第25卷第3期 数学研究与评论 Vol.25, No.3
2005年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)03-0553-06 **文献标识码**: A

命题公式集 $F(S)$ 的基于 R_0- 算子的 16 类分划

韩 诚[1,2], 王国俊[1]
(1. 陕西师范大学数学研究所, 陕西 西安 710062; 2. 盐城师范学院数学系, 江苏 盐城 224001)
(E-mail: hanhanc@163.com)

摘 要: 利用 R_0- 蕴涵算子对命题公式集 $F(S)$ 进行分类, 得出了 $F(S)$ 的一个 16 类分划, 并证明了这种分类关于非运算是同余分类. 最后讨论了各类关于 MP 运算与 HS 运算的封闭性.

关键词: 分划; R_0- 算子; 确定集; K- 公式集; 封闭类.
MSC(2000): 03B52
中图分类: O141.1

1 引 言

分类是研究数学对象的常用方法, 通过分类可以对所研究的对象有进一步的认识. 比如, 关于拓扑空间, 可以按其分离性的强弱进行分类; 关于线性空间, 可以按其维数进行分类; 关于紧致曲面, 可以按其同胚于球面、环面的连通和还是射影平面的连通和进行分类 [1], 等等. 各种分类都加深了人们对相应对象的认识. 关于命题公式集 $F(S)$, 自然也存在通过分类进行研究的问题, 这里 $F(S)$ 既可以是经典二值逻辑中的公式集, 也可以是含有更多逻辑连接词的多值逻辑中的公式集. 关于前者, 早在半个世纪以前就有了永真式 (今多称为重言式) 和永假式 (今多称为矛盾式) 的概念 [2]. 但这显然不构成对 $F(S)$ 的分划, 即, 重言式与矛盾式只描述了 $F(S)$ 中的两类公式, 而大多数公式既非重言式, 亦非矛盾式. 不久前 [3] 中基于测度理论给出了 $F(S)$ 的一个无穷分划. 在多值逻辑的情形, 早在 1952 年 [4] 中就提出了以可靠程度来区分公式的思想. 后来 [5] 中将此思想具体化, 在基于 R_0- 蕴涵算子的逻辑系统中引入了 $\Sigma-(\alpha$- 重言式) 概念. 随后 [6] 就赋值域为 [0,1] 的情形给出了 $F(S)$ 的一个 7 类分划. [7] 中则利用积分方法基于 Lukasiewicz 蕴涵算子对 $F(S)$ 进行了另一种分划. 值得注意的还有一种新的分类思想, 即, 通过考虑一个公式 A 的所有可能赋值之集 $V(A)$ 来刻画该公式. 这一思想由文 [8] 提出, 并且 $V(A)$ 被称为公式 A 的确定集. 只是 [8] 仅仅停留在确定集的概念上而未及展开进一步的研究. 本文则沿此思路基于 R_0- 蕴涵算子对 $F(S)$ 中公式的确定集作了较系统的研究, 证明了 $F(S)$ 有一个由不同确定集所对应的 16 类分划. 同时证明了这种分划关于非运算而言是和谐的. 其关于 MP 运算与 HS 运算也具有较好的封闭性.

2 基本知识

为了需要, 先引入以下定义和定理:

收稿日期: 2003-01-06
基金项目: 国家自然科学基金 (90207015).

定义 2.1[5,9] 设 $S=\{p_1,\cdots,p_2\}$ 为一可数集，$\neg$ 是一元运算，$\vee$ 和 $\rightarrow$ 是二元运算，$F(S)$ 是由 S 生成的 $(\neg,\vee,\rightarrow)$ 型自由代数，则称 $F(S)$ 为公式集，称 $F(S)$ 中的元为公式，称 S 中的元为原子公式.

定义 2.2[5] 若在 $[0,1]$ 中规定 $\neg\alpha=1-\alpha,\alpha\vee\beta=\max\{\alpha,\beta\},\alpha\rightarrow\beta=R_0(\alpha,\beta)$, 这里

$$R_0(\alpha,\beta)=\begin{cases}1, & \alpha\le\beta,\\ \neg\alpha\vee\beta, & \alpha>\beta.\end{cases}$$

则 $[0,1]$ 成为 $-(\neg,\vee,\rightarrow)$ 型代数，记为 $\overline{W}$. 其中 $R_0:[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 叫 R_0- 算子. 称 $(\neg,\vee,\rightarrow)$ 型同态映射 $v:F(S)\rightarrow\overline{W}$ 为 $F(S)$ 的 $\overline{W}$ 赋值，或简称赋值，$F(S)$ 的全体赋值之集记为 $\overline{\Omega}$.

定义 2.3[5,6,9,10] 设 $A\in F(S),\alpha\in[0,1]$.

(i) 若对每个 $v\in\overline{\Omega}$, 恒有 $v(A)\ge\alpha(v(A)>\alpha)$, 则称 A 为 α- 重言式 (α^+- 重言式), 其全体之集记为 $\alpha-T(\overline{W})(\alpha^+-T(\overline{W}))$.

(ii) 若 $A\in\alpha-T(\overline{W})$, 且存在 $v\in\overline{\Omega}$, 且存在 $v\in\overline{\Omega}$ 使 $v(A)=\alpha$, 则称 A 为可达 α- 重言式，其全体之集记为 $[\alpha]-T(\overline{W})$.

(iii) 若 $A\in\alpha^+-T(\overline{W})$, 且对每个 $\varepsilon>0$, 总存在 $v_\varepsilon\in\overline{\Omega}$, 使 $\alpha<v_\varepsilon(A)<\alpha+\varepsilon$, 则称 A 为可达 α^+- 重言式，其全体之集记为 $[\alpha^+]-T(\overline{W})$.

(iv) 若 $A\in[0]-T(\overline{W})$, 且 $\neg A\in[\alpha]-T(\overline{W})([\alpha^+]-T(\overline{W}))$, 则称 A 为可达 α- 矛盾式 (可达 α^-- 矛盾式), 其全体之集记为 $[\alpha]-C(\overline{W})([\alpha^-]-C(\overline{W}))$.

定义 2.4[8] 设 $E\subseteq[0,1]$, 记 $V(A)=\{v(A)|v\in\overline{\Omega},A\in F(S)\}$, 称 $V(A)$ 是给定公式 A 的确定集.

定义 2.5 设 $A\in F(S)$, 记 $K=V(A)$, 则称 A 为 K- 公式，全体 K- 公式之集记为 $\mathcal{F}_K$.

注 文献 [8] 定义了公式集 $\Gamma\subseteq F(S)$ 是 K- 可满足的，当且仅当存在 $v\in\overline{\Omega}$, 对每个 $A\in\Gamma$ 都有 $v(A)\in K$.(其中 $K\subseteq[0,1]$). 由定义 2.5 易知 $\mathcal{F}_K$ 是 K- 可满足的. 反之，若 Γ 是 K- 可满足的，则 Γ 中的元未必是 K- 公式.

事实上，设 $\Gamma=\{p\rightarrow p\}$, 由 $p\rightarrow p$ 是重言式知 $V(p\rightarrow p)=\{1\}$, 而 Γ 显然可看作是 $[0,1]$ 可满足的，而 $V(p\rightarrow p)\neq[0,1]$.

引理 2.1[10] 设 $A=f(p_1,p_2,\cdots,p_t)\in F(S),t\ge1$. 若存在 $v_0\in\overline{\Omega}$, 使 $0<v_0(A)<1$, 则必存在 $k\in1,2,\cdots,t$ 使得 $v_0(A)=v_0(p_k)$ 或 $v_0(A)=1-v_0(p_k)$.

引理 2.2[6] 设 $A\in F(S)$, 若存在 $v_0\in\overline{\Omega}$ 使 $v_0(A)>\frac{1}{2}$, 则存在 $v\in\overline{\Omega}$ 使 $v(A)=1$.

引理 2.3[6] 在逻辑系统 $\overline{W}$ 中，$\{C(\overline{W}),[(\frac{1}{2})^-]-C(\overline{W}),[\frac{1}{2}]-C(\overline{W}),[1]-C(\overline{W}),[\frac{1}{2}]-T(\overline{W}),[(\frac{1}{2})^+]-T(\overline{W}),T(\overline{W})\}$ 是公式集 $F(S)$ 的一个关于 $\neg$ 的同余分划.

3 逻辑系统 $\overline{W}$ 中的一个 16 类分划

命题 3.1 若 $A\in F(S)$, 则 $0\in V(A)$ 或 $1\in V(A)$.

证明 设 $A=f(p_1,p_2,\cdots,p_t)\in F(S)(t\ge1)$, 取 $v_0\in\overline{\Omega}$ 使 $v_0(p_i)\in\{0,1\},(i=1,2,\cdots,t)$, 则 $v_0(A)\in\{0,1\}$, 故 $0\in V(A)$ 或 $1\in V(A)$.

定理 3.1 设 $A=f(p_1,p_2,\cdots,p_t)\in F(S),(t\ge1),\alpha,\beta\in(\frac{1}{2},1)$, 若 $\alpha\in V(A)$, 则 $\beta\in V(A)$.

证明 设 $v\in\overline{\Omega}$ 且 $v(A)=\alpha,\alpha\in(\frac{1}{2},1)$. 由引理 2.1 知存在 $k\in\{1,2,\cdots,t\}$, 使 $v(A)=v(p_k)=\alpha$ ($v(A)=1-v(p_k)$ 的情形类似可证). 设 $M=\{0,1,v(p_j),1-v(p_j)|j=1,2,\cdots,t\}$,

在 M 中定义 $\neg,\vee,\to$ 运算同 $\overline{W}$, 易知 M 对 $\neg,\vee,\to$ 封闭，故 M 是 $\overline{W}$ 的子代数．对任意的 $\beta\in(\frac{1}{2},1)$, 定义映射 $g:M\to\overline{W}$ 如下：

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1-\beta}{1-\alpha}x+\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}, & \alpha\le x\le 1\\ \frac{2\beta-1}{2\alpha-1}x+\frac{\alpha-\beta}{2\alpha-1}, & 1-\alpha<x<\alpha\\ \frac{1-\beta}{1-\alpha}x, & 0\le x\le 1-\alpha\end{cases}$$

显然有：(i) $g(1)=1,g(0)=0,g(\alpha)=\beta$.

(ii) $g(x)$ 是严格递增函数, 即 g 严格保序. 下面我们证明 g 保 $\neg$ 运算, 即证 $g(1-x)=1-g(x)$. 当 $\alpha\le x\le 1$ 时，有 $0\le 1-x\le\alpha$, 此时

$$g(1-x)=\frac{1-\beta}{1-\alpha}(1-x)=\frac{1-\beta}{1-\alpha}-\frac{1-\beta}{1-\alpha}x=1-(\frac{1-\beta}{1-\alpha}x+\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha})=1-g(x).$$

当 $0\le x\le 1-\alpha$ 时，可类似地得到 $g(1-x)=1-g(x)$.

当 $1-\alpha<x<\alpha$ 时,

$$1-\alpha<1-x<\alpha,$$

$$g(1-x)=\frac{2\beta-1}{2\alpha-1}(1-x)+\frac{\alpha-\beta}{2\alpha-1}=\frac{2\beta-1}{2\alpha-1}+\frac{\alpha-\beta}{2\alpha-1}-\frac{2\beta-1}{2\alpha-1}x$$
$$=1-\frac{\alpha-\beta}{2\alpha-1}-\frac{2\beta-1}{2\alpha-1}x=1-g(x).$$

总之，$g(1-x)=1-g(x)$.

令 $N=g(M)$, 并在 N 中定义 $\neg,\vee,\to$ 同 $\overline{W}$, 下证 $g:M\to N$ 为同构．事实上，由 g 的构造知其为保序双射，从而 g 保 $\vee$ 运算，由上面的证明知 g 保 $\neg$, 故只须证 g 保 $\to$ 即可.

对任意的 $\beta,\gamma\in M$, 若 $\beta\le\gamma$, 则 $g(\beta)\le g(\gamma)$, 此时 $g(\beta\to\gamma)=g(1)=g(\beta)\to g(\gamma)$; 若 $\beta>\gamma$, 由 g 严格保序知 $g(\beta)>g(\gamma)$, 故 $g(\beta\to\gamma)=g(\neg\beta\vee\gamma)=\neg g(\beta)\vee g(\gamma)=g(\beta)\to g(\gamma)$, 从而 $g:M\to N$ 为同构映射．设 $u=gv$, 显然 $u\in\overline{\Omega}$ 且 $u(A)=gv(A)=g(v(A))=g(\alpha)=\beta$, 故 $\beta\in V(A)$.

推论 3.1　设 $A\in F(S),\alpha,\beta\in(0,\frac{1}{2})$, 若 $\alpha\in V(A)$, 则 $\beta\in V(A)$.

推论 3.2　设 $A\in F(S)$.

(i) 若 $A\in C(\overline{W})(A\in T(\overline{W}))$, 则 $V(A)=0(V(A)=\{1\})$.

(ii) 若 $A\in[(\frac{1}{2})^-]-C(\overline{W})(A\in[(\frac{1}{2})^+-T(\overline{W}))$, 则 $V(A)=[0,\frac{1}{2})(V(A)=(\frac{1}{2},1])$.

(iii) 若 $A\in[\frac{1}{2}]-C(\overline{W})(A\in[\frac{1}{2}]-T(\overline{W}))$, 则 $V(A)=\{0,\frac{1}{2}\}$ 或 $V(A)=[0,\frac{1}{2}](V(A)=\{\frac{1}{2},1\}$ 或 $V(A)=[\frac{1}{2},1])$.

(iv) 若 $A\in[1]-C(\overline{W})$, 则 $V(A)$ 必为以下集合之一：$\{0,1\},\{0,\frac{1}{2},1\},[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1],[0,1],\{0\}\cup(\frac{1}{2},1],\{0\}\cup[0,\frac{1}{2}),\{1\}\cup[0,\frac{1}{2}),\{1\}\cup[0,\frac{1}{2}]$.

证明　(i),(ii),(iii) 显然成立．下证 (iv).

因为 $A\in[1]-C(\overline{W})$, 故 $0\in V(A),1\in V(A)$. 再由定理 3.1 及推论 3.1, 只需分别讨论 $\frac{1}{2}\in V(A)$ 和 $\frac{1}{2}\overline{\in}V(A)$ 即可得出全部 8 种可能情形.

结合推论 3.2 给出的确定集的所有可能情形，我们有

定理 3.2　在逻辑系统 $\overline{W}$ 中，$\{\mathcal{F}_{K_i}\mid i=1,2,\cdots,16\}$ 是公式集 $F(S)$ 的一个关于 $\neg$ 的同余分划，其中 $K_i(i=1,2,\cdots,16)$ 依次为以下集合：

$$\{0,1\},\{0,\frac{1}{2},1\},[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1],[0,1],\{0\},\{0,\frac{1}{2}\},[0,\frac{1}{2}),[0,\frac{1}{2}],\{0\}\cup(\frac{1}{2},1],$$

$$\{0\}\cup[\frac{1}{2},1],\{1\}\cup[0,\frac{1}{2}),\{1\}\cup[0,\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},1],\{\frac{1}{2},1\},(\frac{1}{2},1],\{1\}.$$

证明 首先，我们证明 $\mathcal{F}_{K_i}(i=1,2,\cdots,16)$ 非空. 设 p 为 S 中的一个原子公式，不难验证以下结论成立:

$A_1=\neg p\to p, V(A_1)=\{1\}\cup[0,\frac{1}{2})$	$B_1=\neg A_1, V(B_1)=\{0\}\cup(\frac{1}{2},1]$
$A_2=(p\to\neg p)\to p, V(A_2)=\{1\}\cup[0,\frac{1}{2}]$	$B_2=A_2, V(B_2)=\{0\}\cup[\frac{1}{2},1]$
$A_3=(p\to\neg p)\vee p, V(A_3)=(\frac{1}{2},1]$	$B_3=\neg A_3, V(B_3)=[0,\frac{1}{2})$
$A_4=\neg p\vee p, V(A_4)=[\frac{1}{2},1]$	$B_4=\neg A_4, V(B_4)=[0,\frac{1}{2}]$
$A_5=p\to p, V(A_5)=\{1\}$	$B_5=\neg A_5, V(B_5)=\{0\}$
$A_6=A_1\to A_2, V(A_6)=\{\frac{1}{2},1\}$	$B_6=\neg A_6, V(B_6)=\{0,\frac{1}{2}\}$

$C_1=p, V(C_1)=[0,1]$	$C_3=A_2\to\neg A_1, V(C_3)=\{0,\frac{1}{2},1\}$
$C_2=A_1\to\neg A_1, V(C_2)=\{0,1\}$	$C_4=A_6\to p, V(C_4)=[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]$

故 $\{\mathcal{F}_{K_i}\mid i=1,2,\cdots,16\}$ 是 $F(S)$ 的一个 16 类分划，下证此分划关于 $\neg$ 同余. 由定义 2.4 易得: 若 $V(A)=V(B)$, 则 $V(\neg A)=V(\neg B)$. 换言之，若 $\mathcal{F}_{V(A)}=\mathcal{F}_{V(B)}$, 则 $\mathcal{F}_{V(\neg A)}=\mathcal{F}_{V(\neg B)}$, 即此分划关于 $\neg$ 同余.

注 (i) 由定理 3.2 的证明可以看出, $V(B_i)=V(\neg A_i), i=1,2,\cdots,6$. 而 $V(C_i)=V(\neg C_i),(i=1,2,3,4)$. 对于此类 C_i 我们有如下定义:

定义 3.1 设 $A\in F(S)$, 若 $V(A)=V(\neg A)$, 则称公式 A 是封闭的，称 A 所在的类 $\mathcal{F}_{V(A)}$ 为封闭类.

显然, $\mathcal{F}_{[0,1]},\mathcal{F}_{\{0,1\}},\mathcal{F}_{\{0,\frac{1}{2},1\}},\mathcal{F}_{[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]}$ 是 $F(S)$ 上仅有的 4 个封闭类.

(ii) 由定理 3.2 的证明我们还可得到一个有趣的结论:

定理 3.3 若 $A\in F(S)$, 则存在 $B=f(p)\in F(S)$, 使 $V(A)=V(B)$.

例 3.1 设 $p,p_i\in S, i=1,2,3,4$,

$$A=(p_1\to((p_2\to(p_3\vee p_4))\vee p_2))\vee p_1,\quad B=(p\to\neg p)\vee p$$

利用文献 [5,9] 给出的广义重言式的升级算法容易证得 $V(A)=(\frac{1}{2},1]$, 显然 $V(A)=V(B)$.

4 语义 MP 运算和语义 HS 运算的封闭性

定义 4.1 设 $A,B,C\in F(S)$,

(i) 当 $A,A\to B\in\mathcal{F}_K$ 时 $B\in\mathcal{F}_K$, 则称 $\mathcal{F}_K$ 对 MP 运算封闭.

(ii) 当 $A\to B,B\to C\in\mathcal{F}_K$ 时 $A\to C\in\mathcal{F}_K$, 则称 $\mathcal{F}_K$ 对 HS 运算封闭.

引理 4.1[9] 设 $A,B,C\in F(S)$.

(i) 若 $A,A\to B\in T(\overline{W})$, 则 $B\in T(\overline{W})$.

(ii) 若 $A\to B,B\to C\in T(\overline{W})$, 则 $A\to C\in T(\overline{W})$.

引理 4.2[6] 设 $A,B\in F(S)$, 若 $A,A\to B\in[(\frac{1}{2})^+]-T(\overline{W})$, 则 $B\in[(\frac{1}{2})^+]-T(\overline{W})$.

由引理 4.1(i) 和引理 4.2，有

命题 4.1 在逻辑系统 $\overline{W}$ 中, $\mathcal{F}_{\{1\}}$ 和 $\mathcal{F}_{(\frac{1}{2},1]}$ 均对 MP 运算封闭.

定理 4.1 设 $A\in F(S)$. 若 $0\in V(A), 1\overline{\in}V(A)$, 则对任意 $B\in F(S)$, 有 $V(A\to B)\neq V(A)$.

证明 因为 $0 \in V(A)$, 所以存在 $v_0 \in \overline{\Omega}$, 使 $v_0(A) = 0$. 此时 $v_0(A \to B) = v_0(A) \to v_0(B) = 0 \to v_0(B) = 1$, 故 $1 \in V(A \to B)$. 又 $1 \overline{\in} V(A)$, 所以 $V(A \to B) \neq V(A)$.

定理 4.2 设 $A, B \in F(S)$, 若 $0 \in V(A \to B), 1 \overline{\in} V(A \to B)$, 则对任意 $C \in F(S), V(A \to B) \neq V(B \to C)$.

证明 因为 $0 \in V(A \to B)$, 所以存在 $v_0 \in \overline{\Omega}$ 使 $v_0(A \to B) = 0$, 故 $v_0(A) = 1, v_0(B) = 0$, 此时 $v_0(B \to C) = v_0(B) \to v_0(C) = 0 \to v_0(C) = 1$. 得 $1 \in V(B \to C)$, 又 $1 \overline{\in} V(A \to B)$, 所以 $V(B \to C) \neq V(A \to B)$.

注 由定理 4.1 和定理 4.2 可以看出，在 $\mathcal{F}_{\{0\}}, \mathcal{F}_{\{0,\frac{1}{2}\}}, \mathcal{F}_{[0,\frac{1}{2})}, \mathcal{F}_{[0,\frac{1}{2}]}$ 上定义 MP 运算和 HS 运算均无必要，以下我们只讨论 $F(S)$ 上其他 12 类的 MP 和 HS 运算，在此前提下我们给出命题 4.1 的两个更强的结果：

定理 4.3 在由定理 3.1 给出的 $F(S)$ 的分划中仅有 $\mathcal{F}_{\{1\}}$ 和 $\mathcal{F}_{(\frac{1}{2},1]}$ 对 MP 运算封闭.

证明 我们只需给出以下反例即

(i) $\mathcal{F}_K$ 是 $F(S)$ 上的封闭类时，设 $A \in \mathcal{F}_K$, 取任意的 $B \in \mathcal{F}_{\{0\}}$, 则对任意的 $v \in \overline{\Omega}, v(A \to B) = v(A) \to v(B) = v(A) \to 0 = \neg v(A) = v(\neg A)$, 故 $V(A \to B) = V(\neg A) = V(A)$ 显然 $B \overline{\in} \mathcal{F}_K$.

(ii) 对于 $\mathcal{F}_{[\frac{1}{2},1]}$, 令 $A = (\neg p \to p) \to p, B = \neg((p \to \neg p) \wedge (\neg p \to p)), (p \in S)$.

对于 $\mathcal{F}_{\{\frac{1}{2},1\}}$, 令 $A = (\neg p \to p) \to ((p \to \neg p) \to p), B = \neg(A \to \neg A), (p \in S)$

对于 $\mathcal{F}_{\{1\} \cup [0,\frac{1}{2})}$, 令 $A = \neg p \to p, B = (p \wedge \neg p) \wedge ((\neg p \to p) \wedge (p \to \neg p)), (p \in S)$.

对于 $\mathcal{F}_{\{1\} \cup [0,\frac{1}{2}]}$, 令 $A = (p \to \neg p) \to p, B = (p \wedge \neg p) \wedge \neg((\neg p \to p) \wedge (p \to \neg p)), (p \in S)$.

对于 $\mathcal{F}_{\{0\} \cup [\frac{1}{2},1]}$, 令 $M = (\neg q \to q) \to ((q \to \neg q) \to q), N = (\neg q \to q) \to \neg(\neg q \to q), A = (M \vee (p \to p)) \wedge ((p \to \neg p) \to ((p \to \neg p) \to \neg(\neg p \to p)))$

$B = \neg(N \to (p \to \neg p)) \vee \neg(\neg p \to p), (p, q \in S)$,

对于 $\mathcal{F}_{\{0\} \cup (\frac{1}{2},1]}$, 令 $M = (\neg q \to q) \to ((q \to \neg q) \to q), N = ((q \to \neg q) \to q) \to \neg(\neg q \to q), K = (M \vee (p \to \neg p)) \wedge ((p \to \neg p) \to ((p \to \neg p) \to \neg(\neg p \to p)))$

$A = \neg(K \to \neg K), B = \neg(N \to (p \to \neg p)) \vee \neg(\neg p \to p)$

以上 6 种情形均可验证得 $V(A) = V(A \to B)$, 但 $V(A) \neq V(B)$.

综合 (i),(ii) 可知结论成立.

定理 4.4 在由定理 3.1 给出的 $F(S)$ 的分划中仅有 $\mathcal{F}_{\{1\}}$ 对 HS 运算封闭.

证明 设 $A, A \to B \in \mathcal{F}_K$, 但, $B \overline{\in} \mathcal{F}_K$, 取 $C \in \mathcal{F}_{\{1\}}$, 则有

$$C \to A, A \to B \in \mathcal{F}_K \text{ 但 } V(C \to B) = V(B) \text{ 故 } C \to B \overline{\in} \mathcal{F}_K.$$

这就表明了定理 4.3 中讨论的 10 类公式对 HS 运算也不封闭.

由引理 4.1(ii) 可知 $\mathcal{F}_{\{1\}}$ 对 HS 运算封闭. 以下只需证 $\mathcal{F}_{(\frac{1}{2},1]}$ 对 HS 运算不封闭即可. 文献 [6] 中给出了一个反例：

令 $A = p_4, B = (p_2 \to \neg p_1 \vee p_1) \vee p_2, C = (p_4 \to \neg p_3 \vee p_3) \vee p_4$.

验证可知： $A \to B, B \to C \in \mathcal{F}_{(\frac{1}{2},1]}$, 但 $A \to C \in \mathcal{F}_{\{1\}}$.

参考文献:

[1] MASSEY W S. *Algebra Topology: An Introduction* [M]. Springer-Verlag, New York, 1984.

[2] KLEENE S C. *Introduction to Metamathematics* [M]. Van Nostrand, Princeton, 1952.
[3] 王国俊, 傅丽, 宋建社, 等. 二值命题逻辑中命题的真度理论 [J]. 中国科学 (A 辑), 2001, **31**(11): 998–1008.
WANG Guo-jun, FU Li, SONG Jian-she, et al. *Theory of truth degree in two-valued propositional logic* [J]. Sci. China Ser.A, 2001, **31**(11): 998–1008. (in Chinese)
[4] ROSSER J B, TURGUETT A R. *Many-Valued Logic* [M]. North-Holland, Amsterdan, 1952.
[5] 王国俊. 修正的 Kleene 系统中 $\Sigma-(\alpha-$ 重言式) 理论 [J]. 中国科学 (E 辑), 1998, **28**(2): 146–152.
WANG Guo-jun. *Theory of* $\Sigma-(\alpha-$*tautologies) in revised kleene system* [J]. Sci. China Ser.E, 1998, **28**(2): 146–152. (in Chinese)
[6] WU Hong-bo. *Theory of generalized tautologies in revised Kleene systems* [J]. Sci. China Ser.E, 2001, **44**(3): 233–238.
[7] 王国俊, 王伟. 逻辑度量空间 [J]. 数学学报, 2001, **44**(1): 159–168.
WANG Guo-jun, WANG Wei. *Logical metric spaces*[J]. Acta Math. Sinica, 2001, **44**(1): 159–168. (in Chinese)
[8] Klement E P, Navara M. *A survey on different triangular norm-based fuzzy logics* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, **101**: 241-251.
[9] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.
WANG Guo-Jun. *Nonclassical mathematical logic and approximate reasoning* [M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)
[10] 王龙春, 王国俊. R_0 代数 [0,1] 的子代数与广义重言式 [J]. 数学学报, 2004, **47**(3): 521–526.
WANG Long-chun, WANG Guo-jun. *Subalgebras of R_0-algebra [0,1] and generalized tautology*[J]. Acta Math. Sinica, 2004, **47**(3): 521–526. (in Chinese)

A Sixteen-Classification Partition of Propositional Formula Set $F(S)$ Based on R_0-Operator

HAN Cheng[1,2], *WANG Guo-jun*[1]
(1. Inst. of Math., Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China;
2. Dept. of Math., Yancheng Teachers College, Jiangsu 224001, China)

Abstract: The propositional formula set $F(S)$ is classified into sixteen classifications by using R_0 implication operator, and it is proved that this partition about negation is congruent. Moreover, we discuss whether each classification in $F(S)$ is closed under modus ponens and hypothetical syllogism.

Key words: partition; R_0-operator; validation set; K-formula class; closed class.