第25卷第3期 数学研究与评论 Vol.25, No.3
2005年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)03-0543-05 **文献标识码**: A

域扩张时的李代数扩张

王登银
(中国矿业大学数学系，江苏 徐州 221008)
(E-mail: wdengyin@126.com)

摘 要: 设 E 是特征零的代数封闭域，L_E 是 E 上 L 型有限维单李代数，F 是 E 的包含素子域 Q 的子域，且 $[E:F]<\infty$. 本文引入李代数的准子代数的概念，且 F 上同类型李代数 L_F 就是 L_E 的准子代数. 本文定出了 L_E 的包含 L_F 的所有准子代数.

关键词: 李代数；准子代数；根系.
MSC(2000): 17B
中图分类: O152.2

1 引 言

李代数尤其是复半单李代数，日益成为数学以及理论物理等学科的重要基础 [6]. 而决定李代数中具有某种性质的所有子代数对于研究李代数的子结构有重要意义. 例如对于有限维单李代数 L_E, 决定其包含标准 Borel 子代数的所有抛物子代数即是有限维复半单李代数理论的经典结果 [1]. 文献 [2], [3], [4] 分别就典型群，李型单群讨论了域扩张时的扩群性质. 本文则讨论有限维单李代数的相应问题.

以 L_E 表示特征零代数封闭域 E 上有限维单李代数，Q 表示 E 的素子域，Q^* 表示 Q 中非零元集合. Φ 为其根系，$\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 为一组固定基础根，Φ^+,Φ^- 分别是正根集，负根集. 设 H_E 是 L_E 的 Cartan 子代数. L_E 有根空间分解

$$L_E=H_E\oplus(\oplus_{\alpha\in\Phi}L_E^\alpha),$$

其中 $L_E^\alpha=\{x\in L_E|[h,x]=\alpha(h)x,h\in H_E\}$. 对于 $\alpha\in\Phi^+$, 任取 $0\neq e_\alpha\in L_E^\alpha$, 则存在 $e_{-\alpha}\in L_E^{-\alpha}$ 使 $[e_\alpha,e_{-\alpha}]=\alpha^v=2t_\alpha(\alpha,\alpha)^{-1}$, 其中 t_α 满足 $(h,t_\alpha)=\alpha(h)$，$\alpha^v=2t_\alpha(\alpha,\alpha)^{-1}$ 表示 α 的对偶. 由 [5] 知，可取 L_E 的一组 Chevalley 基 $\{e_\alpha,e_{-\alpha},\alpha_i^v|\alpha\in\Phi^+,i=1,2,\cdots l\}$ 使其结构常数均为整数. L_E 有三角分解

$$L_E=N_E^+\oplus H_E\oplus N_E^-,$$

这里 $N_E^+=\sum_{\alpha\in\Phi^+}Ee_\alpha,N_E^-=\sum_{\alpha\in\Phi^+}Ee_{-\alpha},H_E=\sum_{i=1}^lE\alpha_i^v$. 关于 L_E 的生成元，下列关系成立.

$$[\alpha_i^v,\alpha_j^v]=0,\quad 1\le i,j\le l,$$

$$[e_\alpha,e_{-\alpha}]=\alpha^v,\quad \alpha\in\Phi^+,$$

收稿日期: 2002-10-28
基金项目: 国家自然科学基金 (10071078).

$$[\alpha_i^v, e_\alpha] = \alpha(\alpha_i^v)e_\alpha, \quad \alpha(\alpha_i^v) \in Q,$$
$$[\alpha_i^v, e_{-\alpha}] = -\alpha(\alpha_i^v)e_{-\alpha}, \quad \alpha(\alpha_i^v) \in Q.$$

另外如果 $\alpha,\zeta \in \Phi$, 且 $\alpha+\zeta \notin \Phi$, 则 $[e_\alpha, e_\zeta]=0$; 如果 $\alpha+\zeta \in \Phi$, 由于 $[L_E^\alpha, L_E^\zeta] = L_E^{\alpha+\zeta}$, 可见 $[e_\alpha, e_\zeta] = d_{\alpha,\zeta}e_{\alpha+\zeta}$, 这里 $0 \neq d_{\alpha,\zeta} \in Q$ 由 α,ζ 决定. 注意，我们取的是 L_E 的一组 Chevalley 基，结构常数 $d_{\alpha,\zeta}$ 全是整数，因而含于 Q.

设 F 是 E 的包含素子域 Q 的子域. 令

$$L_F = (\sum_{\alpha\in\Phi^+} Fe_\alpha) + (\sum_{i=1}^{l} F\alpha_i^v) + (\sum_{\alpha\in\Phi^+} Fe_{-\alpha}),$$

则显然 L_F 关于 L_E 的加法及方括号运算封闭，并关于 F- 数乘封闭，成为 F 上同类型的有限维李代数. 但应注意， L_F 并非 L_E 的子代数，因为 L_F 关于 E- 数乘不封闭.

定义 1 设 L 是李代数， S 是 L 的非空子集. 如果 S 关于 L 的加法和方括号积封闭，则称 S 为 L 的准子代数.

例如 L 的所有子代数当然是它的准子代数. 另外上面定义的 L_F 即是 L_E 的准子代数. 以下是本文的主要结果，它定出了 L_E 的包含 L_F 的所有准子代数.

定理 1 设 L_E 是特征零代数封闭域 E 上有限维单李代数， F 是 E 的包含素子域 Q 的子域且 $[E:F]<\infty$.

(1) 如果 X 是 L_E 的包含准子代数 L_F 的准子代数，则存在 E 的子域 $M, F\subseteq M\subseteq E$, 使得 X 恰为 M 上同类型李代数 L_M, 即

$$X = L_M = (\sum_{\alpha\in\Phi^+} Me_\alpha) + (\sum_{i=1}^{l} M\alpha_i^v) + (\sum_{\alpha\in\Phi^+} Me_{-\alpha}).$$

(2) 以 Γ 表示 E 的所有包含 F 的子域全体，以 Ω 表示 L_E 的所有包含 L_F 的准子代数全体. 则存在从 Γ 到 Ω 的一一映射 f 使得 $f(M) = L_M, F\subseteq M\subseteq E$.

2 引理与定理的证明

现在对根系 Φ 引入一些符号 [4]. Φ^+ 中有唯一的高度最高的根，固定地记为 β. 令

$$A_1 = \{\alpha\in\Delta | (\beta,\alpha)\neq 0\}.$$

当 $m\geq 2$ 时，递归定义

$$A_m = \{\alpha\in\Delta | \alpha\notin \cup_{i=1}^{m-1}A_i,\ \text{存在}\ \ \alpha'\in A_{m-1}\ \ \text{使得}\ \ (\alpha',\alpha)\neq 0\}.$$

设 $A_1, A_2, \cdots, A_p$ 非空，但 $A_{p+1}, A_{p+2}, \cdots$ 全是空集. 则 $\Delta = A_1\cup A_2\cdots\cup A_p$, 且 $A_i\cap A_j = \emptyset, (i\neq j)$. 令

$$\Psi_1 = \{r\in\Phi^+ | (\beta, r)\neq 0\}.$$

当 $m\geq 2$ 时，递归定义

$$\Psi_m = \{r\in\Phi^+ | r\notin \cup_{i=1}^{m-1}\Psi_i,\ \text{存在}\ \ \alpha'\in A_{m-1}\ \ \text{使得}\ \ (\alpha', r)\neq 0\}.$$

显然 $\Phi^+=\Psi_1\cup\Psi_2\cdots\Psi_p$, $\Psi_i\cap\Psi_j=\emptyset(i\neq j)$. 对 $i=1,2,\cdots,p$, 记

$$\Phi_i^+=\cup_{j\geq i}\Psi_j,\qquad L_i^+=\sum_{\alpha\in\Phi_i^+}L_E^\alpha,$$

则 L_i^+ 全是 L_E 的子代数.

引理 1 设 $x=n_++h+n_-\in L_E\backslash L_F$, $n_+\in N_E^+,h\in H_E,n_-\in N_E^-$. 令 X 为 x 与 L_F 共同生成的 L_E 的准子代数, 则存在 $a\notin F,\alpha\in\Phi$ 使得 $ae_\alpha\in X\backslash L_F$.

证明 先证明当 $n_+\notin L_F$ 或 $n_-\notin L_F$ 时结论成立. 不妨设 $n_+\notin L_F$ ($n_-\notin L_F$ 时同法). 记

$$n_+=n_1+n_2+\cdots+n_p,\ \ n^-=n^1+n^2+\cdots+n^p,$$

其中 $n_i=\sum_{\alpha\in\Psi_i}a_\alpha e_\alpha,n^i=\sum_{\alpha\in\Psi_i}c_\alpha e_{-\alpha},a_\alpha\in E,c_\alpha\in E,i=1,2,\cdots p$. 我们先证当 n_1 或 n^1 不属于 L_F 时结论成立. 若 $n_1\notin L_F$, 令 $x_1=[x,e_{-\beta}]$. 由于 $[n_-,e_{-\beta}]=[n_i,e_{-\beta}]=0,(i=2,3,\cdots,p)$, 且 $[h,e_{-\beta}]=-\beta(h)e_{-\beta}$, 可见

$$x_1=[n_1,e_{-\beta}]-\beta(h)e_{-\beta}\in X.$$

如果 $\beta(h)\notin F$, 令 $x_2=[e_\beta,[e_\beta,x_1]]$. 由于 $[e_\beta,[e_\beta,[n_1,e_{-\beta}]]]=0$, 可见

$$x_2=2\beta(h)e_\beta\in X,2\beta(h)\notin F.$$

下设 $\beta(h)\in F$. 写 $n_1=\sum_{\alpha\in\Psi_1}a_\alpha e_\alpha$, 存在 $\alpha\in\Psi_1,a_\alpha\notin F$. 此时

$$x_1=[n_1,e_{-\beta}]-\beta(h)e_{-\beta}=a_\beta\beta^v+\sum_{\alpha\in\Psi_1\backslash\{\beta\}}a_\alpha d_{\alpha,-\beta}e_{\alpha-\beta}-\beta(h)e_{-\beta}.$$

这里 $[e_\alpha,e_{-\beta}]=d_{\alpha,-\beta}e_{\alpha-\beta}$, $d_{\alpha,-\beta}\in Q^*$. 如果 $a_\beta\notin F$, 令 $x_2=[e_{-\beta},x_1]$. 由于 $\alpha-2\beta\notin\Phi$, 可见 $x_2=2a_\beta e_{-\beta}\in X,2a_\beta\notin F$. 下面设 $a_\beta\in F$. 则

$$x_1'=x_1-a_\beta\beta^v+\beta(h)e_{-\beta}=\sum_{\alpha\in\Psi_1\backslash\{\beta\}}a_\alpha d_{\alpha,-\beta}e_{\alpha-\beta}\in X.$$

设某 $\beta\neq r$ 使得 $a_r\notin F$, 令 $x_2'=[x_1',e_{-r}]$. 因只有 $r-\beta$ 满足 $(r-\beta)+(-r)\in\Phi$, 因而

$$x_2'=a_rd_{r,-\beta}d_{r-\beta,-r}e_{-\beta}\in X,$$

其中 $d_{r,-\beta}d_{\alpha-\beta,-r}\in Q\subset F$, $a_r\notin F$.

如上, 写 $n_-=n^1+n^2\cdots n^p,n^i=\sum_{\alpha\in\Psi_i}c_\alpha e_{-\alpha},i=1,2,\cdots,p$. 如果 $n^1\notin L_F$, 同法可证. 以下假设 $n_1,n^1\in L_F$. 如果 n_m 或 $n^m\notin L_F$, 但对所有 $1\leq i\leq m-1$ 均有 $n_i,n^i\in L_F,(2\leq m\leq p)$. 替换 x 后不妨仍记

$$x=n_m+\cdots+n_p+h+n^p+\cdots+n^m\in X\backslash L_F.$$

我们对 m 用数学归纳法证明所需结论. $m=1$ 的情形上文已证. 现假设对 $m-1$ 的情形结论成立. 对于 m 的情形. 即

$$x=n_m+\cdots+n_p+h+n^p+\cdots+n^m\in X\backslash L_F,$$

其中 n_m 或 n^m 不属于 L_F. 不妨设 $n_m \notin L_F$ ($n^m \notin L_F$ 时可同法证明). 写 $n_m = \sum_{\alpha\in\Psi_m} a_\alpha e_\alpha$, 存在某 $\alpha \in \Psi_m$ 使得 $a_\alpha \notin F$. 设 α_0 是使 $\alpha_0 \in \Psi_m, a_{\alpha_0} \notin F$ 的根高最低的根. 取 $\alpha' \in A_{m-1}$ 使 $(\alpha', \alpha_0) \neq 0$, 此时 $\alpha' + \alpha_0 \in \Psi_{m-1}$. 注意如果 $i \geq m+1$, 对任意 $\alpha \in \Psi_i, \alpha' + \alpha \notin \Phi$. 且对所有 $j \geq m$ 及所有 $\alpha \in \Psi_j, \alpha - \alpha' \notin \Phi$. 令 $y = [x, e_{\alpha'}]$, 则

$$y = [n_m + h, e_{\alpha'}] = [n_m, e_{\alpha'}] + \alpha'(h)e_{\alpha'}.$$

显然 $y \in L^+_{m-1}$, 且 $y \notin L_F$. 化归成 $m-1$ 时的情形, 因而对 m 的情形结论也成立.

以下假设 $n_+, n_- \in L_F$. 则 $h \in X \backslash L_F$. 写 $h = \sum_{i=1}^l b_i \alpha_i^v$. 如果对任意 $\alpha_j \in \Delta$ 均有 $\alpha_j(h) \in F$, 考虑方程组

$$\alpha_j(h) = \sum_{i=1}^{l} b_i \alpha_j(\alpha_i^v), \quad j = 1, 2, \cdots, l.$$

由于 $\alpha_j(\alpha_i^v) \in F$, 可见以上是 F 上关于 b_i 的线性方程组, 且系数矩阵在 F 上非退化. 所以所有 $b_i \in F$, 这与 $h \notin L_F$ 矛盾. 可见存在 $\alpha_j \in \Delta$ 使得 $\alpha_j(h) \notin F$. 因而 $[h, e_{\alpha_j}] = \alpha_j(h)e_{\alpha_j} \in X$, 但 $\alpha_j(h) \notin F$. □

引理 2 设 $[E:F] < \infty$, X 是 L_E 的包含 L_F 的准子代数, 且 $X \neq L_F$. 如果存在 $a_0 \notin F, \sigma \in \Phi$ 使得 $a_0 e_\sigma \in X$, 则存在 E 的包含 F 的子域 M, $M \neq F$ 使得

$$L_M = (\sum_{\alpha\in\Phi^+} M e_\alpha) + (\sum_{i=1}^{l} M\alpha_i^v) + (\sum_{\alpha\in\Phi^+} M e_{-\alpha}) \subseteq X.$$

证明 令 $M = \{a \in E | ae_\sigma \in X\}$. 则 $F \subset M \subseteq E$. 如果 $a, b \in M$, 由 $ae_\sigma, be_\sigma \in X$ 知道 $(a \pm b)e_\sigma \in X$, 因而 $a \pm b \in M$, 说明 M 是 E 的加法子群. 现在说明对任意 $a \in M, \alpha \in \Phi$ 均有 $ae_\alpha \in X$. 不妨设 $\sigma \in \Phi^+$, 先证明对任意 $a \in M, ae_\beta \in X, ae_{-\beta} \in X$. 设 $\beta = \sigma + \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_m}$, 其中每一部分和 $\sigma, \sigma_1 = \sigma + \alpha_{i_1}, \cdots, \sigma_m = \sigma + \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_m}$ 全属于 Φ^+. 由

$$[ae_\sigma, e_{\alpha_{i_1}}] = ad_{\sigma,\alpha_{i_1}} e_{\sigma_1} \in X,$$

$$[[ae_\sigma, e_{\alpha_{i_1}}], e_{\alpha_{i_2}}] = ad_{\sigma,\alpha_{i_1}} d_{\sigma_1,\alpha_{i_2}} e_{\sigma_2} \in X,$$

$$\cdots\cdots$$

可见存在 $d \in Q^*$ 使得 $ade_\beta \in X$, 进而 $[2^{-1}d^{-1}\beta^v, ade_\beta] = ae_\beta \in X$. 进一步有

$$[ae_\beta, e_{-\beta}] = a\beta^v \in X, \quad [a\beta^v, -2^{-1}e_{-\beta}] = ae_{-\beta} \in X.$$

再证对任意 $a \in M, \alpha \in \Phi, ae_\alpha \in X$, 即 $Me_\alpha \subseteq X$. 不妨设 $\alpha \in \Phi^+$. 写 $\alpha = \beta - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} \cdots - \alpha_{i_m}$ 使得 $\beta, \beta_1 = \beta - \alpha_{i_1}, \cdots, \beta_m = \beta - \alpha_{i_1} - \cdots - \alpha_{i_m}$ 全属于 Φ^+. 用同上面相反的过程可以证明 $ae_\alpha, ae_{-\alpha} \in X$. 因而对任意 $\alpha \in \Phi$, $Me_\alpha \in X$. 如果 $a, b \in M$, 由于 $ae_\sigma, be_{-\sigma} \in X$, $ab\sigma^v = [ae_\sigma, be_{-\sigma}] \in X$. 进而 $abe_\sigma = [ab\sigma^v, 2^{-1}e_\sigma] \in X$. 所以 $ab \in M$. 这说明 M 是 E 的子环. 但是 E 是 F 的有限次扩域, 如果 $a \in M^*$, 则 $a^{-1} \in F[a] \subseteq M$. 表明 M 是 E 的子域. 对于 $a \in M, \alpha_i^v \in H_E, i = 1, 2, \cdots, l$, 由 $Me_{\alpha_i}, Me_{-\alpha_i} \subseteq X$ 知道 $a\alpha_i^v = [ae_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}] \in X$. 这意味 $M\alpha_i^v \subseteq X$. 最后

$$L_M = (\sum_{\alpha\in\Phi^+} M e_\alpha) + (\sum_{i=1}^{l} M\alpha_i^v) + \sum_{\alpha\in\Phi^+} M e_{-\alpha}) \subseteq X.$$

定理 1 的证明 设 $L_F \subset X \subseteq L_E$ 是 L_E 的准子代数，并设 M 是使 L_M 含于 X 的 E 的极大子域. 下证 $X = L_M$. 如果 $X \neq L_M$, 取 $x \in X \backslash L_M$, 并令 Y 是由 x 与 L_M 共同生成的 L_E 的准子代数，则由以上两个引理可知存在 E 的子域 K, $M \subset K \subseteq E$, 使得 $L_K \subseteq Y$. 而这与 M 的极大性取法矛盾. (1) 证毕. 在 (1) 的基础上 (2) 是显然的.

参考文献:

[1] 孟道骥. 复半单李代数引论 [M]. 北京：北京大学出版社，1998.
MENG Dao-ji. *Introduction to Semi-simple Lie Algebra over Complex Field* [M]. Beijing: Publishing Company of Peking University, 1998. (in Chinese)

[2] BURGOYNE N, GRIESS R, LYONS R. *Maximal subgroups and automorphisms of Chevalley groups* [J]. Pacific J. Math., 1977, **71**: 365–403.

[3] 李尚志. $SL(n,K)$ 在 $GL(n,F)(K \subset F)$ 中的扩群 [J]. 数学学报，1990, **33**: 774–778.
LI Shang-zhi. *Overgroups of $SL(n,K)$ in $GL(n,F)(K \subset F)$* [J]. Acta Math. Sinica, 1990, **33**: 774–778. (in Chinese)

[4] WANG Deng-yin, LI Shang-zhi. *Overgroups of $L(K)$ in $L(F)$* [J]. Algebra Colloq., 1998, **5**: 417–424.

[5] CATER R W. *Simple Groups of Lie Type* [M]. New York: Willey-interscience, 1972.

[6] ZHANG Qing-cheng, ZHANG Yong-zheng. *Derivation algebra of the modular Lie superalgebras W and S of Cartan - type* [J]. Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed., 2000, **20**: 137–144.

The Extension of Lie Algebras According to the Extension of Fields

WANG Deng-yin
(Dept. of Math., China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, China)

Abstract: Let E be an algebraic closed field of characteristic not zero, F its subfield with $[E : F] < \infty$, and L_E a simple Lie algebra of type L over E of finite dimension. Then L_F is a quasi-subalgebra of L_E. In this paper, we determine all the quasi-subalgebras of L_E which include L_F.

Key words: Lie algebras; quasi-subalgebras; root systems.