omega H^{-1}(|\xi_1^\omega|)f(H^{-1}(|\xi_1^\omega|))) \\ &\le cEH^{-1}(|X_1|)f(H^{-1}(|X_1|)) < \infty. \end{aligned} \tag{3.12}$$

对于 I_1, 我们首先注意到 $\eta_{ni}(1 \le i \le n)$ 是独立同分布随机变量, 并且 $E^\omega\eta_{ni} = 0$ a.s. 对 $\forall k \in R^+, E^\omega|\eta_{ni}|^k < \infty, \sigma_\omega^2(n) = E^\omega\eta_{ni}^2 \to 1$ a.s.. 为行文方便, 不妨记

$$g(n) = \varphi(n)(1-\varphi^{-2}(n)).$$

再注意到

$$E^\omega T_{2n}^2 = nE^\omega\eta_{ni}^2 = n\sigma_\omega^2(n) \quad \text{a.s.}$$

因为 $\sigma_\omega^2(n) \le 1$ a.s., 由引理 3.1, 对一切 $k \ge 3$, 有

$$\begin{aligned} & |P^\omega(\frac{|T_{2n}|}{n^{1/2}\sigma_\omega(n)} \ge \frac{g(n)}{\sigma_\omega(n)}) - 2\Phi(-\frac{g(n)}{\sigma_\omega(n)})| \\ & \le c(1+\frac{g(n)}{\sigma_\omega(n)})^{-(1+[k])}(\frac{E^\omega|\eta_{ni}|^3}{(E^\omega|\eta_{ni}|^2)^{3/2}\sqrt{n}} + \frac{E^\omega|\eta_{ni}|^{1+[k]}}{(E^\omega|\eta_{ni}|^2)^{(1+[k])/2}n^{([k]-1)/2}}) \\ & \le c[\varphi(n)]^{-(1+[k])}(n^{-\frac{1}{2}}E^\omega|\xi_1^\omega|^3 I(|\xi_1^\omega| \le H(n)) + n^{-\frac{[k]-1}{2}}E^\omega|\xi_1^\omega|^{[k]+1}I(|\xi_1^\omega| \le H(n))) \\ & \triangleq I_3 + I_4 \quad \text{a.s.,} \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中 $[k]$ 表示取最大整数, 下面分别考察 I_4 和 I_3.

对 I_4, 由条件 (A),(B) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}I_4 &\le c\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{1+[k]}{2}}f(n)([\varphi(n)]^{-(1+[k])}E^{\omega}|\xi_1^{\omega}|^{1+[k]}I(|\xi_1^{\omega}|\le H(n))\\ &\le c\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{1+[k]}{2}}f(n)([\varphi(n)]^{-(1+[k])}\sum_{j=1}^{n}H^{1+[k]}(j)P^{\omega}(H(j-1)<|\xi_1^{\omega}|\le H(j))\\ &\le c\sum_{j=1}^{\infty}jf(j)P^{\omega}(H(j-1)<|\xi_1^{\omega}|\le H(j))\\ &\le cE^{\omega}H^{-1}(|\xi_1^{\omega}|)f(H^{-1}(|\xi_1^{\omega}|))\quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}E(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}I_4) &\le E(cE^{\omega}H^{-1}(|\xi_1^{\omega}|)f(H^{-1}(|\xi_1^{\omega}|)))\\ &\le cEH^{-1}(|X_1|)f(H^{-1}(|X_1|))<\infty. \end{aligned}\tag{3.14}$$

同理，对 I_3 我们可证得

$$E(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}I_3)<\infty.$$

利用 $\Phi(-x)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp(-\frac{x^2}{2})(x\to\infty), a_n\sim b_n$ 表示

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1.\tag{3.15}$$

由 $\varphi(n)\uparrow$ 及 $g(n)$ 的表达式，当 n 足够大时，有 $\frac{1}{2}\varphi(n)\le g(n)\le\varphi(n)$, 故我们可得

$$(\text{I})\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}\Phi\{-\frac{\varphi(n)}{\sigma_{\omega}(n)}\}\le c\ \text{ a.s.}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}\Phi\{-\frac{g(n)}{\sigma_{\omega}(n)}\}\le c\ \text{ a.s.}\tag{3.16}$$

所以由 (3.11)–(3.16) 可知定理成立.

定理 2.2 的证明　仿 (3.11) 式可得

$$\begin{aligned}P^{\omega}(|T_{1n}|\ge H(n)) &\le P^{\omega}(|T_{1n}^{\omega}|\ge H(n), T_n^{\omega}=T_{1n})+P^{\omega}(T_n^{\omega}\ne T_{1n})\\ &\le P^{\omega}(|T_n^{\omega}|\ge H(n)+nP^{\omega}(|\xi_1^{\omega}|\ge H(n))\quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

所以我们有

$$\begin{aligned}P^{\omega}(|T_n^{\omega}|\ge H(n)) &\ge P^{\omega}(|T_{2n}|\ge H(n)(1+\varphi^{-2}(n)E^{\omega}\xi_1^{\omega 2}I(|\xi_1^{\omega}|\ge H(n))))-nP^{\omega}(|\xi_1^{\omega}|\ge H(n))\\ &\ge P^{\omega}(|T_{2n}|\ge H_2(n))-nP^{\omega}(|\xi_1^{\omega}|\ge H(n))\quad \text{a.s.},\end{aligned}$$

其中 $H_2(n)=H(n)(1+\varphi^{-2}(n))$. 由 $H_2(n)$ 的表达式，显然有 $H(n)\le H_2(n)\le 2H(n)$. 同于 (3.12)–(3.16) 式的证明，可得到

$$E(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}|P^{\omega}(|T_{2n}|\ge H_2(n))-2\Phi(-\frac{H_2(n)}{\sqrt{n}\sigma_{\omega}(n)})|)<\infty.\tag{3.17}$$

由 $E(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}P^{\omega}(|T_{2n}|\geq H_2(n)))<\infty$, 再注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n\varphi(n)}\exp\{-\frac{\varphi^2(n)}{2\sigma_{\omega}^2(n)}\}<\infty \text{ a.s.}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}\Phi\{-\frac{H_2(n)}{\sqrt{n}\sigma_{\omega}(n)}\}<\infty \text{ a.s.} \tag{3.18}$$

所以由 (3.17),(3.18) 式可知定理成立.

命题 2.3 的证明 注意到 $\sigma_{\omega}^2(n)\leq 1$ a.s., 所以由定理 2.1 知结论是显然的.

定理 2.4 的证明 我们可仿定理 2.1 之证法，再由命题 2.3 可知定理成立.

推论 2.5 的证明 在 $I(\varepsilon,\alpha,\beta)$ 式中，取 $f(x)=(Lx)^{\alpha}(L_2x)^{\beta+1},\alpha>-1,\beta\in R,\varphi(x)=(L_2x)^{1/2},x\geq 10$. 由于 $H^{-1}(x)\sim\frac{x^2}{L_2x}$, 所以我们易得

$$H^{-1}(x)f(H^{-1}(x))\sim x^2(Lx)^{\alpha}(L_2x)^{\beta}.$$

于是对 $\varepsilon_0=2(1+\alpha)>0$, 利用定理 2.4 可证得.

参考文献:

[1] DAVIS J A. *Convergence rates for the law of the interated logarithm* [J]. Ann. Math. Statistics, 1968, **39**(5): 1479–1485.

[2] GAFUROV M U. *On the estimate of the rate of convergence in the law of interated logarithm* [J]. Probability theory and mathematical statistics (Tbilisi, 1982), 137–144, Lecture Notes in Math., 1021, Springer, Berlin, 1983.

[3] 王启应， GAFUROV M U. 关于重对数律收敛速度及小参数问题 [J]. 中国科学技术大学学报， 1991, **21**(2): 17–22.
WANG Qi-ying, GAFUROV M U. *Further reareach for convergence rates of the L.I.L and the question of small parameter* [J]. J. China Univ. Sci. Tech., 1991, **21**(2): 17–22. (in Chinese)

[4] CHOW Y S, TEICHER H. *Probability Theory* [M]. Independence Interchangeability Martingales, New York: Springer-Verlag, 1978.

[5] 白志东，赵林城．独立随机变量之和的分布函数的渐近展开 [J]. 中国科学 A 辑， 1985, **8**: 677–698.
BAI Zhi-dong, ZHAO Lin-cheng. *Asymptotic expansion of distribution function for sums of independent random variables* [J]. Sci. China, Ser. A, 1985, **8**: 677–698. (in Chinese)

Convergence Rates for the Law of Interated Logarithm for Interchangeable Random Variables

ZHAO Yue-xu

(Dept. of Math., Hangzhou Dianzi University, Zhejiang 310018, China)

Abstract: In this paper, we discuss the convergence rates for the law of interated logarithm for interchangeable random variables $\{X_n : n\geq 1\}$, and obtain some similar limit properties of interchangeable random variables and independent random variables. Moreover, we give a description of convergence rates for the law of the interated logarithm.

Key words: interchangeable random variables; law of interated logarithm; convergence rate.