文章编号: 1000-341X(2005)03-0559-07 文献标识码: A

$Q(\sqrt{6})$ 上的定幺模格的分类

王瑞卿
(中原工学院基础部, 河南 郑州 450007)
(E-mail: wanghg@zzti.edu.cn)

摘　要: 利用推广的邻格方法, 完成了 $Q(\sqrt{6})$ 上秩 4 的在一个阿基米德除子上正定, 在另一阿基米德除子上负定的所有幺模格种的分类.

关键词: 定幺模格; 邻格; 种; 分类.
MSC(2000): 11E41
中图分类: O156.5

1 引 言

二次格 (整二次型) 的分类是二次型算术理论的一个基本问题, 有很久的历史, 它与许多数学分支有关, 如模形式理论, 群论, Lie 理论, 编码理论等.

令 F 是全实代数数域, O 是其代数整数环, (V,Q) 是 F 上的二次空间, 若 V 在 F 的所有阿基米德除子的局部化是非迷向的, 则称 (V,Q) 为定二次空间. 若 V 在 F 的所有阿基米德除子的局部化是正 (负) 定的, 则称 (V,Q) 为正 (负) 定二次空间. 除有理数域外, 其它全实代数数域上均有既非正定又非负定的定二次型, 而往往其上的定格的分类是非平凡的 (以后定格特指此类定二次空间上的格). 如当 F 是实二次域时, 若 V 在两个阿基米德除子 ∞_1,∞_2 的局部化 $V\infty_1,V\infty_2$ 分别是正定, 负定时, 且域的基本单位元是全正时, 则其上的定格分类与正 (负) 定格分类无关. 对于实二次域上的正定幺模格的分类已有较多的结果, 如 [1-7] 对 $Q(\sqrt{2}),Q(\sqrt{3}),Q(\sqrt{5}),Q(\sqrt{6})$ 等上的一些正定幺模格的进行了分类. 对域 $Q(\sqrt{2})$, 由于其基本单位是 $\varepsilon=1+\sqrt{2},N\varepsilon=-1$, 所以其上的定幺模格只要 scale$(1+\sqrt{2})$, 就转化为正定或负定幺模格的分类, 所以实际上 [2] 完成了 $Q(\sqrt{2})$ 上所有秩 4 的定幺模格的分类. 而对于域 $Q(\sqrt{3})$ 及 $Q(\sqrt{6})$ 上, 由于其基本单位 $\varepsilon=2+\sqrt{3},\varepsilon=5+2\sqrt{6}$ 有 $N\varepsilon=1$, 所以其上在 ∞_1 上正定, 在 ∞_2 上负定的幺模格的分类与正定幺模格的分类有本质的不同. 因此本文利用推广的 Kneser 的邻格方法及 [6-7] 的方法, 确定了 $Z[\sqrt{6}]$ 上所有的 ∞_1 上正定, 在 ∞_2 上负定的秩 4 幺模格种的分类.

文中未说明的术语及符号同于 O'Meara 书 [8].

2 一些引理

通过计算 Hasse 符号及利用 ([8]93:1) 可得下面两个引理:

引理 1 若 $Q(\sqrt{6})$ 上在 ∞_1 上正定, 在 ∞_2 上负定的二次空间 V 上存在幺模格, 则

$$V\cong\begin{pmatrix}\sqrt{6}+2 & 1\\ 1 & \sqrt{6}-2\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}\sqrt{6}+2 & 1\\ 1 & \sqrt{6}-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\sqrt{6}+2 & 1\\ 1 & \sqrt{6}-2\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}\sqrt{6}+2 & 1\\ 1 & \sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

收稿日期: 2002-12-02
基金项目: 河南省教育厅自然科学项目 (200410465010), 河南省高校青年骨干教师资助计划项目.

引理 2 (1) $V \cong \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix}$ 上的幺模格有五个种, 记为 O_1, O_2, P, W, E. 它们在 dyadic 除子上的局部格分别为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sqrt{6}+1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $V \cong \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$ 上的幺模格有三个种 W^*, O_1^*, P^*. 它们在 dyadic 除子上的局部格分别为 $\begin{pmatrix} 2+\sqrt{6} & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -(4+2\sqrt{6}) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2+\sqrt{6} & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

定义 1 设 L 是 V 上的幺模格, p 是 O 的素理想, $x \in p^{-1}L \backslash L$ 且 $Q(x) \in O$, 称 $L(x) = Ox + \{y | B(x,y) \in O, y \in L\}$ 为 L 的 p- 邻格. 则 $L(x)$ 是幺模格.

若 p- 邻格 $L(x) \cong L(y)$, 称 x 与 y 是等价的, 记为 $x \sim y$.

引理 3 (1) 若 L 的 p- 邻格 $L(x), r \in O$ 是与 p 互素的, $y \in L$ 且 $B(x,y) \in O$, 则 $L(rx+y) = L(x)$; (2) 若 L 的 p- 邻格 $L(x)$ 与 $L(y)$, 存在 $\sigma \in O(L)$, 使 $\sigma(x) = y$, 则 $L(x) \cong L(y)$.

定义 2 若种 $\mathrm{gen}(L)$ 的类 $\{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ 满足如下条件 (1) $L_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 的任一 p- 邻格必同构于某一 L_j, (2) $\{L_1, L_2, \cdots, L_k\}$ 作为顶点按 p- 邻格关系连接成最大连通图. 称 $\{L_1, L_2, \cdots, L_k\}$ 是 $\mathrm{gen}(L)$ 的一条 p- 邻格链.

类似于 [6] 命题 3, 命题 4, 定理 1 可得引理 4–6.

引理 4 引理 2 中的种 O_1, O_2, W, P, E 及 O_1^*, W^*, P^* 有下面邻格关系:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
W \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & O_1 \arrow[r, leftrightarrow] & E, \quad O_1^* \longleftrightarrow W^* \longleftrightarrow P^*. \\
 & O_2 \arrow[ur, leftrightarrow] &
\end{tikzcd}$$

其中 $\mathrm{gen}L \longleftrightarrow \mathrm{gen}M$ 表示 $\mathrm{gen}L$ 任一格是 $\mathrm{gen}M$ 的某一格的 p- 邻格, 反之也成立. 其中 $p = (2+\sqrt{6})$.

引理 5 P 种, W 种, W^* 种及 P^* 种仅有一条 $(3+\sqrt{6})$- 邻格链.

记 $\pi_1 = 2+\sqrt{6}, \pi_2 = 3+\sqrt{6}$, 若幺模格 L, M 分别是不同种的幺模格, 且 L 是 M 的 π_1- 邻格, 则 $\pi_1 L \subset M \subset \pi_1^{-1} L$. 定义 $[\pi_1 L, \pi_1^{-1} L] = \{K | \pi_1 L \subset K \subset \pi_1^{-1} L, K \text{ 是幺模格 }\}$. 设 $L(x)$ 是 L 的 π_2– 邻格, 则 $L(x) \in \mathrm{gen}(L)$, 且 $M((2+\sqrt{6})x)$ 是 M 的 π_2- 邻格, $M((2+\sqrt{6})x) \in \mathrm{gen}(M)$ 及 $\pi_1 L(x) \subset M((2+\sqrt{6})x) \subset \pi_1^{-1} L(x)$.

引理 6 若 $\mathrm{gen}(L)$ 有一条 π_1- 邻格链 $L_1, L_2, \cdots, L_k$, 而 $M \in [\pi_1 L, \pi_1^{-1} L]$, 则当 $\mathrm{gen}(L)$ 或 $\mathrm{gen}(M)$ 的 π_2- 邻格链仅有一条时, $\mathrm{gen}(M)$ 中所有类必在 $\bigcup_{i=1}^{k} [\pi_1 L_i, \pi_1^{-1} L_i]$ 中.

引理 7[2] 在 $Q(\sqrt{6})$ 上正定幺模种 $\mathrm{gen}(I_4)$ 有两条 $(3+\sqrt{6})$- 邻格链, 其中一条为 $L \cong \langle \varepsilon \rangle \perp \langle \varepsilon \rangle \perp \langle 1 \rangle \perp \langle 1 \rangle$ (记其基向量为 e_1, e_2, e_3, e_4) 及 $L(x)$(由 $x = \frac{1}{3+\sqrt{6}}(e_1+e_2+e_3+e_4) + e_3$ 生成

的 $(3+\sqrt{6})$- 邻格).

3 格的分类

3.1 W, O_1, O_2, P, E 的分类

定理 1 P 种有三个类，分别为：

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6}\varepsilon & 2\overline{\varepsilon} & -2+\sqrt{6} & 3-\sqrt{6} \\ 2\overline{\varepsilon} & \sqrt{6}\varepsilon & 3-\sqrt{6} & -2+\sqrt{6} \\ -2+\sqrt{6} & 3-\sqrt{6} & \sqrt{6} & 0 \\ 3-\sqrt{6} & -2+\sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix},$$

其中 $\overline{\varepsilon} = 5-\sqrt{6}$.

证明　由引理 5 知 P 种仅有一条 π_2- 邻格链. 显然 $\begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$ 是 P 种格，记其对应的基向量为 e_1, e_2, e_3, e_4 . 令 $l_1 = e_1, l_2 = e_1-(2+\sqrt{6})e_2, l_3 = e_3, l_4 = e_3-(2+\sqrt{6})e_4$, 则 $\langle l_1, l_2, l_3, l_4\rangle \cong \langle 2+\sqrt{6}\rangle \perp \langle (2+\sqrt{6})\varepsilon\rangle \perp \langle 2+\sqrt{6}\rangle \perp \langle (2+\sqrt{6})\varepsilon\rangle$, 显然 $\langle l_1, l_2, l_3, l_4\rangle \subset \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle \subset \frac{1}{2+\sqrt{6}}\langle l_1, l_2, l_3, l_4\rangle$, 易求出 $[\langle l_1, l_2, l_3, l_4\rangle, \frac{1}{2+\sqrt{6}}\langle l_1, l_2, l_3, l_4\rangle]$ 中仅有三个 P 格,

$$L_1 = \langle e_1, \frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_1+e_3), \frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_1+e_3)-e_2-e_4, \overline{\varepsilon}e_3-(\sqrt{6}-2)e_4\rangle;$$

$$L_2 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle;$$

$$L_3 = \langle e_3, \frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_1+e_3)-e_2, e_1, \frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_1+e_3)-e_4\rangle.$$

L_1 及 L_2 同构定理中第二格， L_3 同构定理中第三格.

而由引理 7, 格 $\langle l_1, l_2, l_3, l_4\rangle \cong \langle 2+\sqrt{6}\rangle \perp \langle (2+\sqrt{6})\varepsilon\rangle \perp \langle 2+\sqrt{6}\rangle \perp \langle (2+\sqrt{6})\varepsilon\rangle$ 所在的 π_2 - 邻格链仅有两个格，另一个格由 $x = \frac{1}{3+\sqrt{6}}(l_1-l_2+l_3-l_4)+l_4$ 生成. 由引理 6,P 种类仅可能在 L_1, L_2, L_3 , 及 $L_1(x), L_2(x), L_3(x)$ 中得到. 可以证明 $L_1(x) \cong \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix}$; $L_3(x) = \langle \frac{1}{3+\sqrt{6}}(\frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_1+e_3)-e_3+e_1-(\sqrt{6}-2)e_1+\frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_1+e_3)-e_4), \frac{1}{3+\sqrt{6}}(e_3-(\sqrt{6}-2)e_3+\frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_1+e_2)-e_2+\frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_1+e_3)-e_4, \frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_1+e_3)-e_4, \frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_1+e_3)-e_2\rangle$; $L_2(x) = \langle \frac{1}{3+\sqrt{6}}(e_1-e_2+(\sqrt{6}-2)e_3-e_4), \frac{1}{3+\sqrt{6}}((\sqrt{6}-2)e_1-e_2+e_3-e_4), (\sqrt{6}-2)e_1-e_2, (\sqrt{6}-2)e_3-e_4\rangle$, 易得 $L_2(x) \cong L_3(x)$, 且它们表 $\sqrt{6}\overline{\varepsilon}, \sqrt{6}\overline{\varepsilon}, \sqrt{6}, \sqrt{6}$ 的向量均是不可分元且相互连接，所以它们是不可分格，所以 P 种有三个类，即定理得证.

推论 1　秩 2 的 P 种幺模格仅有 2 类 $\begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$.

记 $P_1 : \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix}$ 的基向量为 f_1, f_2, f_3, f_4;

$P_2 : \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$ 的基向量为： e_1, e_2, e_3, e_4;

P_3 由 $x=\frac{1}{3+\sqrt{6}}(e_2+e_4)-e_3$ 邻格生成， $P_3=P_2(x)$, 它们是 P 种的三个类.

由引理 4,5,6 可知 W,O_1,O_2,E 的类在 $[(2+\sqrt{6})P_1,(2+\sqrt{6})^{-1}P_1]$, $[(2+\sqrt{6})P_2,(2+\sqrt{6})^{-1}P_2]$, $[(2+\sqrt{6})P_2(x),(2+\sqrt{6})^{-1}P_2(x)]$ 内幺模格中得到，下面仅给出 W 格的分类过程，其余情况类似故略去.

〈一〉 $[(2+\sqrt{6})P_1,(2+\sqrt{6})^{-1}P_1]$

其内有 W 格:

$$W_1=\langle\frac{1}{2+\sqrt{6}}(f_1+f_2),(2+\sqrt{6})f_1,f_3,f_4\rangle;$$

$$W_2=\langle\frac{1}{2+\sqrt{6}}(f_3+f_4),(2+\sqrt{6})f_3,f_1,f_2\rangle;$$

$$W_3=\langle\frac{1}{2+\sqrt{6}}(f_1+f_2)+f_1,f_1+f_2,f_3,f_4\rangle;$$

$$W_4=\langle\frac{1}{2+\sqrt{6}}(f_3+f_4)+f_3,f_3+f_4,f_1,f_2\rangle.$$

在同构 $\sigma_1: f_1\to f_1, f_2\to -f_2+(\sqrt{6}-2)f_1, f_3\to f_3, f_4\to f_4$, 或 $\sigma_2: f_1\to f_1, f_2\to f_2, f_3\to f_3, f_4\to -f_4+(\sqrt{6}-2)f_3$, 或 $\sigma_3: f_1\to f_3, f_2\to f_4, f_3\to f_1, f_4\to f_2$ 下，易证

$$W_1\cong W_2\cong W_3\cong W_4\cong\begin{pmatrix}\sqrt{6}+1 & 2\\ 2 & \sqrt{6}-1\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}\sqrt{6}+2 & 1\\ 1 & \sqrt{6}-2\end{pmatrix}.$$

〈二〉 $[(2+\sqrt{6})P_2,(2+\sqrt{6})^{-1}P_2]$

其内有 W 格: $W_5=\langle\frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_1+e_4),e_4,e_1+e_2,(2+\sqrt{6})e_3\rangle$; $W_6=\langle\frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_1+e_4)+e_3,e_2+e_3,e_1,(2+\sqrt{6})e_2\rangle$; $W_7=\langle\frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_2+e_3),e_1+e_4,e_2,(2+\sqrt{6})e_1\rangle$; $W_8=\langle\frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_2+e_3)+e_4,e_1+e_4,e_3,(2+\sqrt{6})e_4\rangle$ 在同构 $\sigma: e_1\to e_1, e_2\to e_2, e_3\to -e_3, e_4\to e_4-(\sqrt{6}-2)e_3$ 下， $W_5\cong W_6$, 同样有 $W_7\cong W_8$, 显然 $W_5\cong W_7$, 所以 $W_5\cong W_6\cong W_7\cong W_8$.

〈三〉 $[(2+\sqrt{6})P_2(x),(2+\sqrt{6})^{-1}P_2(x)](x=(2+\sqrt{6})(3+\sqrt{6})^{-1}(e_2+e_4)-(2+\sqrt{6})e_3)$

其内有 W 格:

$$W_5(x)=\langle\frac{1}{3+\sqrt{6}}(e_2+e_4)+e_3-(2+\sqrt{6})e_3,e_4,\frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_1+e_4)+e_2+e_3,e_2+(3+\sqrt{6})e_3\rangle;$$

$$W_6(x)\cong W_5(x);$$

$$\begin{aligned}W_7(x)=\langle&\frac{1}{3+\sqrt{6}}(-(\sqrt{6}-2)e_3+e_4+e_2+e_3),\\&\frac{1}{2+\sqrt{6}}(e_1+(\sqrt{6}-2)e_3-e_4)-(\sqrt{6}-2)e_3-e_4,\\&(3+\sqrt{6})((\sqrt{6}-2)e_3-e_4),2\sqrt{6}e_3-e_4\rangle;\end{aligned}$$

$$W_8(x)\cong W_7(x).$$

所以 W 种格类为: $W_1,W_5,W_5(x),W_7(x)$. 下面讨论它们之间的同构性，从而完成格的分类.

为了证明这些格的同构性，首先令 $l_1=(\sqrt{6}-2)(e_1-(2+\sqrt{6})e_2)$; $l_2=(\sqrt{6}+2)e_1$; $l_3=(\sqrt{6}-2)(e_3-(2+\sqrt{6})e_4)$; $l_4=(\sqrt{6}+2)e_3$. $n_1=\frac{1}{3+\sqrt{6}}\varepsilon(-(2+\sqrt{6})e_2-(2+\sqrt{6})e_4)-e_1+(2+\sqrt{6})e_2-$

$e_3+(2+\sqrt{6})e_4$; $n_2=\frac{1}{3+\sqrt{6}}(-(2+\sqrt{6})e_2-(2+\sqrt{6})e_4)+e_1+e_3$; $n_3=e_1-(2+\sqrt{6})e_2-e_3+(2+\sqrt{6})e_4$; $n_4=-e_1+e_3$. 则

$$\langle l_1,l_2,l_3,l_4\rangle \cong \langle 2(2+\sqrt{6})\rangle \perp \langle 2(\sqrt{6}+2)\varepsilon\rangle \perp \langle 2(2+\sqrt{6})\rangle \perp \langle 2(\sqrt{6}+2)\varepsilon\rangle,$$

$$\langle n_1,n_2,n_3,n_4\rangle \cong \langle 2(2+\sqrt{6})\varepsilon\rangle \perp \langle 2(2+\sqrt{6})\rangle \perp \langle 2(2+\sqrt{6})\varepsilon\rangle \perp \langle 2(2+\sqrt{6})\rangle.$$

在这些基向量下，可把上面的格表示如下：

$W_5=\langle \frac{1}{2}l_1-\frac{1}{2(2+\sqrt{6})}l_3+\frac{1}{2(2+\sqrt{6})}l_4, -\frac{1}{2}l_3+\frac{1}{2}l_4, \frac{1}{2}l_1+\frac{1}{2}l_2+\frac{1}{2+\sqrt{6}}l_4, l_1,l_2,l_3,l_4\rangle$; $W_5(x)=\langle -\frac{1}{2(2+\sqrt{6})}n_1-\frac{1}{2(2+\sqrt{6})}n_2+\frac{1}{2(2+\sqrt{6})}n_3+\frac{1}{2(2+\sqrt{6})}n_4, -\frac{\varepsilon}{4}n_1+\frac{7+3\sqrt{6}}{4}n_2-\frac{1+\sqrt{6}}{4}n_3+\frac{7+2\sqrt{6}}{4}n_4, \frac{1}{2}n_1+\frac{1}{2}n_4+n_2, \frac{1}{2}n_1-\frac{1}{2}n_4\rangle$, $W_7(x)=\langle -\frac{1}{2}n_1+\frac{1}{2}n_4, -\frac{3}{4}n_1-\frac{1+\sqrt{6}}{4}n_2+\frac{3+2\sqrt{6}}{4}n_3-\frac{3+2\sqrt{6}}{4}n_4, \frac{1+\sqrt{6}}{2(2+\sqrt{6})}n_1+\frac{7+3\sqrt{6}}{2(2+\sqrt{6})}n_2-\frac{3+\sqrt{6}}{2(2+\sqrt{6})}n_3+\frac{3+\sqrt{6}}{2(2+\sqrt{6})}n_4, -3\frac{1}{2(2+\sqrt{6})}n_1+\frac{9+4\sqrt{6}}{2(2+\sqrt{6})}n_2-\frac{1}{2(2+\sqrt{6})}n_3+\frac{11+4\sqrt{6}}{2(2+\sqrt{6})}n_4\rangle$.

考察下面格之间的所有表示： $\langle l_1,l_2,l_3,l_4\rangle \longrightarrow \frac{1}{2(2+\sqrt{6})}\langle n_1,n_2,n_3,n_4\rangle$, $\langle n_1,n_2,n_3,n_4\rangle \longrightarrow \frac{1}{2(2+\sqrt{6})}\langle n_1,n_2,n_3,n_4\rangle$, 把它们代入上面三格，易验证 $W_5, W_5(x), W_7(x)$ 互不同构，并且它们是不可分格，所以 W 种有四类： $W_1, W_5, W_5(x), W_7(x)$.

计算出每个不同构类对应的矩阵我们得到下面定理：

定理 2 各个种的类数为 $h(E)=2, h(O_1)=h(O_2)=3, h(W)=4$. 记 $\varepsilon=5+2\sqrt{6}$, 代表类的矩阵如下：

E:

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{6}-4 & 2 & 2 & 3+\sqrt{6} \\ 2 & 4+2\sqrt{6} & 1+\sqrt{6} & 0 \\ 2 & 1+\sqrt{6} & 2+2\sqrt{6} & 10+4\sqrt{6} \\ 3+\sqrt{6} & 0 & 10+4\sqrt{6} & \varepsilon(4+2\sqrt{6}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6\sqrt{6}-14 & 4-\sqrt{6} & 4-\sqrt{6} & 3+\sqrt{6} \\ 4-\sqrt{6} & 2+2\sqrt{6} & -1+\sqrt{6} & 0 \\ 4-\sqrt{6} & -1+\sqrt{6} & 2\sqrt{6} & 10+4\sqrt{6} \\ 3+\sqrt{6} & 0 & 10+4\sqrt{6} & (4+2\sqrt{6})\varepsilon \end{pmatrix}.$$

O_1:

$$\begin{pmatrix} 4\sqrt{6}-3 & 6 & 3-\sqrt{6} & \sqrt{6}-1 \\ 6 & 2+2\sqrt{6} & \sqrt{6}-1 & 2 \\ 3-\sqrt{6} & \sqrt{6}-1 & 4\sqrt{6}-3 & 6 \\ \sqrt{6}-1 & 2 & 6 & 2+2\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10\sqrt{6}-24 & 3\sqrt{6}-6 & 0 & \sqrt{6}+5 \\ 3\sqrt{6}-6 & 4\sqrt{6}-3 & 7-\sqrt{6} & 18+6\sqrt{6} \\ 0 & 7-\sqrt{6} & 4\sqrt{6} & 6\sqrt{6}+12 \\ \sqrt{6}+5 & 18+6\sqrt{6} & 6\sqrt{6}+12 & (6+6\sqrt{6})\varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4\sqrt{6}-5 & 4\sqrt{6} & \sqrt{6} & 3+\sqrt{6} \\ 4\sqrt{6} & 2\sqrt{6}+2 & 3+\sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 3+\sqrt{6} & 4\sqrt{6}-5 & 4-\sqrt{6} \\ 3+\sqrt{6} & 0 & 4-\sqrt{6} & 2\sqrt{6}+2 \end{pmatrix}.$$

O_2:

$$\begin{pmatrix} 3\sqrt{6}-7 & 5-2\sqrt{6} & \sqrt{6} & 1 \\ 5-2\sqrt{6} & 3\sqrt{6}-7 & 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 24+10\sqrt{6} & 0 \\ 1 & \sqrt{6} & 0 & 24+10\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\sqrt{6}-5 & 3+2\sqrt{6} & 4+\sqrt{6} & 5\sqrt{6}-12 \\ 3+2\sqrt{6} & 10\sqrt{6}+24 & 0 & -1+\sqrt{6} \\ 4+\sqrt{6} & 0 & 10\sqrt{6}+24 & 1-\sqrt{6} \\ 5\sqrt{6}-12 & -1+\sqrt{6} & 1-\sqrt{6} & 10\sqrt{6}-24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6}+1 & 2 \\ 2 & \sqrt{6}-1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{6}+1 & 2 \\ 2 & \sqrt{6}-1 \end{pmatrix}.$$

W:

$$\begin{pmatrix} 3\sqrt{6}-7 & 3-\sqrt{6} & \sqrt{6}-2 & 1 \\ 3-\sqrt{6} & \sqrt{6} & 1 & 2+\sqrt{6} \\ \sqrt{6}-2 & 1 & 2\sqrt{6}+2 & 10+4\sqrt{6} \\ 1 & 2+\sqrt{6} & 10+4\sqrt{6} & (4+2\sqrt{6})\varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5\sqrt{6}-12 & 5\sqrt{6}-12 & 1-\sqrt{6} & 5-\sqrt{6} \\ 5\sqrt{6}-12 & 6\sqrt{6}-13 & -3-\sqrt{6} & 2-3\sqrt{6} \\ 1-\sqrt{6} & -3-\sqrt{6} & 15\sqrt{6}+36 & 8\sqrt{6}+18 \\ 5-\sqrt{6} & 2-3\sqrt{6} & 8\sqrt{6}+18 & 21\sqrt{6}+48 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 20+13\sqrt{6} & -3 & -43-16\sqrt{6} & -8-3\sqrt{6} \\ -3 & \sqrt{6} & 3+\sqrt{6} & 4-\sqrt{6} \\ -43-16\sqrt{6} & 3+\sqrt{6} & 66+28\sqrt{6} & 11+7\sqrt{6} \\ -8-3\sqrt{6} & 4-\sqrt{6} & 11+7\sqrt{6} & 7\sqrt{6}-9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}+1 & 2 \\ 2 & \sqrt{6}-1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix}.$$

3.2 $W^\star, P^\star, O_1^\star$ 的分类

定理 3 $P^\star$ 仅有一个类 $\begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$.

证明 显然 $L \cong \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$ 是 $P^\star$ 格，记相应基向量为 r_1, r_2, r_3, r_4．由引理 5 知，$P^\star$ 种仅有一条 $(3+\sqrt{6})$- 邻格链．下面求其 $(3+\sqrt{6})$- 邻格.

记 $k_1 = r_1, k_2 = r_1 - (2+\sqrt{6})r_2, k_3 = r_3, k_4 = r_3 - (2+\sqrt{6})r_4$．显然 $\langle k_1, k_2, k_3, k_4\rangle = \langle 2+\sqrt{6}\rangle \perp \langle 2+\sqrt{6}\rangle \perp \langle 2+\sqrt{6}\rangle \perp \langle (2+\sqrt{6})\varepsilon\rangle$, 且 $\langle k_1, k_2, k_3, k_4\rangle \subset L \subset (2+\sqrt{6})^{-1}\langle k_1, k_2, k_3, k_4\rangle$, L 的 $(3+\sqrt{6})$- 邻格为:

(1) $L(x): x = \frac{1}{3+\sqrt{6}}(k_1+k_2+k_3) \sim \frac{1}{3+\sqrt{6}}(-r_1+r_2+r_3)$, 则 $\langle \frac{1}{3+\sqrt{6}}(-r_1+r_2+r_3), r_2\rangle \cong \begin{pmatrix} \sqrt{6}\varepsilon & -\bar{\varepsilon} \\ -\bar{\varepsilon} & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$, 则由推论 1 可知，$L(x) \cong L$.

(2) $L(y): y = \frac{1}{3+\sqrt{6}}(-k_1+k_2+k_3) \sim \frac{1}{3+\sqrt{6}}\varepsilon(-(2+\sqrt{6})r_2+r_3)$, 其内子格 $\langle \frac{1}{3+\sqrt{6}}\varepsilon(-(2+\sqrt{6})r_2+r_3), \frac{1}{3+\sqrt{6}}\varepsilon(-r_2+(\sqrt{6}-2)r_3)-r_4\rangle \cong \begin{pmatrix} (\sqrt{6}+2)\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \sqrt{6}+2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix}$, 由推论 1 可知，$L(y) \cong L$.

(3) $L(z): z = \frac{1}{3+\sqrt{6}}(k_1+k_4) - k_1 = \frac{1}{3+\sqrt{6}}(r_1+r_3+r_4) - r_4 - r_1 \sim \frac{1}{3+\sqrt{6}}(r_1+r_3+r_4)$, 其内子格 $\langle \frac{1}{3+\sqrt{6}}(r_1+r_3+r_4), z\rangle \cong \begin{pmatrix} \sqrt{6}-2 & -1 \\ -1 & \sqrt{6}+2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix}$, 由推论 1 可知，$L(z) \cong L$.

其余 $(3+\sqrt{6})$- 邻格与它们同构．根据 Kneser 邻格方法，所以 P 仅有一个类.

类似于定理 2 的方法及过程，可得下面定理:

定理 4 $W^\star$ 种有三类，$O_1^\star$ 种有一类，分别如下:

$W^\star$:

$$\begin{pmatrix} (\sqrt{6}+1)\varepsilon & 1 & \sqrt{6}-2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6}+2 & 1 & \sqrt{6}+2 \\ \sqrt{6}-2 & 1 & 2\sqrt{6} & 2 \\ 1 & \sqrt{6}+2 & 2 & 2\sqrt{6}+4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\sqrt{6}-1)\bar{\varepsilon} & \bar{\varepsilon} & \sqrt{6}-2 & \bar{\varepsilon} \\ \bar{\varepsilon} & \sqrt{6}-2 & 1 & \sqrt{6}-2 \\ \sqrt{6}-2 & 1 & 4+2\sqrt{6} & 2 \\ \bar{\varepsilon} & \sqrt{6}-2 & 2 & 2\sqrt{6}-4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6}+1 & 2 \\ 2 & \sqrt{6}-1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

$O_1^\star$:

$$\begin{pmatrix} (2\sqrt{6}+1)\bar{\varepsilon} & 4-\sqrt{6} & 6-2\sqrt{6} & \sqrt{6}-1 \\ 4-\sqrt{6} & 2\sqrt{6}+2 & \sqrt{6}-1 & 4+\sqrt{6} \\ 6-2\sqrt{6} & \sqrt{6}-1 & 2\sqrt{6} & 2 \\ \sqrt{6}-1 & 4+\sqrt{6} & 2 & 2\sqrt{6}+4 \end{pmatrix}.$$ 其中 $\bar{\varepsilon} = 5-2\sqrt{6}$.

总结第 3 节定理，可得下表:

判别式	1					$\varepsilon=5+\sqrt{6}$		
种	W	O_1	O_2	P	E	$W^\star$	$O_1^\star$	$P^\star$
类数	4	3	3	3	2	3	1	1

致谢 本文是作者在南京大学访问期间完成的，对秦厚荣教授的帮助表示感谢.

参考文献:

[1] SALAMON R. *Die Klassern geschlecht von* $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ *und* $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ *über* $Z[\sqrt{3}]$ [J]. Arch. Math., 1969, **2**: 523–530.
[2] HAN Shi-an. *The classes of some positive definite unimodular lattices over* $Z[\sqrt{3}]$ *and* $Z[\sqrt{6}]$ [J]. Chinese Ann. Math. Ser. B, 1988, **9**(1): 50–67.
[3] TAKADA I. *On the classification of definite unimodular lattices over the ring of integers in* $Q(\sqrt{2})$ [J]. Math. Japonica, 1985, **30**(3): 423–433.
[4] Scharlau R. *Unimodular lattices over real quadratic fields* [J]. Math. Z., 1994, **216**(3): 437–452.
[5] Wang Rui-qing. *The classification of positive definite unimodular lattice over* $Z[(1+\sqrt{21})/2]$ [J]. Chinese Quart. J. Math., 2000, **15**(2): 87–93.
[6] 王瑞卿. 实二次代数整数环上的正定幺模格的分类 [J]. 数学学报， 2002, **45**(1): 203–208.
WANG Rui-qing. *On the classification of positive definite unimodular lattices over the ring of real quadratic integers* [J]. Acta Math. Sinica, 2002, **45**(1): 203–208. (in Chinese)
[7] 王瑞卿. $Z[\sqrt{6}]$ 上的正定幺模格的分类 [J]. 数学学报， 2002, **45**(3): 583–588.
WANG Rui-qing. *On the classification of positive definite unimodular lattice over* $Z[\sqrt{6}]$ [J]. Acta Math. Sinica, 2002, **45**(3): 583–588. (in Chinese)
[8] O'MEARA O T. *Introduction to quadratic forms*[M]. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 117 Academic Press, Inc., Publishers, New York; Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.
[9] MIMURA Y. *On the class number of unit lattices over a ring of real quadratic integers* [J]. Nagoya Math. J., 1983, **92**: 89–106.

Classification of Definite unimodular lattices over $Q(\sqrt{6})$

WANG Rui-qing
(Department of Basic Science, Zhongyuan Institute of Technology, Zhengzhou 450007, China)

Abstract: Using the generalized adjacent lattices method, we get the classification of the genera of definite unimodular lattices with rank 4 over $Q(\sqrt{6})$ which are positive definite over one archimedean spot ∞_1 and negetive definite over another archimedean spot ∞_2.

Key words: definite unimodular lattice; adjacent lattice; genus;classification.