第25卷第4期 数学研究与评论 Vol.25, No.4
2005年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)04-0671-05 文献标识码: A

STML($\mathcal{L}$) 范畴的若干结果

张 杰[1], 郑崇友[2]
(1. 北方工业大学理学院, 北京 100041; 2. 首都师范大学数学系, 北京 100037)
(E-mail: jzhang263@263.net)

摘 要: 本文讨论了由 $\mathcal{L}$-smooth 拓扑分子格和 $\mathcal{L}$-smooth 连续的广义序同态所构成的 STML($\mathcal{L}$) 范畴的若干结果, 证明了范畴 STML($\mathcal{L}$) 是拓扑范畴, 范畴 TML 是范畴 STML($\mathcal{L}$) 的双反射满子范畴, 以及两个伴随定理.

关键词: $\mathcal{L}$-smooth 拓扑分子格; 连续; 广义序同态; 范畴; 伴随.
MSC(2000): 54A10, 18A40
中图分类: O189.1

1 引言及预备

文 [3] 在完全分配格上建立了拓扑分子格理论, [4] 在文 [3] 的基础上建立了 $\mathcal{L}$-smooth 拓扑分子格理论的基本框架, 从而得到了一个由 $\mathcal{L}$-smooth 拓扑分子格和 $\mathcal{L}$-smooth 连续的广义序同态所构成的 STML($\mathcal{L}$) 范畴. 众所周知, 拓扑分子格范畴 TML 保持了很多拓扑空间范畴的良好性质. 那么 $\mathcal{L}$-smooth 拓扑分子格范畴是否同样也具有这些良好性质, 本文就这一问题进行讨论, 证明了范畴 STML($\mathcal{L}$) 是拓扑范畴, 范畴 TML 是范畴 STML($\mathcal{L}$) 的双反射满子范畴, 以及两个伴随定理.

设 $L,\mathcal{L},L_i,\mathcal{L}_i, i=1,2$ 为完全分配格, $\top,\bot$ 分别表示 L 的最大元和最小元. $M(\mathcal{L}),P(\mathcal{L})$ 分别表示 $\mathcal{L}$ 的分子和素元之集. $\alpha(a)$ 表示 $a\in L$ 的极大集. 对于映射 $\mathcal{T}:L\to\mathcal{L}$, $\mathcal{T}_{[a]}=\{x\in L\mid \mathcal{T}(x)\geq a\}$, $\mathcal{T}^{[a]}=\{x\in L\mid a\notin\alpha(\mathcal{T}(x))\}$. $\vee\emptyset=\bot$, $\wedge\emptyset=\top$. 本文其它未说明的记号及概念来自 [1, 3, 4].

定义 1.1[4] 若映射 $\mathcal{T}:L\to\mathcal{L}$ 满足:

(i) $\mathcal{T}(\top_L)=\top_{\mathcal{L}}$;

(ii) $\forall A,B\in L, \mathcal{T}(A\vee B)\geq\mathcal{T}(A)\wedge\mathcal{T}(B)$;

(iii) $\forall\{A_i\mid i\in\Delta\}\subseteq L, \mathcal{T}(\bigwedge_{i\in\Delta}A_i)\geq\bigwedge_{i\in\Delta}\mathcal{T}(A_i)$.

则称 $\mathcal{T}$ 为 L 上的 $\mathcal{L}$-smooth 余拓扑, 称 $(L,\mathcal{T})$ 为 $\mathcal{L}$-smooth 拓扑分子格.

注 定义 1.1 中公理 (iii) 蕴含着 $\mathcal{T}(\bot_L)=\top_{\mathcal{L}}$.

命题 1.2[4] 设映射 $\mathcal{T}:L\to\mathcal{L}$, 则下列条件等价:

(1) $\mathcal{T}$ 是 L 上的 $\mathcal{L}$-smooth 余拓扑, (2) $\forall a\in\mathcal{L},\mathcal{T}_{[a]}$ 是 L 上的余拓扑,

(3) $\forall a\in M(\mathcal{L}),\mathcal{T}_{[a]}$ 是 L 上的余拓扑, (4) $\forall a\in L,\mathcal{T}^{[a]}$ 是 L 上的拓扑,

(5) $\forall a\in P(\mathcal{L}),\mathcal{T}^{[a]}$ 是 L 上的余拓扑.

收稿日期: 2003-03-31
基金项目: 北京市教委科研发展计划 (KM200510009009), 国家自然科学基金 (10371079)

令 $\Im(L)$ 为 L 上所有 $\mathcal{L}$-smooth 余拓扑之集. $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \Im(L)$, 定义 $\mathcal{T}_1 \preceq \mathcal{T}_2 \in \Im(L) \Leftrightarrow \forall A \in L, \mathcal{T}_1(A) \leq \mathcal{T}_2(A)$.

定理 1.3 (1) $(\Im(L), \preceq)$ 是完备格，且为 $\mathcal{L}^L$ 的子 $\bigwedge$- 半格.

(2) $\forall \mathcal{S} \in \mathcal{L}^L$, 存在包含 $\mathcal{S}$ 的最小 $\mathcal{L}$-smooth 余拓扑，即，$\bigwedge\{\mathcal{T} \in \Im(L) \mid \mathcal{S} \preceq \mathcal{T}\} \in \Im(L)$.

证明 (1) 显然，χ_L 是 $(\Im(L), \preceq)$ 中的元素，且为最大元. 对任意非空子集 $\{\mathcal{T}_i \mid i \in \Delta\} \subseteq \Im(L)$, 定义：$\forall A \in L, \mathcal{T}_0(A) = \bigwedge_{i\in\Delta} \mathcal{T}_i(A)$. 容易验证：$\mathcal{T}_0 \in \Im(L)$, 且为 $\{\mathcal{T}_i \mid i \in \Delta\}$ 在 $(\Im(L), \preceq)$ 中的下确界. 从而证明了 $(\Im(L), \preceq)$ 有最大元且对任意交封闭.

(2) 由 (1) 直接可得. □

定义 1.4[4] (1) 设 $\mathcal{S} \in \mathcal{L}^L$, $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ 是包含 $\mathcal{S}$ 的最小 $\mathcal{L}$-smooth 余拓扑，称 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ 的 $\mathcal{L}$-smooth 子基，称 $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ 为由 $\mathcal{L}$-smooth 子基 $\mathcal{S}$ 生成的 $\mathcal{L}$-smooth 余拓扑，记为 $\mathcal{T}_\mathcal{S} = \langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle$, 或简记为 $\mathcal{T} = \langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle$.

(2) 若 $\mathcal{T} = \langle\langle \mathcal{B} \rangle\rangle$, 且 $\forall \{A_i \mid i \in \Delta\} \subseteq L$, $\mathcal{B}(\bigvee_{i\in\Delta} A_i) \geq \bigwedge_{i\in\Delta} \mathcal{B}(A_i)$, 则称 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{T}$ 的 $\mathcal{L}$-smooth 基，记为 $\mathcal{T} = \langle \mathcal{B} \rangle$.

定义 1.5[3] 设 $(L_1, \mathcal{T}_1)$ 和 $(L_2, \mathcal{T}_2)$ 为 $\mathcal{L}$-smooth 拓扑分子格，$\mathcal{T}_i$ 的 $\mathcal{L}$-smooth 子基与 $\mathcal{L}$-smooth 基分别是 $\mathcal{S}_i, \mathcal{B}_i (i = 1, 2)$, $f : L_1 \to L_2$ 是广义序同态，简记 GOH. $\forall A \in L_2$,

(1) 若 $\mathcal{T}_1(f^{-1}(A)) \geq \mathcal{T}_2(A)$, 则称 $f : (L_1, \mathcal{T}_1) \to (L_2, \mathcal{T}_2)$ 是 $\mathcal{L}$-smooth 连续的广义序同态.

(2) 若 $\mathcal{T}_1(f^{-1}(A)) \geq \mathcal{S}_2(A)$ $(\mathcal{T}_1(f^{-1}(A)) \geq \mathcal{B}_2(A))$, 则称 $f : (L_1, \mathcal{T}_1) \to (L_2, \mathcal{T}_2)$ 是 $\mathcal{L}$-smooth 子基 (基) 连续的广义序同态.

(3) 若 $\mathcal{S}_1(f^{-1}(A)) \geq \mathcal{T}_2(A) (\mathcal{B}_1(f^{-1}(A)) \geq \mathcal{T}_2(A))$, 则称 $f : (L_1, \mathcal{T}_1) \to (L_2, \mathcal{T}_2)$ 是 $\mathcal{L}$-smooth 余子基 (基) 连续的广义序同态.

2 结果及证明

记 STML($\mathcal{L}$) 表示由完全分配格上的 $\mathcal{L}$-smooth 拓扑分子格和 $\mathcal{L}$-smooth 连续的广义序同态所构成的范畴；TML 表示由拓扑分子格和连续的广义序同态所构成的范畴; 对于每个 $a \in \mathcal{L}_0$, S_a-TML 是由 a-th $\mathcal{L}$-smooth 拓扑分子格 [4] 和连续的广义序同态所构成的范畴，CD 表示由完全分配格和广义序同态所构成的范畴，则有下面的定理.

定理 2.1 (1) 对于每个 $a \in \mathcal{L}_0$, S_a-TML 是 STML($\mathcal{L}$) 的一个满子范畴.

(2) 对于每个 $a \in \mathcal{L}_0$, TML 和 S_a-TML 是等距的.

(3) 对于每个 $a \in \mathcal{L}_0$, S_a-TML 是 STML($\mathcal{L}$) 的一个双反射满子范畴.

证明 (1) 和 (2) 由下列事实直接可得: 若 $\mathcal{F}$ 是一个 a-th $\mathcal{L}$-smooth 余拓扑，则 $(\mathcal{F}_{[a]})^a = \mathcal{F}$; 若 $\mathcal{F}$ 是一个余拓扑，则 $(\mathcal{F}^a)_{[a]} = \mathcal{F}$; 以及 [4] 中定理 2.4.

(3) 任取 TML 中的一个对象 $(L_1, \mathcal{F})$, 则对于每个 $a \in \mathcal{L}_0$, $(L_1, (\mathcal{F}_{[a]})^a)$ 是 S_a-TML 中的一个对象，并且映射 $i_{L_1} : (L_1, \mathcal{F}) \to (L_1, (\mathcal{F}_{[a]})^a)$ 是一个 $\mathcal{L}$-smooth 连续的 GOH.

设 $(L_2, \mathcal{F}^*)$ 是 S_a-TML 中的一个对象，且 $f : (L_1, \mathcal{F}) \to (L_2, \mathcal{F}^*)$ 是一个 $\mathcal{L}$-smooth 连续的 GOH. 只需证明 $f : (L_1, (\mathcal{F}_{[a]})^a) \to (L_2, \mathcal{F}^*)$ 是一个 $\mathcal{L}$-smooth 连续的 GOH 即可. 事实上，$\mathcal{F}^*(0_{L_2}) = \mathcal{F}(f^{-1}(0_{L_2})) = \mathcal{F}(0_{L_2}) = (\mathcal{F}_{[a]})^a(0_{L_2}) = (\mathcal{F}_{[a]})^a(f^{-1}(0_{L_2})) = 1$. 同理，$\mathcal{F}^*(1_{L_2}) = (\mathcal{F}_{[a]})^a(f^{-1}(1_{L_2}))$. 当 $\mathcal{F}^*(A) = 0$ 时，显然有，$\mathcal{F}^*(A) \leq (\mathcal{F}_{[a]})^a(f^{-1}(A))$. 若 $\mathcal{F}^*(A) = a \neq 0$, 则 $\mathcal{F}^*(A) \leq \mathcal{F}(f^{-1}(A))$ 蕴涵着 $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_{[a]}$, 因此有 $(\mathcal{F}_{[a]})^a(f^{-1}(A)) \geq a$. 所以 $f : (L_1, (\mathcal{F}_{[a]})^a) \to (L_2, \mathcal{F}^*)$ 是一个 $\mathcal{L}$-smooth 连续的 GOH. □

定理 2.2 TML 是 STML($\mathcal{L}$) 的一个双反射满子范畴.

定理 2.3 设 $f: L_1 \to L_2$ 为 GOH, $\mathcal{F}$ 为 L_1 上的一个 $\mathcal{L}$-smooth 余拓扑，则有下列结论成立：

(1) $\mathcal{F}_f = \mathcal{F} \circ f^{-1}$ 是 L_2 上的一个 $\mathcal{L}$-smooth 余拓扑.

(2) $f: (L_1, \mathcal{F}) \to (L_2, \mathcal{F}_f)$ 是 $\mathcal{L}$-smooth 连续的 GOH.

(3) $f: (L_1, \mathcal{F}) \to (L_2, \mathcal{F}^*)$ 是 $\mathcal{L}$-smooth 连续的 $\Leftrightarrow \mathcal{F}^* \leq \mathcal{F}_f$.

(4) $\mathcal{F}_f = \bigvee\{\mathcal{F}^* \in \mathcal{L}^{L_2} \mid (L_2, \mathcal{F}^*) \in ob(\mathrm{STML}(\mathcal{L})), f \in \mathrm{STML}(\mathcal{L})((L_1, \mathcal{F}), (L_2, \mathcal{F}^*))\}$.

(5) $f: (L_1, \mathcal{F}) \to (L_2, \mathcal{F}_f)$ 是 STML($\mathcal{L}$) 中的 final 态射.

(6) $f: (L_1, \mathcal{F}^*) \to (L_2, \mathcal{F}_f)$ 是 STML($\mathcal{L}$) 中的 final 态射 $\Leftrightarrow \mathcal{F}^* = \mathcal{F}_f$.

证明 (1) 和 (2) 可直接验证.

(3) $f: (L_1, \mathcal{F}) \to (L_2, \mathcal{F}^*)$ 是 $\mathcal{L}$-smooth 连续的 $\Leftrightarrow \forall A \in L_2, \mathcal{F}_f(A) = \mathcal{F}(f^{-1}(A)) \geq \mathcal{F}^*(A) \Leftrightarrow \mathcal{F}^* \leq \mathcal{F}_f$.

(4) 由 (2) 和 (3) 直接可得.

(5) 任取 $(L_3, \mathcal{F}^{**}) \in ob(\mathrm{STML}(\mathcal{L})), g: L_2 \to L_3$ 为任一 GOH, 且满足 $g \circ f: (L_1, \mathcal{F}) \to (L_3, \mathcal{F}^{**})$ 为一个 $\mathcal{L}$-smooth 连续的 GOH, 则有 $\mathcal{F}_f \circ g^{-1} = \mathcal{F} \circ f^{-1} \circ g^{-1} = \mathcal{F} \circ (g \circ f)^{-1} \geq \mathcal{F}^{**}$. 从而得 $g: (L_2, \mathcal{F}_f) \to (L_3, \mathcal{F}^{**})$ 为 $\mathcal{L}$-smooth 连续的.

(6) $\Leftarrow$ 由 (5) 可得.

$\Rightarrow$ 设 $f: (L_1, \mathcal{F}) \to (L_2, \mathcal{F}^*)$ 为 STML($\mathcal{L}$) 中的一个 final 态射. 由 f 的连续性可知，$\mathcal{F}_f \geq \mathcal{F}^*$. 在 (5) 的证明中, 取 $L_2 = L_3, \mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}_f, g = id$. 由 (2) 可知，$g \circ f = f: (L_1, \mathcal{F}) \to (L_2, \mathcal{F}_f)$ 是 $\mathcal{L}$-smooth 连续的. 再由 f 为 final 态射可知，$id: (L_2, \mathcal{F}^*) \to (L_2, \mathcal{F}_f)$ 是 $\mathcal{L}$-smooth 连续的. 因此，$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^* \circ id^{-1} \geq \mathcal{F}_f$, 即，$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_f$. □

定理 2.4 设 $\mathcal{V}$: STML($\mathcal{L}$)→ CD 是遗忘函子，则 STML($\mathcal{L}$) 关于 $\mathcal{V}$ 是 CD 上的一个拓扑范畴.

证明 由定理 2.3 得，每个映射 $f: (L_1, \mathcal{F}) \to L_2$ 有唯一的 final lift $f: (L_1, \mathcal{F}) \to (L_2, \mathcal{F}_f)$. 因为 $(\mathrm{STML}_{\mathcal{L}}(L_1), \preceq)$ 是完备的，所以，只需证明对于每个 $\mathcal{L}$-smooth 拓扑分子格 $(L_2, \mathcal{H})$, 映射 $f: L_1 \to (L_2, \mathcal{H})$ 有唯一的 initial lift $f: (L_1, \mathcal{F}) \to (L_2, \mathcal{H})$ 即可.

事实上，定义映射 $\mathcal{S}: L_1 \to \mathcal{L}$ 为：$\forall A \in L_1, \mathcal{S}(A) = \bigvee\{\mathcal{H}(B) \mid A = f^{-1}(B), B \in L_2\}$. 设 $\mathcal{F} = \langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle$, 即 $\mathcal{F}$ 是以 $\mathcal{S}$ 为子基，且为包含 $\mathcal{S}$ 的最粗 $\mathcal{L}$-smooth 余拓扑. $\forall B \in L_2$, 由于 $\mathcal{F}f^{-1}(B) \geq \mathcal{S}(f^{-1}(B) \geq \mathcal{H}(B)$, 则 $f: (L_1, \mathcal{F}) \to (L_2, \mathcal{H})$ 为 $\mathcal{L}$-smooth 连续的.

为了证明 f 是一 initial 态射，进一步考虑 $\mathcal{L}$-smooth 连续的 GOH $g: (L_3, \mathcal{G}) \to (L_2, \mathcal{H})$ 及 GOH $h: L_3 \to L_1$ 使得 $g = f \circ h$. $\forall A \in L_1$.

若 $\forall B \in L_2$, 都有 $A \neq f^{-1}(B)$, 则 $\mathcal{S}(A) = \bigvee\{\mathcal{H}(B) \mid A = f^{-1}(B), B \in L_2\} = \vee\emptyset = 0 \leq \mathcal{G}(h^{-1}(A))$;

若 $\exists B \in L_2$ 使得 $A = f^{-1}(B)$, 由 g 的 $\mathcal{L}$-smooth 连续性得 $\mathcal{G}(g^{-1}(B)) \geq \mathcal{H}$, 从而有 $\mathcal{G}(h^{-1}(A)) = \mathcal{G}(h^{-1}(f^{-1}(B))) = \mathcal{G}(g^{-1}(B)) \geq \mathcal{H}(B)$, 因此，$\mathcal{G}(h^{-1}(A)) \geq \vee\{\mathcal{H}(B) \mid A = f^{-1}(B), B \in L_2\} = \mathcal{S}(A)$. 这说明 $h: (L_3, \mathcal{G}) \to (L_1, \mathcal{F})$ 为 $\mathcal{L}$-smooth 子基连续的，故为 $\mathcal{L}$-smooth 连续的. 所以，f 为 initial 态射.

下证提升的唯一性. 由上面的证明进一步看出 $\mathcal{F}$ 是在 L_1 上使得 f 为 $\mathcal{L}$-smooth 连续的最粗的 $\mathcal{L}$-smooth 余拓扑，再由偏序 $\preceq$ 的反称性可知提升是唯一的. □

设 $k:\mathcal{L}_1\to\mathcal{L}_2$ 是一个 GOH, $(L,\mathcal{F})\in ob(\mathrm{STML}(\mathcal{L}_2))$. 定义映射 $\mathcal{K}(\mathcal{F}):L\to\mathcal{L}_1$ 为: $\forall A\in L$, $\mathcal{K}(\mathcal{F})(A)=k^{-1}(\mathcal{F}(A))$. 容易验证, $\mathcal{K}$ 是 L 上的一个 $\mathcal{L}_1$-smooth 余拓扑, 并且可以诱导出一个函子 $\Gamma_k:\mathrm{STML}(\mathcal{L}_2)\to\mathrm{STML}(\mathcal{L}_1)$ 如下:

$$\forall(L,\mathcal{F})\in ob(\mathrm{STML}(\mathcal{L}_2)),\ \Gamma_k((L,\mathcal{F}))=(L,\mathcal{K}(\mathcal{F})),\ \Gamma_k(f)=f.$$

定理 2.5 设 $k:\mathcal{L}_1\to\mathcal{L}_2$ 是一个 GOH, 则函子 $\Gamma_k:\mathrm{STML}(\mathcal{L}_2)\to\mathrm{STML}(\mathcal{L}_1)$ 存在右伴随.

证明 设 $\mathcal{F}$ 是 L 上的一个 $\mathcal{L}_1$-smooth 余拓扑, 则 $\mathcal{F}$ 可诱导出一个映射 $\mathcal{F}^*=k\circ\mathcal{F}:L\to\mathcal{L}_2$. 令

$$\Im_{\mathcal{F}}=\{\mathcal{G}\mid\mathcal{G}\text{ 为 }L\text{ 上的 }\mathcal{L}_2\text{-smooth 余拓扑, 且满足 }\forall A\in L,\mathcal{F}^*(A)\le\mathcal{G}(A)\}$$

定义函子 $\Omega_k:\mathrm{STML}(\mathcal{L}_1)\to\mathrm{STML}(\mathcal{L}_2)$ 如下:

$$\forall(L,\mathcal{F})\in ob(\mathrm{STML}(\mathcal{L}_1)),\ \Omega_k((L,\mathcal{F}))=(L,\mathcal{G}_{\mathcal{F}}),\text{其中 }\mathcal{G}_{\mathcal{F}}=\langle\langle\mathcal{F}^*\rangle\rangle=\wedge\Im_{\mathcal{F}};\ \Omega_k(f)=f.$$

为了证明 Ω_k 保持连续性, 任取 $\mathrm{STML}(\mathcal{L}_1)$ 中的一个态射 $f:(L_1,\mathcal{F}_1)\to(L_2,\mathcal{F}_2)$, 则有 $\forall A\in L_2,\mathcal{F}_2(A)\le\mathcal{F}_1\left(f^{-1}(A)\right)$, 从而有

$$\mathcal{F}_2^*(A)=k(\mathcal{F}_2(A))\le k(\mathcal{F}_1\left(f^{-1}(A)\right))=\mathcal{F}_1^*\left(f^{-1}(A)\right).$$

对于 $\forall\mathcal{G}\in\Im_{\mathcal{F}_1}$, 因为 $\mathcal{G}\left(f^{-1}(A)\right)\ge{\mathcal{F}_1}^*\left(f^{-1}(A)\right)\ge\mathcal{F}_2^*(A)$, 所以 $\mathcal{G}\left(f^{-1}(\_)\right)\in\Im_{\mathcal{F}_2}$. 因此, $\forall A\in L_2,\mathcal{G}_{\mathcal{F}_2}(A)\le\mathcal{G}_{\mathcal{F}_1}\left(f^{-1}(A)\right)$, 即, $f:(L_1,\mathcal{G}_{\mathcal{F}_1})\to(L_2,\mathcal{G}_{\mathcal{F}_2})$ 是一 $\mathcal{L}_2$-smooth 连续的. 这说明 $\Omega_k(f)$ 是 $\mathrm{STML}(\mathcal{L}_2)$ 中的态射.

任取 $(L,\mathcal{F})\in\mathrm{STML}(\mathcal{L}_2)$. $\forall A\in L$, 因为 $k\circ k^{-1}(\mathcal{F}(A))\le\mathcal{F}(A)$, 即, $k\circ\mathcal{K}(\mathcal{F})\le\mathcal{F}$, 所以 $\mathcal{F}\in\Im_{\mathcal{K}(\mathcal{F})}$. 进一步可得 $\mathcal{F}\ge\mathcal{G}_{\mathcal{K}(\mathcal{F})}$. 从而 $\forall A\in L,\mathcal{G}_{\mathcal{K}(\mathcal{F})}(A)\le\mathcal{F}(A)=\mathcal{F}(id^{-1}(A))$. 这说明

$$id_L:(L,\mathcal{F})\to\left(L,\mathcal{G}_{\mathcal{K}(\mathcal{F})}\right)=\Omega_k\circ\Gamma_k((L,\mathcal{F}))$$

是一 $\mathcal{L}_2$-smooth 连续的 GOH.

为了证明泛性质, 令 $f:(L_1,\mathcal{F}_1)\to\Omega_k((L_2,\mathcal{F}_2))=(L_2,\mathcal{K}(\mathcal{F}_2))$ 为 $\mathcal{L}_2$-smooth 连续的. 由于 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_2}\in\Im_{\mathcal{F}_2}$, 则有 $\forall A\in L_2,k\circ\mathcal{F}_2(A)\le\mathcal{G}_{\mathcal{F}_2}(A)\le\mathcal{F}_1\left(f^{-1}(A)\right)$. 进一步可得 $\mathcal{F}_2(A)\le k^{-1}\circ k\circ\mathcal{F}_2(A)\le k^{-1}\mathcal{F}_1\left(f^{-1}(A)\right)=\mathcal{K}(\mathcal{F}_1)\left(f^{-1}(A)\right)$. 即

$$f:\Gamma_k\left((L_1,\mathcal{F}_1)\right)=(L_1,\mathcal{K}(\mathcal{F}_1))\to(L_2,\mathcal{F}_2)$$

是一 $\mathcal{L}_1$-smooth 连续的. 因此, Ω_k 为 Γ_k 的右伴随. □

推论 2.6 设 $k:\mathcal{L}_1\to\mathcal{L}_2$ 是一个同构 GOH, 则范畴 $\mathrm{STML}(\mathcal{L}_1)$ 与 $\mathrm{STML}(\mathcal{L}_2)$ 同构.

设 $\mathcal{F}$ 为 L 上一个的 $\mathcal{L}$-smooth 余拓扑, 令 $\eta_{\mathcal{F}}:=\{A\in L\mid\mathcal{F}(A)=1\in\mathcal{L}\}$, 则 $\eta_{\mathcal{F}}$ 为 L 上的一个余拓扑. 定义函子 $\Re:\mathrm{STML}(\mathcal{L})\to\mathrm{TML}$ 如下:

$$\forall(L,\mathcal{F})\in ob(\mathrm{STML}(\mathcal{L})),\ \Re((L,\mathcal{F}))=(L,\eta_{\mathcal{F}});\ \ \Re(f)=f.$$

有下面定理.

定理 2.7 函子 $\Re:\mathrm{STML}(\mathcal{L})\to\mathrm{TML}$ 存在右伴随.

证明 设 η 是 L 上的一个余拓扑. 令 $\hbar_\eta = \{\mathcal{F} \in \mathrm{STML}_{\mathcal{L}}(L) \mid \forall A \in \eta, \mathcal{F}(A) = 1\}$, 由 $\mathrm{STML}_{\mathcal{L}}$(L) 的完备性可知，$\hbar_\eta$ 关于 $\preceq$ 的下确界存在，记为 $\mathcal{T}_\eta$. 由 $\mathcal{T}_\eta$ 和 $\eta_{\mathcal{F}}$ 的定义容易验证，$\mathcal{T}_\eta \in \hbar_\eta$, 且 $\mathcal{T}_{\eta_{\mathcal{F}}} \preceq \mathcal{F}$ 成立. 因此，$id_L : (L, \mathcal{F}) \to (L, \mathcal{T}_{\eta_{\mathcal{F}}})$ 是一个 $\mathcal{L}$-smooth 连续的 GOH.

定义函子 $\Im : \mathrm{TML} \to \mathrm{STML}(\mathcal{L})$ 如下：

$$\forall (L, \eta) \in ob(\mathrm{TML}),\ \Im((L, \eta)) = (L, \mathcal{T}_\eta),\ \ \Im(f) = f,$$

则 $id_L : (L, \mathcal{F}) \to (L, \mathcal{T}_{\eta_{\mathcal{F}}}) = \Im \circ \Re((L, \eta))$ 是 $\mathcal{L}$-smooth 连续的.

为了证明 $\Im$ 保持连续性，任取 TML 中的态射 $f : (L_1, \eta_1) \to (L_2, \eta_2)$ 由 f 的连续性可得，$\forall A \in \eta_2 \Rightarrow f^{-1}(A) \in \eta_1$. 因此，$\forall \mathcal{F} \in \hbar_{\eta_1}$, 有 $\mathcal{T}_{\eta_1} \preceq \mathcal{F}$, 从而得 $\mathcal{F}\left(f^{-1}(A)\right) \geq \mathcal{T}_{\eta_1}\left(f^{-1}(A)\right) = 1$, 即 $\mathcal{F}\left(f^{-1}(A)\right) = 1$. 所以 $\mathcal{F}\left(f^{-1}(\_)\right) \in \hbar_{\eta_2}$. 又因为 $\mathcal{T}_{\eta_1} \in \hbar_{\eta_1}$, $\mathcal{T}_{\eta_2} \in \hbar_{\eta_2}$, 所以 $\forall A \in L_2, \mathcal{T}_{\eta_1}\left(f^{-1}(A)\right) \geq \mathcal{T}_{\eta_2}(A)$. 这就证明了

$$f : \Im \circ \Re\left((L_1, \eta_1)\right) = (L_1, \mathcal{T}_{\eta_1}) \to (L_2, \mathcal{T}_{\eta_2}) = \Im \circ \Re\left((L_2, \eta_2)\right).$$

是 $\mathcal{L}$-smooth 连续的.

下面证明泛性质. 任取 STML($\mathcal{L}$) 中的一个态射，$f : (L_1, \mathcal{F}) \to \Im(L_2, \eta) = (L_2, \mathcal{T}_\eta)$. 由 f 的连续性及 $\mathcal{T}_\eta$ 的定义可得：$\forall A \in \eta \subseteq L_2, \mathcal{F}(f^{-1}(A)) = 1$, 即，$f^{-1}(A) \in \eta_{\mathcal{F}}$. 故得

$$f : \Re\left(L_1, \mathcal{F}\right) = \left(L_1, \eta_{\mathcal{F}}\right) \to \left(L_2, \eta\right)$$

是一连续的 GOH. 因此，$\Im$ 为 $\Re$ 的右伴随. □

参考文献:

[1] ADÁMEK J, HERRLICH H, STRECKER G E. *Abstract and Concrete Categories* [M]. John Wiley & Sons, New York, 1990.

[2] HÖHLE U, RODABAUGH S E. *Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology, and Measure Theory* [M]. The Handbooks of Fuzzy Sets Series, 3. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1999.

[3] G. J. Wang, *Theory of topological molecular lattices* [J]. Fuzzy Sets and Syetems, 1992, **47**: 351–376.

[4] ZHANG Jie, ZHENG Chong-you. *Lattice valued smooth topological molecular lattices* [J]. Journal of Fuzzy Mathematics, 2002, **10**(2): 411–421.

Some Results on Category STML($\mathcal{L}$)

ZHANG Jie[1], *ZHENG Chong-you*[2]

(1. College of Science, North China University of Technology, Beijing 100041, China;
2. Dept. of Math., Capital Normal University, Beijing 100037, China)

Abstract: In this paper, some results of the category **STML($\mathcal{L}$)** which consists of $\mathcal{L}$-smooth topological molecular lattices and $\mathcal{L}$-smooth continuous generalized order homomorphism are discussed. We prove that the category STML($\mathcal{L}$) is a topological and that the category TML is a bireflectly full subcategory of STML($\mathcal{L}$). Two adjoint theorems are also proved.

Key words: $\mathcal{L}$-smooth topological molecular lattices; continuous; generalized order homomorphism; category; adjoint.