第25卷第2期 数学研究与评论 Vol.25, No.2
2005年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2005

文章编号: 1000-341X(2005)02-0351-07 **文献标识码**: A

非线性方程极限环存在性的另一类情况

梁锦鹏
(广东工业大学应用数学学院，广东 广州 510090)
(E-mail: Liangjp@126.com)

摘 要: 本文讨论了非线性方程 $\frac{dx}{dt}=h(y)-F(x),\frac{dy}{dt}=-g(x)$ 的极限环存在性的另一类情况. 即去掉了 $G(\pm\infty)$ 的假设，该方程的极限环的存在性问题.

关键词: 非线性方程；极限环；存在性.
MSC(2000): 34C25
中图分类: O175.12

以下讨论的非线性微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=h(y)-F(x), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x). \end{cases} \tag{1}$$

总设 $f(x),g(x)\in C^0$, $h(y)$ 具有一阶连续的导数. 其中 $F(x)=\int_0^x f(\xi)\mathrm{d}\xi, G(x)=\int_0^x g(\xi)\mathrm{d}\xi$.

先介绍下面的引理:

引理 1 如果微分方程组 (1) 满足:

1) $xg(x)>0$, 当 $x\neq 0, a<x<b$, 其中 $-\infty\leq a<0<b\leq+\infty$.

2) $yh(x)>0$, 当 $y\neq 0$, 且 $h'(y)\geq\alpha>0$. 则 $h(y_A)-h(y_B)\geq\sqrt{8\alpha G(\bar{x})}$,

其中 $h(y_A),h(y_B)$ 是方程 (1) 的过点 $(\bar{x},F(\bar{x}))$ 的轨线交 y 轴于点 A, B 的纵坐标. 且 $h(y_B)\leq 0\leq h(y_A), a<\bar{x}<b$.

证明 对方程组 (1), 作如下的变换:

$$v=h(y), \tag{2}$$

得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v-F(x), \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-h'(y)g(x). \end{cases}$$

继续对上述方程作如下变换:

$$u=\int_0^x h'(y(\xi))\mathrm{d}\xi, \tag{3}$$

收稿日期: 2002-07-12

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

其中 $y=y(x)$ 是方程组 (1) 的轨线. 有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=h'(y)[v-F(x(u))], \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-h'(y)g(x(u)), \end{cases}$$

其中 $x=x(u)$ 是 (3) 中 $u=u(x)$ 的反函数. 将上述方程组中的方程相除得:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{-g(x(u))}{v-F(x(u))}. \tag{4}$$

记

$$g(x(u))=\overline{g(u)}, \quad F(x(u))=\overline{F(u)} \tag{5}$$

并代入方程 (4) 以及将方程 (4) 改写为关于 u,v 的 Liénard 系统:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v-\overline{F(u)}, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\overline{g(u)}. \end{cases} \tag{6}$$

由变换 (3) 及 $h'(y)\geq\alpha>0$, 可得 $u>0$, 当 $x>0; u<0$, 当 $x<0; u=0$, 当且仅当 $x=0$, 所以, 根据条件 1), 及记法 (5) 有

$$u\overline{g(u)}=ug(x)>0, \quad u(a)<u<u(b), \quad u\neq 0. \tag{7}$$

设系统 (6) 过点 $(\bar{u},\overline{F(u)})$ 的轨线与 v 轴的交点纵坐标为 v_A,v_B, 且 $v_B\leq 0\leq v_A$. 根据文 [1] 的引理 1, 有:

$$v_A-v_B\geq\sqrt{8\overline{G(\bar{u})}}, \tag{8}$$

其中 $\overline{G(\bar{u})}=\int_0^{\bar{u}}\overline{g(u)}\mathrm{d}u$, 而 $\bar{u}=u(\bar{x})$. 根据变换 (3), 并注意到记法 (5) 以及 $h'(y)\geq\alpha>0$, 有

$$\overline{G(\bar{u})}=\int_0^{\bar{u}}\overline{g(u)}\mathrm{d}u=\int_0^{\bar{x}}g(x)h'(y)\mathrm{d}x\geq\alpha\int_0^{\bar{x}}g(x)\mathrm{d}x=\alpha G(\bar{x}). \tag{9}$$

将上式代入 (8), 根据变换 (2), 记 $v_A=h(y_A), v_B=h(y_B)$, 可得

$$h(y_A)-h(y_B)\geq\sqrt{8\alpha G(\bar{x})}.$$

定理 1 考虑微分方程组 (1), 如果满足:

1) $xg(x)>0$, 当 $a<x<b, x\neq 0$, 其中 $-\infty\leq a<0<b\leq+\infty$, $xF(x)<0$. 当 $0<|x|<\delta$.

2) $yh(x)>0$, 当 $y\neq 0; 0<\alpha\leq h'(y)\leq\beta$.

3) 存在正数 C 及 M, 使 $C+F(x)>0$, 当 $0<x<b$, 且有

$$\int_0^b\frac{g(x)\mathrm{d}x}{C+F(x)}\leq\frac{M}{\mu},$$

其中 $\mu=\max\{h'(y)|h^{-1}(-C-M)<y<h^{-1}(-C)\}$, 而 h^{-1} 是 h 的反函数.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

4) 当 $\inf_{a<x<0} F(x) > h(-y_0)$ 时，有

$$\sup_{a<x<0}\left[\int_0^x \frac{g(x)\mathrm{d}x}{F(x)-h(-y_0)} - \frac{F(x)-h(-y_0)}{\alpha}\right] > 0,$$

其中 $h(-y_0) = -(C+M)$.

5) 设 $h(y_1) = A + \sqrt{2\beta G(a)}$, 其中 $A = \sup_{a<x<0} F(x) \leq +\infty, G(a) \leq +\infty$, 且满足下列条件 (a) 与 (b) 之一：

a) $G(b) \geq \frac{(h(y_0)+h(y_1))^2}{8\alpha}$.

b) $\sup_{a<x<0} F(x) \geq h(y_1)$.

则方程组 (1) 在广义矩形： $a < x < b, -y_0 < y < y_1$ 内存在极限环. 其中 $-y_0 = h^{-1}(-C-M), y_1 = h^{-1}(A+\sqrt{2\beta G(a)})$.

证明 与引理 1 的证明一样，对方程组 (1) 作变换 (2), (3), 并用记法 (5), 便把方程组 (1) 变为方程组 (6). 从已知条件 (1), 与得到 (7) 类似，有

1° $u\overline{g(u)} > 0$, 当 $u(a) < u < u(b), u \neq 0$, 以及 $u\overline{F(u)} < 0$, 当 $0 < |u| < u(\delta)$.

作Ляпунов函数： $\lambda(u,v) = \int_0^u \overline{g(u)}\mathrm{d}u + \frac{1}{2}v^2$. 则

$$\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right|_{(6)} = -\overline{g(u)}\ \overline{F(u)} > 0, \quad 0 < |u| < u(\delta).$$

所以， $O(0,0)$ 是不稳定奇点.

现作环域外境界线.

2° 证明从 $N_0(0,-C-M)$ 出发的系统 (6) 的负向轨线 L^-, 在 $0 < u < u(b)$ 内不和等倾线 $v = \overline{F(u)}$ 相交. 假设上述结论不成立, 则从条件 3), 并注意到记法 (5), 有 $\overline{F(u)} = F(x) > -C$. 这样, 必存在 $\bar{u} = u(\bar{x})(0 < \bar{u} < u(b))$, 使 $v(\bar{u}) = -C$, 且当 $0 < u < \bar{u}$ 时, 有 $-M-C < v(u) < -C$. 根据变换 (2), 记 $-v_0 = h(-y_0)$, 即 $-v_0 = -M-C$, 那么，从系统 (6), 有

$$v(\bar{u}) = -v_0 + \int_0^{\bar{u}} \frac{g(\bar{u})\mathrm{d}u}{\overline{F(u)} - v} = -v_0 + \int_0^{\bar{x}} \frac{g(x)h'(y)}{F(x)-v}\mathrm{d}x. \tag{10}$$

从前面已得的结论 1°, 在区域 $\overline{F(u)} > -v, 0 < u < u(\bar{x})$ 中， v 值沿 L^- 是单调增函数. 由 $-M-C < v(u) = h(y) < -C$, 以及 $h'(y) > 0$, 可得 $h^{-1}(-M-C) < y < h^{-1}(-C)$. 而 $h'(y) \in C^0$. 则 $h'(y)$ 在闭区间 $[h^{-1}(-M-C), h^{-1}(-C)]$ 取得最大值 μ. 因而 (10) 变为:

$$v(\bar{u}) \leq -v_0 + \mu\int_0^{\bar{x}} \frac{g(x)}{C+F(x)}\mathrm{d}x < -v_0 + \mu\int_0^{b} \frac{g(x)}{C+F(x)}\mathrm{d}x.$$

注意到条件 3), 从上式可得

$$v(\bar{u}) < -v_0 + M = -C.$$

这与 $v(\bar{u}) = -C$ 的假设相矛盾.

3° 证明方程组 (6) 从 $N_0(0,-C-M)$ 出发的正向轨线 L^+, 在 $u(a) < u(x) < 0$ 内必与等倾线 $v = \overline{F(u)}$ 相交.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

根据定理条件 4), 当 $\inf_{u(a)<u<0}\overline{F(u)} = \inf_{a<x<0} F(x) > h(-y_0) = -v_0$ 时, 并注意到 $h'(y) \geq \alpha > 0$, 以及记法 (5), 有

$$\begin{aligned}
&\sup_{u(a)<u<0}\left[\int_0^u \frac{\overline{g(u)}\mathrm{d}u}{\overline{F(u)}+v_0} - (\overline{F(u)}+v_0)\right] \\
&= \sup_{a<x<0}\left[\int_0^x \frac{g(x)h'(y)}{F(x)-h(-y_0)}\mathrm{d}x - (F(x)-h(-y_0))\right] \\
&\geq \sup_{a<x<0}\left[\alpha\int_0^x \frac{g(x)\mathrm{d}x}{F(x)-h(-y_0)} - (F(x)-h(-y_0))\right] \\
&= \alpha\sup_{a<x<0}\left[\int_0^x \frac{g(x)\mathrm{d}x}{F(x)-h(-y_0)} - \frac{F(x)-h(-y_0)}{\alpha}\right] > 0.
\end{aligned}$$

根据文 [1] 的证定理 1 的步骤 2), 可得 L^+ 在 $u(a)<u<0$ 内与等倾线 $v=\overline{F(u)}$ 相交. 设其交点为 $N_1(u_1,\overline{F(u_1)})$, 其中 $u_1=u(x_1)$.

4° 证明 $0<v_2<v_1$, 其中 v_2 为 L^+ 与 v 正半轴交点的纵坐标, 并根据变换 (2), 记 $v_1=h(y_1)$.

从条件 5), 当 $v_1<+\infty$ 时, $A<+\infty$. 考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{-\overline{g(u)}}{v-A} \quad (u(a)<u<0, A<v) \tag{11}$$

过点 (u_1,A) 的正向轨线 $\bar{L}^+$ 必交 v 正半轴. 设其交点为 $\bar{N}(0,\bar{v}_2)$. 从方程 (11), 可解得:

$$0<\bar{v}_2 = A+\sqrt{2\int_0^{u_1}\overline{g(u)}\mathrm{d}u}.$$

注意到记法 (5) 以及变换 (3), 上式可写为:

$$0<\bar{v}_2 = A+\sqrt{2\int_0^{x_1} g(x)h'(y)\mathrm{d}x}. \tag{12}$$

根据条件 2), (12) 式变为:

$$0<\bar{v}_2<A+\sqrt{2\beta G(a)} = v_1.$$

因 $A\geq F(x)=\overline{F(u)}$, 比较方程 (6) 与方程 (11), 有 $v_2<\bar{v}_2<v_1$.

5° 证明 L^+ 在 $0<u(x)<u(b)$ 内再次与 $v=\overline{F(u)}$ 相交后, 和 v 负半轴相交.

因从条件 1), 2) 及条件 5) 中之 (a), 有

$$\overline{G(u(b))} = \int_0^{u(b)}\overline{g(u)}\mathrm{d}u = \int_0^b g(x)h'(y)\mathrm{d}x \geq aG(b) \geq \frac{h(y_0)+h(y_1))^2}{8}$$

而从条件 5) 中之 (b), 有

$$\sup_{0<u<u(b)}\overline{F(u(x))} = \sup_{0<x<b} F(x) = h(y_1) = v_1.$$

所以, 根据文 [1] 证定理 1 的步骤 4), 可得上述结论 5°.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

综合前面已得的结论 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 方程组 (6) 存在如证文 [1] 定理 1 过程中的环域. 则方程组 (6) 即方程组 (1) 在广义矩形: $a < x < b, -y_0 < y < y_1$ 内存在极限环. 其中 $-y_0 = h^{-1}(-C-M), y_1 = h^{-1}(A+\sqrt{2\beta G(a)}\ )$.

定理 2 对微分方程 (1), 如果满足:

1) 同定理 1.

2) 同定理 1.

3) 存在正数 C 及 M, 使 $C\beta G(x) - F(x) \leq M$, 当 $0 < x < b$.

4) 同定理 1, 但 $h(-y_0) = -(\frac{1}{C}+M)$.

5) 同定理 1.

则方程 (1) 在广义矩形: $a < x < b, -y_0 < y < y_1$ 内存在极限环. 其中 $-y_0 = h^{-1}(-\frac{1}{C}-M), y_1 = h^{-1}(A+\sqrt{2\beta G(a)})$.

证明 对方程组 (1), 作变换 (2), (3), 并用记法 (5), 可得方程组 (6).

I) 从条件 1), 有同定理 1 的结论 1°.

从条件 3), 2), 并注意到记法 (5), 可得:

$$\begin{aligned} C\overline{G(u)} - \overline{F(u)} = C\int_0^{u(x)} \overline{g(u)}\mathrm{d}u - \overline{F(u)} = C\int_0^x g(x)h'(y)\mathrm{d}x - F(x) \\ \leq C\beta G(x) - F(x) \leq M. \end{aligned} \tag{13}$$

从前面得到的结论 1°, 以及 (13) 式, 根据文 [2] 的引理 1.8, 可得:

II) 从 $N(0, -\frac{1}{C}-M)$ 出发的方程组 (6) 的负向轨线 L^-, 在 $0 < u < u(b)$ 内, 不和等倾线 $v = \overline{F(u)}$ 相交.

III) 条件 4) 和定理 1 相同, 所以有证定理 1 过程的结论 3°. 但 $h(-y_0) = -\frac{1}{C} - M$.

因条件 5) 同定理 1 的条件 5), 所以有:

IV) 有证定理 1 过程的结论 4°, 5°.

综合 I), II), III), IV), 可得方程组 (6), 即方程组 (1) 的与定理 1 类似的环域. □

定理 3 若方程组 (1) 满足:

1), 2), 3) 同定理 2.

4) 存在正数 x_0 及 k, 当 $x < -x_0$ 时, $f(x)/g(x) \leq k\alpha$, 且 $M + \frac{1}{C} + F(-x_0) \leq \frac{1}{k}$.

5) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

则方程组 (1) 存在极限环.

证明 对方程组 (1), 作变换 (2), (3), 并用记法 (5), 可得方程组 (6). 从条件 (1), (2), 照证引理 1 的方法可得:

I) 同定理 1 证明的过程的结论 1°.

II) 从条件 3), 可得定理 2 证明过程的 (13) 式和结论 II).

从记法 (5) 及变换 (3), 有

$$\overline{f(u)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\overline{F(u)}\ \right) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{f(x)}{h'(y)}.$$

所以, 从条件 2), 4) 得: 当 $u(x) < u(-x_0)$ 时, 有

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

III) $\overline{\frac{f(u)}{g(u)}} = \frac{f(x)}{h'(y)g(x)} \leq \frac{k\alpha}{h'(y)} \leq k$ 且注意到记法 (5), 有

$$M + \frac{1}{c} + \overline{F(u(-x_0))} = M + \frac{1}{c} + F(-x_0) \leq \frac{1}{k}.$$

从定理条件 5), 变换 (3) 有

IV) $\overline{\lim}_{u(x)\to+\infty}\overline{F(u)} = \overline{\lim}_{x\to+\infty}F(x) = +\infty.$

从前面得到的 I), II), III), IV), 根据文 [2] 介绍的定理 [3], 方程组 (6) 即方程组 (1) 存在极限环.

定理 4 若方程组 (1), 满足条件:

1), 2) 同定理 1.

3) 设 $\sup_{a<x<0}F(x) = A < +\infty$. $|\inf_{0<x<b}F(x)| = B < +\infty, G(b) < +\infty$ 且有

$$G(a) > \frac{1}{2\alpha}\left(A + B + \sqrt{2\beta G(b)}\right)^2.$$

4) 当 $\sup_{0<x<b} < h(y_0)$ 时

$$\sup_{0<x<b}\left[\int_0^x \frac{g(x)\mathrm{d}x}{h(y_0) - F(x)} - \frac{h(y_0) - F(x)}{\alpha}\right] > 0$$

成立, 其中 $h(y_0) = 2A + B + \sqrt{2\beta G(b)}$. 则方程组 (1) 存在极限环.

证明 和证引理 1 时作的变换一样, 对方程组 (1) 作变换 (2), (3), 并用记法 (5), 可得方程组 (6). 从条件 1), 2), 用类似得到引理 1 过程中得到结论 1° 的方法, 有:

I) $u\overline{g(u)} > 0$, 当 $u(a) < u < u(b), u \neq 0$. 以及 $u \neq \overline{F(u)} < 0$, 当 $0 < |u| < u(\delta)$.

II) 从条件 3) 及记法 (5), 有

$$\sup_{u(a)<u<0}\overline{F(u)} = \sup_{a<x<0}F(x) = A < +\infty.$$

$$\Big|\inf_{0<u<u(b)}\overline{F(u)}\Big| = \Big|\inf_{0<x<b}F(x)\Big| = B < +\infty.$$

从条件 2) 变换 (3) 及记法 (5), 有:

$$\overline{G(u(b))} = \int_0^{u(b)}\overline{g(u)}\mathrm{d}u = \int_0^b g(x)h'(y)\mathrm{d}x \leq \beta G(b) < +\infty.$$

从条件 2), 3) 及记法 (5) 有:

$$\begin{aligned}\overline{G(u(a))} &= \int_0^{u(a)}\overline{g(u)}\mathrm{d}u = \int_0^a g(x)h'(y)\mathrm{d}x \geq \alpha G(a)\\ &> \frac{1}{2}\left(A + B + \sqrt{2\beta G(b)}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(A + B + \sqrt{2\beta\int_0^b g(x)\mathrm{d}x}\right)^2\\ &\geq \frac{1}{2}\left(A + B + \sqrt{2\int_0^b h'(y)g(x)\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(A + B + \sqrt{2\overline{G(u(b))}}\right)^2.\end{aligned}$$

III) 从定理条件 (4) 及记法 (5), 并记 $v_0 = h(y_0)$ 有:

$$\sup_{0<u<u(b)}\overline{F(u(x))} = \sup_{0<x<b}F(x) < h(y_0).$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0<u<u(b)}\left[\int_0^{u(x)}\frac{\overline{g(u)}\mathrm{d}u}{v_0-\overline{F(u)}}-(v_0-\overline{F(u)})\right]=\sup_{0<x<b}\left[\int_0^x\frac{g(x)h'(y)\mathrm{d}x}{h(y_0)-F(x)}-(h(y_0)-F(x))\right]\\
&\geq\sup_{0<x<b}\left[\alpha\int_0^x\frac{g(x)\mathrm{d}x}{h(y_0)-F(x)}-(h(y_0)-F(x))\right]\\
&=\alpha\sup_{0<x<b}\left[\int_0^x\frac{g(x)\mathrm{d}x}{h(y_0)-F(x)}-\frac{h(y_0)-F(x)}{\alpha}\right]>0.
\end{aligned}
$$

从前面的 I), II), III), 根据文 [1] 定理 5, 方程组 (6) 即方程组 (1) 存在极限环.

Liénard 方程是方程组 (1) 当 $h(y)=y$ 时的特殊情况. 本文结论不同于文 [4]. 下面的例子是本文各定理中，条件 2) 所要求的 $h(y)$.

例 1 $h(y)=y+\arctan y,-\infty<y<+\infty$, 其中 $\alpha=1,\beta=2$.

例 2 $h(y)=\begin{cases} y+\frac{y}{y+1}, & 当\ y\geq 0,\\ y-\frac{y}{y-1}, & 当\ y<0.\end{cases}$ 其中 $\alpha=1,\beta=2$.

参考文献:

[1] 丁大正. Liénard 方程极限环的存在性 [J]. 应用数学学报, 1984, **7**(2): 166–174.
DING Da-zheng. *The existence of limit cycles of Linénard equation* [J]. Acta Math. Appl. Sin., 1984, **7**(2): 166–174. (in Chinese)

[2] 张芷芬, 丁同仁, 等. 微分方程定性理论 [M]. 北京：科学出版社, 1985, 220–221.
ZHANG Zhi-fen, DING Tong-ren, et al. *Qualitative Theory of Differential Equation* [M]. Peking Press of Science, 1985, 220–221. (in Chinese)

[3] 余澍祥. 极限环的存在定理 [J]. 数学进展, 1965, **8**(2): 187–194.
YU Shu-xiang. *The theorem of existence of limit cycles* [J]. Adv. Math. (China), 1965, **8**(2): 187–194. (in Chinese)

[4] 刘炳文, 熊万民. 一类非线性微分系统的极限环存在性 [J]. 数学研究与评论, 2003, **23**(2): 327–332.
LIU Bing-wen, XIONG Wan-min. *On the existence of limit cycles for a class of nonlinear differential systems* [J]. J. Math. Res. Exposition, 2003, **23**(2): 327–332. (in Chinese)

Another Case of Existence of Limit Cycles for a Nonlinear Equation

LIANG Jin-peng

(School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract: This paper discusses the existence of the limit cycles for the nonlinear equation: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=h(y)-F(x),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x)$. It is the another case without the hypothesic $G(\pm\infty)$.

Key words: nonlinear equation; limit cycle; existence.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.