第25卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.25, No.2
2005年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2005

文章编号: 1000-341X(2005)02-0341-06 文献标识码: A

关于一个推广的具有最佳常数因子的 Hilbert 类不等式及其应用

杨必成
(广东教育学院数学系, 广东 广州 510303)
(E-mail: bcyang@pub.guangzhou.gd.cn)

摘 要: 本文引入单参数 λ, 对一个 Hilbert 类不等式作具有最佳常数因子的推广. 作为应用, 建立它的等价形式并获得了一些特殊结果.

关键词: Hilbert 类不等式; 权系数; Hölder 不等式.
MSC(2000): 26D15
中图分类: O178

1 引 言

设 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \{a_n\}, \{b_n\}$ 为非负实数列, 使得 $0<\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p<\infty$ 及 $0<\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q<\infty$. 则有如下等价不等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\}^{\frac{1}{p}}\{\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\}^{\frac{1}{q}}; \tag{1.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m+n})^p<[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}]^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p, \tag{1.2}$$

这里, 常数因子 $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ 与 $[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}]^p$ 都为最佳值. 称 (1.1) 为 Hardy-Hilbert 不等式 (见 [1,Th. 316]). 它在分析学有重要的应用 [2].

最近, 匡继昌 [3] 考虑了 (1.1) 的引入单参数的推广, 杨必成 [4] 则改进了 [3] 的结果, 使之成为如下优美的等价推广形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m^\lambda+n^\lambda}<\frac{\pi}{\lambda\sin(\frac{\pi}{p})}\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{(p-1)(1-\lambda)}a_n^p\}^{\frac{1}{p}}\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{(q-1)(1-\lambda)}b_n^q\}^{\frac{1}{q}}; \tag{1.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\lambda-1}(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^\lambda+n^\lambda})^p<[\frac{\pi}{\lambda\sin(\frac{\pi}{p})}]^p\sum_{n=1}^{\infty}n^{(p-1)(1-\lambda)}a_n^p, \tag{1.4}$$

这里, 常数因子 $\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}$ 与 $[\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}]^p$ $(0<\lambda\le\min\{p,q\})$ 都是最佳值.

收稿日期: 2003-04-14
基金项目: 广东省高校自然科学基金 (0177), 广东教育学院教授、博士科研基金.

由于引入了 β 函数，杨必成[5] 讨论了相应积分不等式的推广情形. 而后，[6] 得到如下不同于 (1.3), (1.4) 的 (1.1),(1.2) 的等价推广式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m+n)^{\lambda}}<B(\frac{p+\lambda-2}{p},\frac{q+\lambda-2}{q})\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}a_n^p\}^{\frac{1}{p}}\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}b_n^q\}^{\frac{1}{q}};\tag{1.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{(p-1)(1-\lambda)}[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{(m+n)^{\lambda}}]^p<[B(\frac{p+\lambda-2}{p},\frac{q+\lambda-2}{q})]^p\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}a_n^p,\tag{1.6}$$

这里，常数因子 $B(\frac{p+\lambda-2}{p},\frac{q+\lambda-2}{q})$ 与 $[B(\frac{p+\lambda-2}{p},\frac{q+\lambda-2}{q})]^p, (2-\min\{p,q\}<\lambda\le 2)$ 都是最佳值 ($B(u,v)$ 为 β 函数). 易见当 $\lambda=1$ 时，(1.3),(1.5) 变为 (1.1), 而 (1.4),(1.6) 变为 (1.2).

在与 (1.1) 相同的条件下，还有如下类似于 (1.1) 的不等式 [1,Th.342]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)a_m b_n}{m-n}<[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}]^2\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\}^{\frac{1}{p}}\{\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\}^{\frac{1}{q}},\tag{1.7}$$

这里，常数因子 $[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}]^2$ 为最佳值. 当 $p=q=2$ 时，(1.7) 变为如下 Hilbert 类不等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)a_m b_n}{m-n}<\pi^2(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q)^{\frac{1}{2}}.\tag{1.8}$$

近年来，[7] 引入单参数 $\lambda>0$, 把 (1.7) 左边的 $\ln(m/n)$ 变为 $\ln[(m+\lambda)/(n+\lambda)]$, 给出有意义的推广. 而 [8,9] 则考虑了齐次及多重的 Hilbert 类不等式的推广情形. 2003 年，杨必成，等[10] 综述了上述的方法及各类近代结果.

本文的任务是对 (1.8) 建立类似与 (1.3) 的推广不等式；作为应用，导出其等价式及对偶于 (1.7) 的特殊结果；并证明所有新的推广不等式的常数因子都是最佳的.

为此，先介绍若干引理.

2 一些引理

引理 2.1 设 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\lambda>0,0<\varepsilon<\frac{\lambda}{2}$. 则有

$$\varepsilon\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\frac{\ln(x/y)}{x^{\lambda}-y^{\lambda}}x^{\frac{\lambda-p-\varepsilon}{p}}y^{\frac{\lambda-q-\varepsilon}{q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge[\frac{\pi}{\lambda\sin(\frac{\pi}{p})}]^2+o(1)\ (\varepsilon\to 0^+).\tag{2.1}$$

证明 固定 x, 作变换 $u=(y/x)^{\lambda}$, 有 $\mathrm{d}y=\frac{x}{\lambda}u^{-1+1/\lambda}\mathrm{d}u$ 及

$$\begin{aligned}&\varepsilon\int_1^{\infty}x^{\frac{\lambda-p-\varepsilon}{p}}\{\int_1^{\infty}\frac{\ln(x/y)}{x^{\lambda}[1-(y/x)^{\lambda}]}y^{\frac{\lambda-q-\varepsilon}{q}}\mathrm{d}y\}\mathrm{d}x\\&=\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}[\int_{1/x^{\lambda}}^{\infty}\frac{\ln u}{u-1}u^{-(\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{q\lambda})}\mathrm{d}u]\mathrm{d}x\\&=\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}[\int_0^{\infty}\frac{\ln u}{u-1}u^{-(\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{q\lambda})}\mathrm{d}u-\int_0^{1/x^{\lambda}}\frac{\ln u}{u-1}u^{-(\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{q\lambda})}\mathrm{d}u]\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\infty}\frac{\ln u}{u-1}u^{-(\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{q\lambda})}\mathrm{d}u-\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x}[\int_0^{1/x^{\lambda}}\frac{\ln u}{u-1}u^{-\frac{1+p}{2p}}\mathrm{d}u]\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{2.2}$$

由两次分部积分及交换积分与级数运算次序，有

$$
\begin{aligned}
&\int_1^\infty \frac{1}{x}\Big[\int_0^{1/x^\lambda} \frac{\ln u}{u-1} u^{-\frac{1+p}{2p}}\mathrm{d}u\Big]\mathrm{d}x\\
&=\int_1^\infty \frac{1}{x}\Big[\int_0^{1/x^\lambda}(-\ln u)\sum_{n=0}^\infty u^{n-\frac{1+p}{2p}}\mathrm{d}u\Big]\mathrm{d}x\\
&=\int_1^\infty \frac{1}{x}\Big[\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+\frac{1}{2q}}\int_0^{1/x^\lambda}(-\ln u)\mathrm{d}u^{n+\frac{1}{2q}}\Big]\mathrm{d}x\\
&=\int_1^\infty \frac{1}{x}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+\frac{1}{2q}}\Big[\lambda x^{-\lambda(n+\frac{1}{2q})}\ln x+\int_0^{1/x^\lambda} u^{n+\frac{1}{2q}-1}\mathrm{d}u\Big]\mathrm{d}x\\
&=\int_1^\infty \frac{1}{x}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+\frac{1}{2q}}\Big[\lambda x^{-\lambda(n+\frac{1}{2q})}\ln x+\frac{1}{n+\frac{1}{2q}}x^{-\lambda(n+\frac{1}{2q})}\Big]\mathrm{d}x\\
&=\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+\frac{1}{2q}}\int_1^\infty \Big[\lambda x^{-1-\lambda(n+\frac{1}{2q})}\ln x+\frac{1}{n+\frac{1}{2q}}x^{-1-\lambda(n+\frac{1}{2q})}\Big]\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{\lambda}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+\frac{1}{2q})^3}=O(1)\ (\varepsilon\to 0^+).
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

因有 (见 [1,Th.342 的注])

$$
\int_0^\infty \frac{\ln u}{u-1}u^{-(\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{q\lambda})}\mathrm{d}u\to\int_0^\infty \frac{\ln u}{u-1}u^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}u=\Big[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\Big]^2\ (\varepsilon\to 0^+),\tag{2.4}
$$

把 (2.3),(2.4) 的结果代入 (2.2), 易见有 (2.1).

引理 2.2　设 $\lambda>0, f(u)=\frac{\ln u}{u^\lambda-1}$ 在 $(0,\infty)$ 连续 (补充定义 $f(1)=1/\lambda$). 则 f(u) 在 $(0,\infty)$ 严格递减.

证明　求导数得

$$
f'(u)=\frac{u^\lambda-1-\lambda u^\lambda\ln u}{(u^\lambda-1)^2u}=\frac{g(u)}{(u^\lambda-1)^2u},
$$

这里, 定义 $g(u)=u^\lambda-1-\lambda u^\lambda\ln u$. 则有 $g'(u)=-\lambda^2u^{\lambda-1}\ln u$. 易见 $g'(u)>0, u\in(0,1); g'(u)<0, u\in(1,\infty)$, 因而 g(1)=0 为 g(u) 的唯一最大值. 有 $g(u)<0$, $u\in(0,1)\bigcup(1,\infty)$. 故 $f'(u)<0, u\in(0,1)\bigcup(1,\infty), f(u)$ 分别在区间 (0,1) 及 $(1,\infty)$ 严格递减. 因 $f(1)=\lim_{u\to1}f(u)=1/\lambda, f(u)$ 在 u=1 连续. 故 f(u) 在 $(0,\infty)$ 亦严格递减.

注　设 $u=x/y\ (x,y>0)$, 若固定 $y>0$, 由引理 2.2, 易见 $y^\lambda f(\frac{x}{y})=\frac{\ln x/y}{x^\lambda-y^\lambda}$ 在 $x\in(0,\infty)$ 递减; 若固定 $x>0$, 易见 $x^\lambda f(\frac{y}{x})=\frac{\ln x/y}{x^\lambda-y^\lambda}$ 在 $y\in(0,\infty)$ 亦递减.

引理 2.3　设 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 0<\lambda\le\min\{p,q\}$. 定义权系数 $\varpi_\lambda(r,n)$ 为

$$
\varpi_\lambda(r,n):=n^{\lambda/r}\sum_{m=1}^\infty \frac{\ln(n/m)}{n^\lambda-m^\lambda}\Big(\frac{1}{m}\Big)^{\frac{\lambda}{r}+1-\lambda}\ (r=p,q;n\in N).\tag{2.5}
$$

则有如下不等式

$$
\varpi_\lambda(r,n)<\Big[\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}\Big]^2\ (r=p,q).\tag{2.6}
$$

证明 因 $0<\lambda\le\min\{p,q\}$, 有 $1-(1-\frac{1}{r})\lambda\ge 0$ $(r=p,q)$. 由引理 2.2, 有

$$\frac{\ln(m/n)}{(\frac{m}{n})^{\lambda}-1}\le\frac{\ln(y/n)}{(\frac{y}{n})^{\lambda}-1},\frac{\ln(n/m)}{n^{\lambda}-m^{\lambda}}\le\frac{\ln(n/y)}{n^{\lambda}-y^{\lambda}}\ (y\in(0,m]).$$

因而有

$$\begin{aligned}\varpi_{\lambda}(r,n)&<\sum_{m=1}^{\infty}n^{\lambda/r}\int_{m-1}^{m}\frac{\ln(n/y)}{n^{\lambda}-y^{\lambda}}\Big(\frac{1}{y}\Big)^{1-(1-\frac{1}{r})\lambda}\mathrm{d}y\\&=n^{\lambda/r}\int_{0}^{\infty}\frac{\ln(n/y)}{n^{\lambda}-y^{\lambda}}\Big(\frac{1}{y}\Big)^{1-(1-\frac{1}{r})\lambda}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

在上式中令 $u=(y/n)^{\lambda}$, 由 (2.4) 有

$$\varpi_{\lambda}(r,n)<\frac{1}{\lambda^{2}}\int_{0}^{\infty}\frac{\ln u}{u-1}u^{-\frac{1}{r}}\mathrm{d}u=\Big[\frac{\pi}{\lambda\sin(\frac{\pi}{p})}\Big]^{2}\ \ (r=p,q).$$

3 推广的级数形式及等价式

定理 3.1 设 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,0<\lambda\le\min\{p,q\},\{a_n\},\{b_n\}$ 为非负实数列, 使得 $0<\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1-\lambda}a_n^p<\infty$ 及 $0<\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-1-\lambda}b_n^q<\infty$. 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)a_mb_n}{m^{\lambda}-n^{\lambda}}<\Big[\frac{\pi}{\lambda\sin(\frac{\pi}{p})}\Big]^{2}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1-\lambda}a_n^p\Big\}^{\frac{1}{p}}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-1-\lambda}b_n^q\Big\}^{\frac{1}{q}};\tag{3.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\lambda(p-1)-1}\Big[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)a_m}{m^{\lambda}-n^{\lambda}}\Big]^{p}<\Big[\frac{\pi}{\lambda\sin(\frac{\pi}{p})}\Big]^{2p}\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1-\lambda}a_n^p,\tag{3.2}$$

这里, 常数因子 $[\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}]^2$ 与 $[\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}]^{2p}$ 都为最佳值; 且 (3.1) 与 (3.2) 等价.

特别地, 当 $\lambda=1$ 时, 有如下具有最佳常数因子的等价式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)a_mb_n}{m-n}<\Big[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\Big]^{2}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}a_n^p\Big\}^{\frac{1}{p}}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-2}b_n^q\Big\}^{\frac{1}{q}};\tag{3.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}\Big[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)a_m}{m-n}\Big]^{p}<\Big[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\Big]^{2p}\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}a_n^p.\tag{3.4}$$

证明 配方及应用带权的 Höler 不等式 [11], 由 (2.5) 有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)a_mb_n}{m^{\lambda}-n^{\lambda}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)}{m^{\lambda}-n^{\lambda}}\Big[\Big(\frac{m^{\lambda/q^2}}{n^{\lambda/p^2}}\Big)\Big(\frac{m^{1/q}}{n^{1/p}}\Big)^{1-\lambda}a_m\Big]\Big[\Big(\frac{n^{\lambda/p^2}}{m^{\lambda/q^2}}\Big)\Big(\frac{n^{1/p}}{m^{1/q}}\Big)^{1-\lambda}b_n\Big]\\&\le\Big\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)}{m^{\lambda}-n^{\lambda}}\Big(\frac{m^{\lambda p/q^2}}{n^{\lambda/p}}\Big)\Big(\frac{m^{p-1}}{n}\Big)^{1-\lambda}a_m^p\Big\}^{\frac{1}{p}}\times\end{aligned}$$

$$\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(n/m)}{n^{\lambda}-m^{\lambda}}(\frac{n^{\lambda q/p^2}}{m^{\lambda/q}})(\frac{n^{q-1}}{m})^{1-\lambda}b_n^q\}^{\frac{1}{q}}$$
$$=\{\sum_{m=1}^{\infty}\varpi_{\lambda}(p,m)m^{p-1-\lambda}a_m^p\}^{\frac{1}{p}}\{\sum_{n=1}^{\infty}\varpi_{\lambda}(q,n)n^{q-1-\lambda}b_n^q\}^{\frac{1}{q}}.$$

再由 (2.6), 可得 (3.1).

设 $0<\varepsilon<\lambda/2$ 及 $\tilde{a}_n=n^{\frac{\lambda-p-\varepsilon}{p}},\tilde{b}_n=n^{\frac{\lambda-q-\varepsilon}{q}}$ $(n\in N)$. 则有

$$\varepsilon\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1-\lambda}\tilde{a}_n^p\}^{\frac{1}{p}}\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-1-\lambda}\tilde{b}_n^q\}^{\frac{1}{q}}=\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$
$$=\varepsilon+\varepsilon\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}<\varepsilon+\varepsilon\int_1^{\infty}\frac{1}{t^{\varepsilon+1}}dt=\varepsilon+1. \tag{3.5}$$

易见 $(\lambda-r-\varepsilon)/r<0$ $(r=p,q)$. 由引理 2.2 的注及 (2.1), 有

$$\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)\tilde{a}_m\tilde{b}_n}{m^{\lambda}-n^{\lambda}}>\varepsilon\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\frac{\ln(x/y)}{x^{\lambda}-y^{\lambda}}x^{\frac{\lambda-p-\varepsilon}{p}}y^{\frac{\lambda-q-\varepsilon}{q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\geq[\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}]^2+o(1)\ (\varepsilon\to 0^+). \tag{3.6}$$

若 (3.1) 的常数因子 $[\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}]^2$ 对某个 λ 不为最佳值, 则有正数 $K<[\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}]^2$, 使 (3.1) 的常数因子 $[\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}]^2$ 换上 K 后, 仍然成立. 特别地, 由 (3.5),(3.6), 有

$$[\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}]^2+o(1)\leq\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)\tilde{a}_m\tilde{b}_n}{m^{\lambda}-n^{\lambda}}$$
$$<\varepsilon K\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1-\lambda}\tilde{a}_n^p\}^{\frac{1}{p}}\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-1-\lambda}\tilde{b}_n^q\}^{\frac{1}{q}}=K(\varepsilon+1).$$

令 $\varepsilon\to 0^+$, 有 $[\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}]^2\leq K$. 这与假设 $K<[\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}]^2$ 相矛盾. 故 (3.1) 的常数因子 $[\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}]^2$ 为最佳值.

欲证 (3.2), 可设 $b_n=n^{\lambda(p-1)-1}[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)a_m}{m^{\lambda}-n^{\lambda}}]^{p-1}$ $(n\in N)$. 则由 (3.1), 有

$$0<[\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-1-\lambda}b_n^q]^p=\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{\lambda(p-1)-1}[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)a_m}{m^{\lambda}-n^{\lambda}}]^p\}^p$$
$$=[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)a_mb_n}{m^{\lambda}-n^{\lambda}}]^p$$
$$\leq[\frac{\pi}{\lambda\sin(\frac{\pi}{p})}]^{2p}\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1-\lambda}a_n^p\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-1-\lambda}b_n^q\}^{p-1}; \tag{3.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-1-\lambda}b_n^q=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\lambda(p-1)-1}[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)a_m}{m^{\lambda}-n^{\lambda}}]^p$$
$$\leq[\frac{\pi}{\lambda\sin(\frac{\pi}{p})}]^{2p}\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1-\lambda}a_n^p<\infty. \tag{3.8}$$

这说明应用 (3.1) 的条件都具备, (3.7) 应取严格不等号; (3.8) 亦然. 故 (3.2) 成立.

上面由 (3.1) 证明了 (3.2). 为证等价性, 可设 (3.2) 成立. 由 Hölder 不等式, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)a_m b_n}{m^\lambda - n^\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[n^{\frac{\lambda+1-q}{q}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)a_m}{m^\lambda - n^\lambda}\right]\left[n^{\frac{q-1-\lambda}{q}}b_n\right]$$

$$\leq \left\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{\lambda(p-1)-1}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m/n)a_m}{m^\lambda - n^\lambda}\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-1-\lambda}b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{3.9}$$

再由 (3.2), 有 (3.1). 故 (3.1) 与 (3.2) 等价.

若 (3.2) 的常数因子 $[\frac{\pi}{\lambda\sin(\frac{\pi}{p})}]^{2p}$ 不为最佳值, 则由 (3.9), 易证 (3.1) 的常数因子亦不为最佳值. 这个矛盾说明 (3.2) 的常数因子 $[\frac{\pi}{\lambda\sin(\frac{\pi}{p})}]^{2p}$ 为最佳值.

评注 3.2 当 $p=q=2$ 时, (3.3) 变成 (1.8), 故 (3.1),(3.3) 是 (1.8) 的推广. 不等式 (3.3) 与 (1.7) 虽具有相同的最佳常数因子, 但形似而实不同, 可视之为对偶形式. 由于所建立的不等式的常数因子都是最佳值, 我们得到了一批新的推广结果.

参考文献:

[1] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, POLYA G. *Inequalities* [M]. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.

[2] MITRINOVIC D S, PECARIC J E, FINK A M. *Inequaliyies Involving Functions and Their Integrals and Derivatives* [M]. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.

[3] KUANG Ji-chang. *On new extensions of Hilbert's integral inequality* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1999, **235**: 608–614.

[4] 杨必成. 关于一个推广的 Hardy-Hilbert 不等式 [J]. 数学年刊, A 辑, 2002, **23**(2): 247–252.
YANG Bi-cheng. *On an extension of Hardy-Hilbert's inequality* [J]. Chinese Ann. Math., Ser.A, 2002, **23**(2): 247–252. (in Chinese)

[5] YANG Bi-cheng. *On Hardy-Hilbert's integral inequality* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2001, **261**: 295–306.

[6] 杨必成. 关于 Hardy-Hilbert 不等式及其等价式的推广 [J]. 数学杂志, 2004, **24**(1): 24–30.
YANG Bi-cheng. *On generalizations of Hardy-Hibert's inequality and their equivalent form* [J]. J. Math. (Wuhan), 2004, **24**(1): 24–30. (in Chinese)

[7] KUANG Ji-chang, DEBNATH L. *On new generalizations of Hilbert's inequality and their applications* [J], J. Math. Anal. Appl., 2000, **245**: 248–265.

[8] 胡 克. 关于 Hardy-Littlewood-Polya 不等式 [J]. 数学物理学报, 2000, **20**: 684–687.
HU Ke. *On Hardy-Littlewood-Polya's inequality* [J]. Acta Math. Sci., 2000, **20**: 684–687. (in Chinese)

[9] 洪 勇. Hardy-Hilbert 积分不等式的全方位推广 [J]. 数学学报, 2001, **44**(4): 619–626.
HONG Yong. *All-side generalization about Hardy-Hilbert integral inequality* [J]. Acta Math. Sinica, 2001, **44**(4): 619–626. (in Chinese)

[10] YANG Bi-cheng, Rassias T M. *On the way of weight coefficient and research for the Hilbert-type inequalities* [J]. Math. Inequal. Appl., 2003, **6**(4): 625–658.

[11] 匡继昌. 常用不等式 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2003.
KUANG Ji-chang. *Applied Inequalities* [M]. Jinan: Shangdong Science and Technology Press, 2003. (in Chinese)

Generalization of Hilbert's Type Inequality with Best Constant Factor and Its Applications

YANG Bi-cheng

(Dept. of Math., Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, China)

Abstract: By introducing a parameter λ, we give a generalization of a Hilbert's type inequality with the best constant factor. As applications, we build its equivalent form and obtain some particular results.

Key words: Hilbert's type inequality; weight function; Hölder's inequality.