第25卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.25, No.4
2005年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)04-0676-07 文献标识码: A

交换偏序半群的偏序扩张

谢祥云
(五邑大学数学物理系, 广东 江门 529020)
(E-mail: xyxie@wyu.edu.cn)

摘 要: 设 $(S,\cdot,\le)$ 为偏序可换半群, 本文给出将 S 的偏序 $\le$ 扩张为满足一定条件的偏序 $\le^*$ 的充要条件. 特别地, 如果 $(S,\cdot,\le)$ 为可消偏序可换幺半群, 本文给出将 S 的偏序 $\le$ 扩张为可消偏序 $\le^*$ 且 S 的每个元素在 $\le^*$ 下均在正锥中的充要条件. 本文还给出将偏序可换幺半群 S 的偏序 $\le$ 扩张为 $\le^*$ 且使得 S 的有限元素子集在 $\le^*$ 下是一条链的充要条件.

关键词: 偏序半群; 偏序扩张; 可消偏序.
MSC(2000): 06F05, 20M10
中图分类: O152.7

1 引 言

称 $(S,\cdot,\le)$ 为偏序半群 [6], 如果 $(S,\cdot)$ 是半群 [5], $(S,\le)$ 是偏序集且偏序对乘法运算是相容的, 即 $(\forall a,b,c\in S)\ a\le b\Rightarrow ca\le cb, ac\le bc$. 半群 S 称为可换的, 如果满足: $ab=ba, \forall a,b\in S$. 偏序半群 $(S,\cdot,\le)$ 称为是可消的, 如果

$$(\forall a,b,c\in S)\ ca\le cb\Rightarrow a\le b;\ ac\le bc\Rightarrow a\le b.$$

如果 S 中存在一个元素 $1\in S$ 使得 $1\cdot a=a\cdot 1=a, \forall a\in S$, 1 称为 S 的单位元. 有单位元的半群称为幺半群. 如果 S 中不含单位元, 我们可以在 S 上并以 1 使其成为幺半群 $S\cup\{1\}$, 记为 S^1. 设 $(S,\cdot)$ 是半群, $(S,\cdot)$ 上的以下二元关系:

$$(\forall x,y\in S)\ (x,y)\in\mathcal{L}\Longleftrightarrow S^1x=S^1y;\ \ (x,y)\in\mathcal{R}\Longleftrightarrow xS^1=yS^1$$
$$(\forall x,y\in S)\ (x,y)\in\mathcal{J}\Longleftrightarrow S^1xS^1=S^1yS^1;\ \ \mathcal{D}=\mathcal{L}\circ\mathcal{R}=\mathcal{R}\circ\mathcal{L}=\mathcal{R}\vee\mathcal{L}.$$

称为 S 的格林关系 [5]. 设 S 是带, 即 S 中每个元是幂等的, 则

$$(e,f)\in\mathcal{D}\Longleftrightarrow e=efe, f=fef.$$

如果 $\le^*$ 为 S 上的另一个偏序关系, 且 $a\le b\Rightarrow a\le^* b$, $\le^*$ 称为 $\le$ 的扩张.

一个代数系统如果同时拥有代数结构和偏序结构, 偏序结构的扩张一直是人们关注的问题 [2], 设 $(G,\cdot,\le)$ 是偏序群, G 称为 O^*- 群, 如果群 G 的每个偏序可以全序扩张为 $\le^*$. 交换群 G 是 O^*- 群当且仅当它是无扭的 [9] (torsion-free). 一般偏序半群的序扩张问题的研究, 由于半

收稿日期: 2003-10-22
基金项目: 国家自然科学基金 (103410020), 广东省自然科学基金 (011471), 广东省教育厅基金 (Z03070) 和广东省教育厅"千百十工程" 优秀人才基金 (02050).

群没有消去律等，难度较大. Nakada[3,4] 讨论过可消偏序交换半群的全序扩张问题，Dubreil-Jacotin[1] 给出了一个幺带可全序化的充要条件. 设半群 S 是半群 K 关于半群 I 的扩张，且 K 和 I 分别是偏序半群，其偏序分别为 $\leq_1, \leq_2$. Hulin[7,8] 给出了扩张为 S 上的偏序的充要条件. 本文我们在更一般的情况下讨论偏序半群的偏序扩张问题，得出一系列有用的特例.

设 $(S,\cdot,\leq)$ 是可换的偏序幺半群. 令 $P_1=\{x\in S\mid x\geq 1\}$, $P=\{x\in S\mid (\exists a,b\in S)\ b\leq a, xb=a\}$. P_1 称为 $(S,\cdot,\leq)$ 的正锥 [2] (positive cone), P 是 S 的偏序幺子半群且 $P_1\subseteq P$. 如果 $(S,\cdot,\leq)$ 是偏序群，则 $P=P_1$. 一般情况下 $P_1\neq P$. 例如，设 S 是非负整数集关于数的普通乘法所成的半群， S 上的序关系定义为： $n\leq m \Leftrightarrow m,n\neq 0, n|m$ 或 $m=n=0$. S 关于该序关系是可换的偏序幺半群， $P\neq\{0\}$, 但是 $P_1=\{x\in S\mid x\geq 0\}=\{0\}$.

以下我们用 Z^+ 表示正整数集， $I=\{1,2,\cdots,i\}$, $i\in Z^+$. 设 $M=\{1,2,\cdots,m\}$, $N=\{1,2,\cdots,n\}$. 我们用 $M+N$ 表示集合 $\{1,2,\cdots,m,m+1,\cdot,m+n\}$. $\mathrm{Map}(M,N)$ 表示从 M 到 N 的所有映射集合.

2 可换的偏序幺半群的偏序扩张

定理 2.1 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是可换的偏序幺半群， T 是 S 的包含 P 的子幺半群. 则可将 $\leq$ 扩张为 $\leq^*$ 使得 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是可换的偏序幺半群且 $T\subseteq\{s\in S\mid s\geq^* 1\}$ 当且仅当 $(\forall p,q\in T)\ x\geq xpq\Rightarrow x=xp$.

证明 *必要性*. 设 $xpq\leq x, p,q\in T$. 因为 $\leq^*$ 是 $\leq$ 的扩张，所以 $xpq\leq^* x$. 又 $p,q\in T\subset\{s\mid s\geq^* 1\}$ 得 $p\geq^* 1, q\geq^* 1$. 因此 $x\geq^* xpq\geq^* xp\geq^* x$, 即 $x=xp$.

充分性. 定义 S 上的序关系 $\leq^*$ 如下：

$$(\forall x,y\in S)\ x\leq^* y \Longleftrightarrow (\exists p\in T)\ xp\leq y.$$

则容易看出 $\leq^*$ 是自反的. 设 $x\leq^* y, y\leq^* z$, 则存在 $p,q\in T$ 使得 $xp\leq y, yq\leq z$. 因此 $x(pq)\leq z$. 因为 T 为 S 的子幺半群得 $x\leq^* z$, 所以 $\leq^*$ 是传递的.

进一步地，设 $x\leq^* y, y\leq^* x$, 则存在 $p,q\in T$ 使得 $xp\leq y, yq\leq x$. 因此 $xpq\leq yq\leq x$, 由假设得 $xp=x$, 因此 $x\leq y$. 同理从 $ypq\leq xp\leq y$ 可得 $y\leq x$. 因此 $x=y$, 即 $\leq^*$ 是反对称的. 由 $\leq$ 是相容的，得 $\leq^*$ 也是相容的. 因为 $1\in T$, 所以 $(\forall x,y\in S)\ x\leq y\Rightarrow x\leq^* y$ 且如果 $x\in T, x\geq^* 1$, 则 $T\subseteq\{s\mid s\geq^* 1\}$. □

在上定理中，设序关系 $\leq$ 还有另一个扩张 $\leq_1$ 使得 $(S,\cdot,\leq_1)$ 是一个偏序半群且 $T\subseteq\{x\mid x\geq_1 1\}$, 则 $\leq_1$ 是 $\leq^*$ 的扩张. 事实上，设 $x\leq^* y$, 则存在 $p\in T$ 使得 $xp\leq y$, 即 $xp\leq_1 y$. 由 $p\geq_1 1$ 得出 $x\leq_1 y$. 故就以上扩张意义下 $\leq^*$ 是 $\leq$ 的最小扩张.

推论 2.1 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是可换的偏序幺半群. 则可将 $\leq$ 扩张为 $\leq^*$ 使得 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是可换的偏序幺半群且 $P\subseteq\{s\in S\mid s\geq^* 1\}$ 当且仅当 $(\forall p,q\in P)\ x\geq xpq\Rightarrow x=xp$.

推论 2.2 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是可换的偏序幺半群. 则可将 $\leq$ 扩张为 $\leq^*$ 使得 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是可换的偏序幺半群且 $(\forall s\in S)\ s\geq^* 1$ 当且仅当 $(\forall p,q,x\in S)\ x\geq xpq\Rightarrow x=xp$.

推论 2.3 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是可换的可消偏序幺半群. 则可将 $\leq$ 扩张为 $\leq^*$ 使得 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是可换的可消偏序幺半群且 $(\forall s\in S)\ s\geq^* 1$ 当且仅当 $(\forall p,q\in S)\ 1\geq pq\Rightarrow 1=p=q$.

证明 *充分性*. 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是可换的可消偏序幺半群且 $(\forall a,b,x\in S)\ x\geq xab$. 则 $1\geq ab$. 由假设 $1=a=b$. 因此 $x=xa$. 根据推论 2.2, 可将 $\leq$ 扩张为定理 1 中定义的 $\leq^*$ 使得 $(S,\cdot,\leq^*)$

是可换的偏序幺半群且 $(\forall s\in S)\ s\geq^* 1$. 下证 $\leq^*$ 是可消偏序的. 设 $(\forall x,y,z\in S)\ xz\leq^* yz$. 由 $\leq^*$ 的定义, 存在 $a\in S$ 使得 $xza\leq yz$. 由 $\leq$ 是可消偏序且 $(S,\cdot,\leq)$ 是可换的, 得 $xa\leq y$. 因此 $x\leq^* y$.

必要性. 设 $(\forall p,q\in S) 1\geq pq$. 则 $(\forall p,q\in S)\ 1\geq^* pq\geq^* 1\Rightarrow pq=1$. 从而

$$(\forall p,q\in S)\ 1\geq^* p,q\geq^* pq=1\Rightarrow p=q=1.$$

在上推论 2.3 中, $\leq^*$ 是 $\leq$ 是可消偏序这个条件不可以弱化为假设 $(S,\cdot,\leq)$ 是可换的偏序幺半群. 例如设 $(S,\cdot,\leq)$ 为非负整数半群, $\leq$ 定义如下: $4>5>6\cdots>\cdots$ 则 $(\forall p,q\in S)\ 0\geq p+q\Rightarrow p=q=1$. 如果推论 2.3 成立, 我们可将 $\leq$ 扩张为 $\leq^*$ 使得 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是可换的偏序幺半群且 $(\forall s\in S)\ s\geq^* 1$. 因此 $1\geq^* 0\Rightarrow 5\geq^* 4$ 和 $\leq^*$ 是 $\leq$ 的扩张矛盾.

3 可换偏序幺半群的有限全序扩张

定理 3.1 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是可换的偏序半群且 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 是 S 的有限列. 则可将 $\leq$ 扩张为 $\leq^*$ 使得 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是可换偏序半群且 $a_1\leq^* a_2\leq^*\cdots\leq^* a_n$ 当且仅当 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 满足:

对任意的有限列 $\{x_i\}_{i=1}^m\subseteq S^1$, 如果存在映射 $\alpha,\sigma\in \mathrm{Map}(M,N)$ 使得 $\alpha(i)<\sigma(i)$, 且

$$x_0\leq x_1a_{\alpha(1)},x_1a_{\sigma(1)}\leq x_2a_{\alpha(2)},\cdots,x_ma_{\sigma(m)}\leq x_0,$$

则 $x_0=x_ia_{\alpha(i)}=x_ia_{\sigma(i)}$.

证明 *充分性*. 定义 S 上的二元关系 $\leq^*$ 如下: $(\forall x,y\in S)\ x\leq^* y$ 当且仅当 $x\leq y$ 或存在一个有限列 $\{x_i\}_{i=1}^m\subseteq S^1$ 和映射 $\alpha,\sigma\in\mathrm{Map}(M,N)$ 使得 $\alpha(i)<\sigma(i)$, 且

$$x\leq x_1a_{\alpha(1)},x_1a_{\sigma(1)}\leq x_2a_{\alpha(2)},\cdots,x_ma_{\sigma(m)}\leq y.$$

显然 $\leq^*$ 是 $\leq$ 的扩张. 以下我们需验证 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是偏序半群.

1) $\leq^*$ 是自反的. 显然.

2) $\leq^*$ 是传递的. 设 $x\leq^* y,y\leq^* z$. 如果 $x\leq y$ 或 $y\leq z$, 均有 $x\leq^* z$. 下设 $x\leq y$ 和 $y\leq z$ 均不成立. 由 $\leq^*$ 的定义, 存在两个有限列 $\{x_i\}_{i=1}^m$, $\{z_i\}_{i=1}^k\subseteq S^1$, 以及 $\alpha,\sigma\in\mathrm{Map}(M,N)$, $\beta,\tau\in\mathrm{Map}(K,N)$ 使得 $\alpha(i)<\sigma(i)$, $\beta(i)<\tau(i)$, 且

$$x\leq x_1a_{\alpha(1)},x_1a_{\sigma(1)}\leq x_2a_{\alpha(2)},\cdots,x_ma_{\sigma(m)}\leq y,$$

$$y\leq z_1a_{\beta(1)},z_1a_{\tau(1)}\leq z_2a_{\beta(2)},\cdots,z_ka_{\tau(k)}\leq z.$$

取 $y_i=x_i,1\leq i\leq m$, $y_i=z_{i-m},m<i\leq m+k$. 定义 $\alpha^*,\sigma^*\in\mathrm{Map}(M+K,N):$

$$\alpha^*(i)=\alpha(i),\sigma^*(i)=\sigma(i),1\leq i\leq m;$$

$$\alpha^*(i)=\beta(i-m),\sigma^*(i)=\tau(i-m),m<i\leq m+k.$$

则

$$x\leq y_1a_{\alpha^*(1)},y_1a_{\sigma^*(1)}\leq y_2a_{\sigma^*(2)},\cdots,y_ma_{\sigma^*(m)}$$
$$\leq y\leq y_{1+m}a_{\alpha^*(1+m)},\cdots,y_{m+k}a_{\alpha^*(m+k)}\leq z.$$

故 $x \leq^* z$.

3) $\leq^*$ 是反对称的. $x \leq^* y, y \leq^* x$. 在 2) 的证明中将 z 换成 x, 由假设, 取 $x = x_0$. 则 $x = x_i a_{\alpha^*(i)} = x_i a_{\sigma^*(i)} = y$.

4) $\leq^*$ 关于 S 的乘法是相容的. 设 $x \leq^* y$. 对 $\forall z \in S$, 我们分两种情形来讨论:

A) 如果 $x \leq y$, 则 $zx \leq zy, xz \leq yz$. 因此 $zx \leq^* zy, xz \leq^* yz$.

B) x 与 y 不可比较, 存在一个有限列 $\{x_i\}_{i=1}^m \subseteq S^1$ 和映射 $\alpha, \sigma \in Map(M, N)$ 使得 $\alpha(i) < \sigma(i)$, 且

$$x \leq x_1 a_{\alpha(1)}, x_1 a_{\sigma(1)} \leq x_2 a_{\alpha(2)}, \cdots, x_m a_{\sigma(m)} \leq y.$$

因此

$$zx \leq zx_1 a_{\alpha(1)}, zx_1 a_{\sigma(1)} \leq zx_2 a_{\alpha(2)}, \cdots, zx_m a_{\sigma(m)} \leq zy.$$

取 $y_i = zx_i, i = 1, 2, \cdots, m$. 上式说明存在一个有限列 $\{x_i\}_{i=1}^m \subseteq S^1$ 和映射 $\alpha, \sigma \in Map(M, N)$ 使得 $\alpha(i) < \sigma(i)$, 且

$$zx \leq zx_1 a_{\alpha(1)}, zx_1 a_{\sigma(1)} \leq zx_2 a_{\alpha(2)}, \cdots, zx_m a_{\sigma(m)} \leq y.$$

由 $\leq^*$ 的定义得 $zx \leq^* zy$.

综上所证, $(S, \cdot, \leq^*)$ 是偏序半群. 进一步地, 取 $m = 1$, 即含有一个元素 1 的有限列 $\{1\}_{i=1}^1 \subseteq S^1$, 令 $\alpha(1) = 1, \sigma(1) = 2$. 则 $\alpha, \sigma \in \mathrm{Map}(M, N)$. 因为 $a_1 \leq 1 \cdot a_{\alpha(1)}, 1 \cdot a_{\alpha(2)} \leq a_2$. 由 $\leq^*$ 的定义得 $a_1 \leq^* a_2$. 类似地通过定义 $\alpha(1) = i, \sigma(1) = i + 1$, 我们可以证明 $a_i \leq^* a_{i+1}, i = 1, 2, \cdots, n - 1$.

必要性. 由于 $a_i \leq^* a_{i+1}, i = 1, 2, \cdots, n - 1$ 且 $\leq^*$ 是 $\leq$ 的扩张. 如果

$$x_0 \leq x_1 a_{\alpha(1)}, x_1 a_{\sigma(1)} \leq x_2 a_{\alpha(2)}, \cdots, x_m a_{\sigma(m)} \leq x_0,$$

则

$$x_0 \leq^* x_1 a_{\alpha(1)}, x_1 a_{\sigma(1)} \leq^* x_2 a_{\alpha(2)}, \cdots, x_m a_{\sigma(m)} \leq^* x_0,$$

因此, $x_0 = x_i a_{\alpha(i)} = x_i a_{\sigma(i)}$. □

在上定理 3.1 中, $\leq^*$ 是使得 $a_1 \leq^* a_2 \leq^* \cdots \leq^* a_n$ 的序关系 $\leq$ 的极小扩张. 事实上, 设还有另一个扩张 $\leq_1$ 使得 $(S, \cdot, \leq_1)$ 是一个偏序半群且 $a_1 \leq_1 a_2 \leq_1 \cdots \leq_1 a_n$. 设 $x \leq^* y$, 则 $x \leq y$ 或存在一个有限列 $\{x_i\}_{i=1}^m \subseteq S^1$ 和映射 $\alpha, \sigma \in \mathrm{Map}(M, N)$ 使得 $\alpha(i) < \sigma(i)$, 且

$$x \leq x_1 a_{\alpha(1)}, x_1 a_{\sigma(1)} \leq x_2 a_{\alpha(2)}, \cdots, x_m a_{\sigma(m)} \leq y.$$

因此

$$x \leq_1 x_1 a_{\alpha(1)} \leq_1 x_1 a_{\sigma(1)} \leq_1 x_2 a_{\alpha(2)} \leq_1 \cdots \leq_1 x_m a_{\sigma(m)} \leq_1 y,$$

当然得出 $x \leq_1 y$. 故就以上扩张意义下 $\leq^*$ 是 $\leq$ 的极小扩张.

推论 3.2 设 $(S, \cdot, \leq)$ 是可换的偏序半群且 $a \neq b \in S$. 则可将 $\leq$ 扩张为 $\leq^*$ 使得 $(S, \cdot, \leq^*)$ 是可换的偏序半群且 $a <^* b$ 当且仅当对任意的有限列 $\{x_i\}_{i=0}^m \subseteq S^1$ 使得 $x_0 \leq ax_1, bx_1 \leq ax_2, \cdots, bx_m \leq x_0$. 则 $x_0 = ax_i = bx_i, 1 \leq i \leq m$.

证明 在定理 3.1 中, 取 $n = 2, N = \{1, 2\}, a = a_1, b = a_2$, $\alpha, \sigma \in \mathrm{Map}(M, N)$ 使得 $\alpha(i) = 1, \sigma(i) = 2, i = 1, 2, \cdots, n$. 上定理 3.1 就变成该推论的形式. □

推论 3.3 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是可消的可换偏序半群且 $a\neq b\in S$. 则可将 $\leq$ 扩张为 $\leq^*$ 使得 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是可换偏序半群且 $a\leq^* b$ 当且仅当 $(\forall n\in Z^+)(\forall x\in S)$ xb^n 不小于 xa^n.

证明 *充分性*. 设有有限列 $\{x_i\}_{i=0}^m\subseteq S^1$ 使得 $x_0\leq ax_1, bx_1\leq ax_2,\cdots,bx_m\leq x_0$. 则

$$b^nx_0\leq ab^nx_1\leq b^{n-1}a^2x_2\leq b^{n-2}a^3x_3\leq,\cdots,\leq ba^nx_m\leq a^nx_0.$$

因此 $b^nx_0\leq a^nx_0$, 和假设矛盾，即不存在上述有限列. 根据推论 3.2, 存在 S 上的 $\leq$ 的序扩张 $\leq^*$ 使得 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是可换偏序半群且 $a<^* b$.

必要性. 设存在 S 上的 $\leq$ 的序扩张 $\leq^*$ 使得 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是可换偏序半群且 $a<^* b$. 如果 $(\forall n\in Z^+)(\forall x\in S)$ $xb^n\leq xa^n$. 则 $xb^n\leq^* xa^n$ 且 $xa^n\leq^* xb^n$. 因此 $xa^n=xb^n$. 因为 S 是可消的，得 $a^n=b^n$. 又 $a^n=aa^{n-1}\leq^* ba^{n-1}\leq\cdots\leq^* b^n=a^n$. 由此推出 $a^{n-1}a=a^{n-1}b\Rightarrow a=b$. 矛盾. □

设 $(S,\cdot,\leq)$ 是可换可消偏序半群，在上定理 3.1 中， $\leq^*$ 不一定是可消偏序的. 例如，设 $(S,\cdot,\leq)$ 是非负整数集关于加法及平凡序构成的序半群，当然 $\leq$ 是 S 上的可消偏序，如果我们能扩张 $\leq$ 到 $\leq^*$ 使得 $2<^* 3$, 从而只要 $2\leq_1 n<_1 m$, 一定有 $n<^* m$, 这里 $\leq_1$ 是整数集上的通常的序关系. 但是 $\leq^*$ 不是 S 上的可消序关系. 事实上 $1+1\leq^* 1+2$, 但是 1 不小于 2.

根据推论 3.3, 我们有

推论 3.4 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是可消的可换偏序幺半群且 $a\in S$. 则可将 $\leq$ 扩张为 $\leq^*$ 使得 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是可换偏序幺半群且 $1<^* a$ 当且仅当 $(\forall n\in Z^+)(\forall x\in S)$ xa^n 不小于 x.

推论 3.5 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是可消可换偏序半群且 $a\neq b\in S$. 则可将 $\leq$ 扩张为 $\leq^*$ 使得 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是可换偏序半群且 $a<^* b$ 当且仅当 $(\forall n\in Z^+)$ b^n 不小于 a^n. 进一步地，我们可以选择 $\leq^*$ 使得它也是可消偏序的.

证明 *充分性*. 定义 S 上的序关系 $\leq^*$ 如下:

$$(\forall x,y\in S)\ (x,y)\in\leq^*\Longleftrightarrow(\exists n\geq 0)\ xb^n\leq ya^n.$$

显然 $\leq^*$ 是 $\leq$ 的扩张，因为 $(\forall x,y\in S)$ $(x,y)\in\leq\Rightarrow xb^0\leq ya^0\Rightarrow(x,y)\in\leq^*$. 以下我们需验证 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是偏序半群.

1) $\leq^*$ 是自反的. 显然.

2) $\leq^*$ 是传递的. 设 $x,y,z\in S$.

$$\begin{aligned}x\leq^* y,y\leq^* z&\Rightarrow(\exists n,m\in N)\ xb^n\leq ya^n,yb^m\leq za^m\\&\Rightarrow xb^{m+n}\leq ya^nb^m\leq za^{m+n}.\end{aligned}$$

故 $x\leq^* z$.

3) $\leq^*$ 是反对称的. $x\leq^* y,y\leq^* x$. 在 2) 的证明中将 z 换成 x, 相应的不等式为 $xb^{m+n}\leq ya^nb^m\leq xa^{m+n}$. 如果 $m=n=0$, 则 $x\leq y\leq x$, 因此 $x=y$. 如果 $m+n>0$, 因为 $(S,\cdot,\leq)$ 有消去律，所以 $b^{m+n}\leq a^{m+n}$, 和已知矛盾. 因此 $x=y$.

4) $\leq^*$ 关于 S 的乘法是相容的且 $\leq^*$ 也是可消偏序. 我们需验证 $\leq^*$ 是 S 上的可消偏序. 事实上:

$$cx\leq^* cy\Rightarrow(\exists n\geq 0)cxb^n\leq cya^n\Rightarrow xb^n\leq ya^n\Rightarrow x\leq^* y.$$

必要性. 由推论 3.3 及 $\leq^*$ 是可消偏序的假设可得出. □

根据推论 3.5, 我们有

推论 3.6 设 $(G,\cdot,\leq)$ 是可换偏序群且 $a\in S$. 则可将 $\leq$ 扩张为 $\leq^*$ 使得 $(G,\cdot,\leq^*)$ 是可换偏序群且 $1\leq^* a$ 当且仅当 $(\forall n\in Z^+)$ a^n 不小于 1.

推论 3.7[3] 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是可消偏序可换半群且 a 和 b 不可比较. 则存在 S 上的序关系 $\leq$ 的可消序扩张 $\leq^*$ 使得 $a<^* b$ 当且仅当 $(\forall n\in Z^+)$ $y^n\leq x^n\Rightarrow y\leq x$.

证明 *充分性*. 设 $(\forall n\in Z^+)$ $y^n\leq x^n\Rightarrow y\leq x$. 则在推论 3.5 中 $(\forall n\in Z^+)$ b^n 不小于 a^n 成立. 否则 $b\leq a$ 和假设矛盾. 因此存在 S 上的序扩张 $\leq^*$ 使得 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是可换偏序半群且

$$cx\leq^* cy\Rightarrow(\exists n\geq 0)cxb^n\leq cya^n\Rightarrow xb^n\leq ya^n\Rightarrow x\leq^* y.$$

必要性. 设 $(\forall n\in Z^+)$ $y^n\leq x^n$ 推出 y 不小于 x. 则 y 和 x 不可比较或 $x<y$. 如果 $x<y$. 则

$$\begin{aligned}xy^{n-1}\leq y^n\leq x^n\Rightarrow y^{n-1}\leq x^{n-1}\Rightarrow xy^{n-2}\leq y^{n-1}\leq x^{n-1}\\ \Rightarrow y^{n-2}\leq x^{n-2}\Rightarrow\cdots\Rightarrow y\leq x,\end{aligned}$$

矛盾. 因此 y 和 x 不可比较. 由假设存在 S 上的序关系 $\leq$ 的可消序扩张 $\leq^*$ 使得 $x<^* y$. 又由 $(\forall n\in Z^+)$ $y^n\leq x^n\Rightarrow y^n\leq^* x^n$, 类似于以上的证明过程, 我们有 $y\leq^* x$, 矛盾. □

推论 3.8 设 $(S,\cdot,\leq)$ 是可消可换的偏序半群, $\{a_i\}_{i=1}^n$ 是 S 的有限列. 则可将 $\leq$ 扩张为 $\leq^*$ 使得 $(S,\cdot,\leq^*)$ 是可换的偏序半群且 $a_1\leq^* a_2\leq^*\cdots\leq^* a_n$ 当且仅当对于任意给定的映射对 $\alpha,\sigma\in\mathrm{Map}(M,N)$, $\alpha(i)<\sigma(i)$, 如果存在 $x\in S$ 使得 $x(\prod_{i=1}^m a_{\sigma(i)})\leq x(\prod_{i=1}^m a_{\alpha(i)})$. 则 $a_{\sigma(i)}=a_{\alpha(i)},i\in M$.

证明 *必要性*. 由定理 3.1, 取 $x_0=x,\{x_i\}_{i=0}^m\subseteq S^1$, 对于任意给定的映射对 $\alpha,\sigma\in\mathrm{Map}(M,N)$, $\alpha(i)<\sigma(i)$, 如果存在 $x\in S$ 使得 $x(\prod_{i=1}^m a_{\sigma(i)})\leq x(\prod_{i=1}^m a_{\alpha(i)})$. 则

$$x(\prod_{i=1}^m a_{\sigma(i)})\leq^* x(\prod_{i=1}^m a_{\alpha(i)})\leq^* x(\prod_{i=1}^m a_{\sigma(i)})\Rightarrow\prod_{i=1}^m a_{\sigma(i)}=\prod_{i=1}^m a_{\alpha(i)}.$$

因为 S 是可消的, 如果 $a_{\alpha(i)}<^* a_{\sigma(i)}$, 则

$$\begin{aligned}(\prod_{i=1}^m a_{\alpha(i)})&<^* a_{\alpha(1)}\cdots a_{\alpha(i-1)}\cdot a_{\sigma(i)}\cdot a_{\sigma(i+1)}\cdots a_{\alpha(m)}\\&\leq^* a_{\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(i-1)}\cdot a_{\sigma(i)}\cdot a_{\sigma(i+1)}\cdots a_{\sigma(m)}\\&=\prod_{i=1}^m a_{\sigma(i)}.\end{aligned}$$

矛盾.

充分性. 设存在一个有限列 $\{x_i\}_{i=0}^m\subseteq S^1$ 和映射 $\alpha,\sigma\in Map(M,N)$ 使得 $\alpha(i)<\sigma(i)$, 且

$$x_0\leq x_1a_{\alpha(1)},x_1a_{\sigma(1)}\leq x_2a_{\alpha(2)},\cdots,x_ma_{\sigma(m)}\leq x_0,$$

则

$$x_0a_{\sigma(1)}\leq x_2a_{\alpha(1)}a_{\alpha(2)},\cdots,x_0a_{\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(m)}\leq x_0a_{\alpha(1)}\cdots a_{\alpha(m)}.$$

由假设 $a_{\alpha(i)} = a_{\sigma(i)}, i \in M$, 从而

$$x_0 \leq x_1 a_{\alpha(1)} \leq x_2 a_{\sigma(2)} \leq \cdots x_m a_{\alpha(m)} \leq x_0.$$

故 $x_0 = x_i a_{\alpha(i)} = x_i a_{\sigma(i)}, i = 1, 2, \cdots, m$. 根据定理 3.1, 存在 S 的扩张序关系 $\leq^*$ 使得 $(S, \cdot, \leq^*)$ 是可换的偏序半群且 $a_1 \leq^* a_2 \leq^* \cdots \leq^* a_n$. □

不同于群的情形, 除非要求 $\leq$ 是可消偏序的. 根据推论 3.5 的结果, 我们利用 Zorn 引理, 也许能将一个偏序结构扩张为 S 上的全序结构. 一般情况下使用以上技巧将一个偏序结构扩张为 S 上的全序结构的希望不大, 我们必须寻找另外新的途径.

参考文献:

[1] Dubreil-Jacotin. *Sur es O-Bands* [J]. Semigroup Forum, 1971, **3**: 156–159.
[2] FUCHS L. *Partially Ordered Algebraic Systems* [M]. Pergaman Aress, 1963.
[3] NAKADA O. *Partially ordered Ablian semigroups I* [J]. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1951, **11**: 181–189.
[4] NAKADA O. *Partially ordered Ablian semigroups II* [J]. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1952, **12**: 73–86.
[5] HOWIE J M.*An Introduction to Semigroup Theory* [M]. Acad. Press, London, 1976.
[6] XIE Xiang-yun. *Introduction to Ordered Semigroups* [M]. Beijing: Kexue Press, 2001. (in Chinese)
[7] HULIN A J.*Extensions of ordered semigroups* [J]. Semigroup Forum, 1971, **2**: 336–342.
[8] HULIN A J. Extensions of ordered semigroups [J]. Czech. Math. J., 1976, **26**: 1–12.
[9] EVERETT C J. *Note on a result of L.Fuchs on ordered groups* [J]. Amer. J. Math., 1950, **72**: 256.

On Extensions of Partial Orders of Commutative Partially Ordered Semigroups

XIE Xiang-yun
(Dept. of Math. & Phys., Wuyi University, Jiangmen 529020, China)

Abstract: Let $(S, \cdot, \leq)$ be a commutative partially ordered semigroup. Sufficient and necessary conditions for extending a partial order of S to another partial order satisfying some conditions are given. Specially, if $(S, \cdot, \leq)$ is a commutative cancellative partially ordered semigroup, the sufficient and necessary conditions such that every element of S belongs to positive cone are obtained. The cases when a partial order of S can be extended to another partial order such that some finite subsets of S form a chain are discussed.

Key words: partially ordered semigroup; partially ordered extension; cancellative partially order.