第25卷第3期　　数学研究与评论　　Vol.25, No.3
2005年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)03-0525-06　　文献标识码: A

利用半群代数中良序基构造解稀疏多项式方程组特征值方法

刘卫江 [1,3], 冯果忱 [2]

(1. 渤海大学信息科学与工程学院, 辽宁 锦州 121003; 2. 吉林大学数学科学学院, 吉林 长春 130023
3. 东南大学计算机科学与工程系, 江苏 南京 210096)
(E-mail: lweijiang@sohu.com)

摘　要: 本文利用半群代数 $k[A]$ 中良序基, 构造了求稀疏多项式方程组解的特征值矩阵, 并给出了可以构造方阵的条件.

关键词: 稀疏多项式; 良序基; 特征值.
MSC(2000): 13P10
中图分类: O187.2

利用矩阵特征值求解多项式方程组的思想始于奥地利数学家 H.J.Stetter[1], 随着进一步的研究建立了相应的理论基础 [2~4], 成为一种很有效的解多项式方程组的方法. 熟知多项式方程组的项数是为其变量个数 (维数) 及次数所确定的组合数, 随着次数及维数的增加, 按指数形式增长, 特征值方法矩阵阶也随着维数与次数而增长, 按指数增长. 实际问题中的多项式有大量缺项, 即所谓有稀疏性, 考虑了这种稀疏性, 降低了特征值方法中矩阵的阶, 在 [5] 我们已经证明了求代数集 $V(G)$ 与一个稀疏联合特征值问题的求解是等价的, 但这一般是由一组广义特征值问题构成, 尽管有人在研究广义特征值问题 [6], 但它的求解远不如方阵特征值求解成熟, 人们不仅要问, 什么时候稀疏特征值问题可化为求方阵特征值呢? 即广义特征值问题变成普通特征值问题. 若半群代数中良序基求得, 如何利用良序基生成特征值问题? 这是本文要讨论的问题.

1 引　言

设 k 为代数闭域, 通常我们取复数域 C,N_0 为非负整数集合, $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$ 是 Z^n 的有限子集, 每个 a_i 都对应了罗朗 (raulent) 多项式环 $k[x_1,x_1^{-1},\cdots,x_n,x_n^{-1}]$ 中的一个罗朗单项式. 我们考虑如下的半群同态:

$$\Pi: N_0^m\to Z^n,$$

$$u=(u_1,\cdots,u_m)\mapsto u_1a_1+\cdots+u_ma_m.$$

Π 在 Z^n 中的象是如下的半群:

$$N_0A=\{\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_ma_m:\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in N_0\},$$

因而可得到如下的半群代数同态:

$$\hat{\Pi}:k[z_1,\cdots,z_m]\to k[x_1,x_1^{-1}\cdots,x_n,x_n^{-1}],$$

收稿日期: 2003-05-30
基金项目: 国家自然科学基金 (10071031), 辽宁省教育厅高等学校科学研究项目 (2021401161).

$$z_i \mapsto x^{a_i}.$$

定义 1.1[7] 半群代数同态 $\hat{\Pi}$ 的核是 $k[Z]$ 中的理想，称其为 A 的环面理想，记为 I_A. 它对应的代数簇称为 A 的环面簇，记为 $V(I_A)$.

显然 I_A 是素理想. 也就是说 $V(I_A)$ 是不可约代数簇.

A 是 N_0^n 中一个子集 $A=\{j_1,j_2,\cdots,j_m\}$, 记 $k[x]=k[x_1,\cdots,x_n], k[z]=k[z_1,\cdots,z_m]$.

环面同态 $\hat{\Pi}$:

$$k[z] \to k[x]$$
$$z_i \mapsto x^{j_i} \quad i=1,2,\cdots,m.$$

同态 $\hat{\Pi}$ 的核 $\ker(\hat{\Pi})=I_A$, 同态 $\hat{\Pi}$ 的象 $\mathrm{Im}(\hat{\Pi})=k[A]=k[z]/I_A$, $k[A]$ 为 $k[x]$ 的子环，子代数，也记作 $k[x^{j_1},\cdots,x^{j_m}]$, 它中的元素是 $x^{j_1},\cdots,x^{j_m}$ 的幂积的 k- 线性组合，即视 $x^{j_1},\cdots,x^{j_m}$ 为独立变元的多项式. 我们把 $k[A]$ 中以 $x^{j_1},\cdots,x^{j_m}$ 作为独立变元的幂积称作 $k[A]$ 的单项式. 把 $k[A]$ 中的单项式化成 $x_1,\cdots,x_n$ 的幂积, 看作 $k[x]$ 中的单项式时, 若为同一个, 那么在 $k[A]$ 中我们视之为相同的单项式，所以通常我们把 $k[A]$ 中的单项式写成 $k[x]$ 中的单项式形式，只需知道它能表示成 $x^{j_1},\cdots,x^{j_m}$ 的幂积形式, 把它看作 $k[A]$ 中的单项式即可, 按此, 我们有 $k[A]\subset k[x]$.

设 $f_1,\cdots,f_\sigma\in k[A]$ 是一组给定的多项式. F_A 是由 $f_1,\cdots,f_\sigma$ 在 $k[A]$ 中生成的多项式理想，记为 $F_A=\langle f_1,\cdots,f_\sigma\rangle$. 同多项式环类似我们可以定义 $k[A]$ 中单项式序、单项式理想和首项理想.

命题 1.2[8] 设 $F_A=\langle f_1,\cdots,f_s\rangle\subset k[A]$ 是非零理想，对任何整数 $t>0$, 都可构造 $k[A]$ 中多项式集合 $PS=\{f_1,\cdots,f_{s_t}\}\subset F_A$ 为理想 F_A 的良序基.

良序基的性质与构造算法可见 [8].

2 稀疏多项式方程组的环面变换

给定多项式方程组

$$\begin{cases} f_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ \quad\cdots\quad\cdots \\ f_\sigma=f_\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \end{cases} \tag{2.1}$$

记 $d_\mu=\deg(f_\mu)$. 不妨设 $d_1\ge d_2\ge\cdots\ge d_\sigma$.

多项式 f_i 可以写成单项式 x^j 的 $k-$ 线性组合，这里 k 为特征为零的数域. 即

$$f_\mu(x)=\sum_j a_j^{(\mu)}x^j=0, a_j^{(\mu)}\in k, \mu=1,2,\cdots,\sigma. \tag{2.2}$$

记 $S=\{j\in N_0^n|a_j^{(\mu)}\ne 0\}$,$N_0$ 为非负整数集. 我们把 S 称为方程组的支集，找到 S 的最小生成集 $A=\{j_1,j_2,\cdots,j_m\}\subset S$, 使得对任意 $j\in S$ 有

$$j=\sum_{k=1}^m b_kj_k, b_k\in N_0,$$

即 S 可由 A 中元素 N_0- 生成，记 $N_0A=\{\sum_{k=1}^m c_kj_k|c_k\in N_0\}$. 注意 A 中元素与单项式集合 $X^A=\{x^{j_1},x^{j_2},\cdots,x^{j_m}\}$ 中的元素是一一对应的. 令

$$x^{j_v}=z_v, v=1,\cdots,m, \tag{2.3}$$

把 (2.3) 代入 (2.1) 得到关于 z 的方程组:

$$g_\mu(z) = \sum_j b_j^{(\mu)} z^j = 0, b_j^{(\mu)} \in k, \quad \mu = 1, 2, \cdots, \sigma. \tag{2.4}$$

半群同态映射 Π:

$$N_0^m \to N_0^n, (u_1, \cdots, u_m) \mapsto u_1 j_1 + \cdots + u_m j_m,$$

提升同态 $\hat{\Pi}$:

$$\begin{gathered} k[z_1, \cdots, z_m] \to k[x_1, \cdots, x_n], \\ z_i \mapsto x^{j_i} \quad i = 1, 2, \cdots, m. \end{gathered}$$

同态 $\hat{\Pi}$: 的核 $\ker(\hat{\Pi}) = I_A$ 为环面理想 [7]. 记 $G = \langle g_1, \cdots, g_\sigma, I_A \rangle$ 是由 $g_1, \cdots, g_\sigma, I_A$ 在 $k[z]$ 生成的理想, $F_A = \langle f_1, \cdots, f_\sigma \rangle$ 是由 $f_1, \cdots, f_\sigma$ 在 $k[A]$ 中生成的理想. $V(G)$ 表示由 G 定义的以 z 为变量的代数集, 记 $V(G)$ 在 z_v- 轴上的投影为 $P_{z_v} V(G)$.

$V(G)$ 即下方程组的解:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = g_1(z_1, z_2, \cdots, z_n) = 0, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \\ g_\sigma = g_\sigma(z_1, z_2, \cdots, z_n) = 0, \\ z^{u^+} - z^{u^-} = 0, z^{u^+} - z^{u^-} \in I_A. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

由 [9] 求解方程组 (2.1) 的解可分为两步. 先求出方程组 (2.5) 的解, 再求解方程组 (2.3). 求 (2.3) 是比较容易的, 但为求解 (2.5), 我们要求出环面理想 I_A 的最小生成元, 或它的 Gröbner 基, 注意 I_A 可由二项式生成, 其最小生成元和 Gröbner 基的计算是较为简单的, 在 Sturmfels 的著作 [7] 已彻底解决, 但计算量仍然很大, 且只能用符号计算实现. 我们想不用求 I_A 的具体表达式, 而直接从方程组 (2.1) 入手求出方程组 (2.5) 的 z 值.

3 利用良序基生成特征值问题

对一个多项式集合 $\{f_1, f_2, \cdots, f_\sigma\}$, $F = \langle f_1, f_2, \cdots, f_\sigma \rangle$. 当 t 充分大的时候在 [5] 中我们建立了如下的联合特征值问题

$$\left(\begin{bmatrix} A_{11}^{(v)} & A_{10}^{(v)} \\ A_{01}^{(v)} & A_{00}^{(v)} \end{bmatrix} - \lambda_v \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_v \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} Z_1^{(v)} \\ Z_0^{(v)} \end{pmatrix} = 0, v = 1, 2, \cdots, m. \tag{3.1}$$

由 m 个广义稀疏特征值问题组成. 在实际计算时, t 过大将计算成本过高; 而 t 过小特征值问题未必等价方组的解. 这当然涉及到计算的难度, 因此我们将使用逐次升高 t 的试探法. 在 [8] 中我们已经给出构造良序基的算法, 先按某一规则确定一 t 值, 当这个良序基得到之后, 再检验由此良序基形成的稀疏联合特征值问题中, 是否对某个 $v, 1 \le v \le m$, 第 v 个广义特征值问题可以化为普通的. 如若不然, 按确定规则增大 t, 在原有良序基基础上再构造一新的良序基, 再检验之. 如此下去, 我们或者在某一步得一普通特征值问题; 或可证明这个良序基序列是有限的, 最后一个良序基包含了理想 F_A 的 Groebner 基 - 即良性基.

假定对某个指定的 t, 相应的良序基 PS 已经算得, 令 $T^c=\{i\in N_0A||i|\le t\}\setminus T(PS)$, 则对任意 $i\in T(PS)$ 有唯一的 $h_i\in PS$, 使得

$$h_i=x^i-\sum_{j\in T^c}a_j^{(i)}x^j$$

或

$$x^i=\sum_{j\in T^c}a_j^{(i)}x^j \mod F,$$

对每个 $i\in T^c$, 若定义

$$a_j^{(i)}=\begin{cases}1, & j=i,\\ 0, & j\neq i,\end{cases}$$

则 x^i 也可表为

$$x^i=\sum_{j\in T^c}a_j^{(i)}x^j,$$

总之, 对任意 $i\in N_0A, |i|\le t$, 总有

$$x^i=\sum_{j\in T^c}a_j^{(i)}x^j \mod F.$$

于是对每个 $i\in N_0A, |i|\le t$, 定义

$$D(i)=\{j\in T^c|a_j^{(i)}\neq 0\},$$

称 $D(i)$ 为 i 的依赖集. 若 S 为 $\{i\in N_0A||i|\le t\}$ 的一子集, 则定义

$$D(S)=\cup_{i\in S}D(i),$$

称 $D(S)$ 为 S 的依赖集. 对每个 $v, 1\le v\le m$, 令

$$S_v=\{0, j_v, 2j_v, \ldots, [t/|j_v|]j_v\},$$

利用 S_v, 可以判断关于 j_v 是否可生成一普通稀疏特征值问题.

定理 3.1 (Criterion for Eig) 若存在 $v, 1\le v\le m$, 使

$$D(j_v+D(S_v))\subset D(S_v), \tag{3.2}$$

则由 PS 生成的第 v 个广义稀疏特征值问题可以简化为普通特征值问题.

证明 将 $D(S_v)$ 中的指标排列为

$$i^{(\tau)}>i^{(\tau-1)}>\ldots>i^{(1)}>i^{(0)}=0$$

对应有一以单项式为分量的向量

$$W=(x^{i^{(\tau)}}, x^{i^{(\tau-1)}}, \ldots x^{i^{(1)}}, 1)^T,$$

(3.2) 无非说明对任何

$$x^{i^{(\mu)}}, 0 \le \mu \le \tau, x^{j_v} x^{i^{(\mu)}}$$

仍可由 $\{x^{i^{(\tau)}}, x^{i^{(\tau-1)}}, \dots x^{i^{(1)}}, 1\}$ 模 F_A k- 线性表示，从而存在方阵 $A^{(v)} \in k^{(\tau+1)\times(\tau+1)}$ 使得

$$x^{j_v} W = A^{(v)} W \mod F_A,$$

即广义稀疏特征值问题可化为普通的.

下面给出本文的主要算法

```
Alg EorG
input : a polynomial set PS
output : an ordinary eigenproblem or a Well Arranged
        Basis containing a reduced Groebner Basis for ideal F
        d := 0
        t := t(PS)
Repeat
        PS := WAB(PS, d, t)
        If Criterion(5.3.2) holds true for some v, form
          the ordinary eigenproblem for x^{j_v}
        else
             d := t
             t := t(PS)
Until t ≤ d
```

定理 3.2 算法 Alg EorG 或者在某步给出一普通特征值问题，或在有限步内给出含约化 Groebner 基的良序基.

证明 若第一种情况不出现，则算法必给出一个良序基序列，比如说

$$PS_0, PS_1, \cdots, PS_\mu, \cdots$$

满足关系

$$KT(PS_0) > KT(PS_1) > \cdots > KT(PS_\mu) > \cdots, \tag{3.3}$$

这里 $KT(PS)$ 的意义见 [8], 由 [8] 中定理 2, 序列 (3.3) 必为有限的，故有 $\bar{\mu}$ 使 $KT(PS_{\bar{\mu}-1}) = KT(PS_{\bar{\mu}})$, 这意味着 $t(PS_{\bar{\mu}-1}) \ge t(PS_{\bar{\mu}})$, 故算法是有限终止的. 由 [8] 中定理 3 说明 $K(PS_{\bar{\mu}})$ 为 F_A 的一约化 Groebner 基.

在 G 为零维理想情形，对任何 $v, 1 \le v \le n$, 算法 Alg EorG 至少给出 F_A 的一含约化 Groebner 基的良序基，由 [10] 知，有 $n_v, 1 \le v \le m$ 使 $x^{n_v j_v}$ 为 Groebner- 基中某多项式领式的倍式，易得到下定理:

定理 3.3 若 G 为零维理想，则对任何 $v, 1 \le v \le n$, 算法 Alg EorG 必可生成一关于 x^{j_v} 的普通特征值问题.

对于 $V(G)$ 中有流形解的情形，最终良序基生成广义特征值问题，然后求其正则特征值.

参考文献:

[1] AUZINGER W, STETTER H J. *An elinmination algorithm for the computations of all zeros of a system of multivariate polynomial equations* [J]. Internat. Schriftenreihe Numer. Math., 1988, 86: 11–30.

[2] FENG Guo-chen, ZHANG Shu-gong. *Reducing the multivariate polynomial system to eigenvalue problem* [J]. Northeast. Math. J., 1992, **8**(3): 253–256.
[3] FENG Guo-chen, WU Wen-da, HUANG Kai. *The computation of eigenvalue problem equivalent to multivariate polynomial system and the Groebner bases* [J]. Adv. in Math. (China), 1993, **22**(3): 282–284.
[4] FENG Guo-chen, WU Wen-da, HUANG Kai. *Second equivalence theorem of multi-variate polynomial system and eigen problem* [J]. Adv. in Math. (China), 1993, **22**(5): 476–477.
[5] 刘卫江. 解稀疏多项式方程组特征值方法的建立与等价性定理 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2002, **40**(2): 141–143.
LIU Wei-jiang. *The constuction of Eigenvalue method of sparse polynomial and equivalence theorem* [J]. J. Jilin University (Science Edition), 2002, **40**(2): 141–143. (in Chinese)
[6] KAGSTRÖM B. *RGSVD-an algorithm for computing the Kronecker structure and reducing subspaces of singular matrix pencils A-λB* [J]. SIAM J. Sci. Statis. Comput., 1986, **7** (1): 185–211.
[7] STURMFELS B. *Gröbner Bases and Convex Polytopes* [M]. Providence RI: AMS 1996, 31–38.
[8] 刘卫江, 冯果忱. 半群代数中理想 F_A 良序基的构造 [J]. 数学研究, 2001, **34**(3): 256–263.
LIU Wei-jiang, FENG Guo-chen. *The construction of well arranged basis for ideal F_A in semigroup Algebra* [J]. J. Math. Study, 2001, **34**(3): 256–263. (in Chinese)
[9] LUO Hong-yong, FENG Guo-chen. *Fibre of Toric Map and Solving Affine Polynomial System* [J]. Adv. in Math. (China), 1999, **28**(2), 189–191.
[10] 刘卫江. 多项式代数与半群代数中 Groebner 基的关系 [J]. 数学杂志, 2002, **22**(4): 464–468.
LIU Wei-jiang. *The relation between groebner bases on polynomial algebra and semigroup algebra* [J]. J. Math. (Wuhan), 2002, **22**(4): 464–468. (in Chinese)

Constructing Eigenvalue Method for Solving Sparse Polynomial Equations by Well Arranged Basis in Semigroup Algebra

LIU Wei-jiang[1,3], *FENG Guo-chen*[2]
(1. College of Information science and engineering, Bohai University, Jinzhou, 121003, China;
2. College of Mathematics Science, Jilin University, Changchun, 130023, China;
3. Department of Computer Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: Eigenvalue matrix for resolving sparse polynomial equations is constructed by deploying well arranged basis in semigroup algebra $k[A]$. The condition for the constructed matrix to be square is discussed.

Key words: sparse polynomial; well arranged basis; eigenvalue.