

一类非端点插值 B 样条曲线降阶的方法

曲荣宁^{1,2}, 王仁宏²

(1. 哈尔滨工业大学(威海) 数学系, 山东 威海 264209;

2. 大连理工大学数学科学研究所, 辽宁 大连 116024)

(E-mail: quyongning@yahoo.com.cn)

摘 要: 降阶算法是 B 样条曲线和曲面设计的一个基本算法, 它广泛应用于组合曲线、蒙皮或扫描曲面等设计中. Piegl 与 Tiller 曾给出 B 样条曲线的降阶方法. 本文给出了解决更一般的非端点插值 B 样条曲线降阶的方法. 新的方法主要是通过对现有的节点插入方法进行分析, 给出了一种端点插值递推公式, 并利用此公式对 Piegl 与 Tiller 降阶方法加以改进, 使之能够解决非端点插值均匀及非均匀 B 样条曲线的降阶问题.

关键词: B 样条曲线; Bézier 曲线; 降阶; 节点插入; 端点插值.

MSC(2000): 65D07

中图分类号: O241.5

1 引言

B 样条曲线曲面在计算机辅助设计 (CAD), 几何造型以及计算机辅助几何设计中占有重要的位置. 因此, B 样条曲线的降阶已成为计算机辅助几何设计中常用的关键技术之一, 也是 B 样条曲线和曲面造型的基础. 其重要性主要体现在以下三个方面: i) 降阶是构造蒙皮曲面和组合曲面的重要工具. 相邻曲面截面线的阶数一般是不同的, 在曲面设计的预处理过程中, 经常需要通过升降阶使之阶数一致; ii) 由于节约了存储空间, 降阶对于数据压缩也具有很重要的作用. 例如, 在工业产品的模型设计及仿制过程中, 对离散点数据进行逼近拟合时, 往往会产生高阶的曲线或曲面表示, 这就导致了大量几何数据信息的存储. 为了尽量减少信息数据的存储量, 需要对高次的曲线曲面进行降阶处理; iii) 降阶还经常用于曲线的光顺处理过程中.

B 样条曲线的降阶方法主要有: (i) Piegl, Tiller^[4] 的基于 Bézier 曲线降阶的方法; (ii) Wolters, Wu 和 Farin^[3] 的基于 B 样条曲线开花 (blossoming) 原理和最小二乘法的降阶算法. 此外, 秦开怀对 B 样条曲线升阶和降阶, 胡事民^[8] 等人对基于退化 B 样条曲线充要条件和约束优化的降阶算法等都作了很好的研究. 由于现有的方法主要是针对端点插值 B 样条曲线进行降阶, 所以对于非端点插值 B 样条曲线, 如均匀 B 样条曲线就会出错. 在所有的这些降阶方法中, Piegl 与 Tiller 方法的算法、程序均简单直观, 因此我们考虑对该方法进行改进, 本文将对 Piegl 与 Tiller 的 B 样条曲线降阶方法中的问题做进一步的讨论.

2 问题的提出

为了将 Piegl 等人的降阶方法推广到适用于非端点插值的 B 样条曲线, 首先须将非端点插值 B 样条曲线转化为端点插值 B 样条曲线. 本文根据 Boehm W^{[1],[2]}, 秦开怀^[6] 等人提出的节

收稿日期: 2003-06-20

基金项目: 国家自然科学基金 (19871010, 10271022)

点插入方法, 进一步分析并给出了一种新的多重节点插入的递推公式, 并用它来推广了 Piegl 与 Tiller 的 B 样条降阶方法.

3 多重节点插入及端点插值方法的引入

记一条分段连续的 k 阶 ($k-1$ 次) B 样条曲线为

$$C(t) = \sum_{j=0}^n V_j B_{j,k}(t),$$

其中 V_j 是控制顶点, $B_{j,k}(t)$ 是归一化的 B 样条基函数, 其节点矢量为

$$T = \{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k}\}, t_i \leq t_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n+k-1.$$

当我们在曲线定义域的某个节点区间插入节点 $\hat{t} \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$ l 次, 即插入重节点, 而该节点在原节点矢量 T 中又可能已经具有重复度 r , 即有 $\hat{t} = t_i = t_{i-1} = \dots = t_{i-r+1}$, 满足 $r+l \leq k$, 此时可以按以下三种情况分别得到新的节点矢量和控制顶点的递推公式:

(i) 当 $\hat{t} \in [t_i, t_{i+1}) \subset (t_{k-1}, t_{n+1})$ 时,

$$\begin{cases} V_j^0 = V_j, \quad T^0 = T, \\ V_j^s = \begin{cases} V_j^{s-1}, & j = 0, 1, \dots, i-k+s, \\ (1-\alpha_j^{s-1})V_{j-1}^{s-1} + \alpha_j^{s-1}V_j^{s-1}, & j = i-k+s+1, \dots, i+s-1, \\ V_{j-1}^{s-1}, & j = i+s, \dots, n+k+s-1, \end{cases} \\ T^{s-1} = \{t_0, t_1, \dots, t_{i-r+1}, \dots, t_i, \underbrace{\hat{t}, \dots, \hat{t}}_{s-1}, t_{i+1}, \dots, t_{n+k}\}; \end{cases} \quad (1)$$

(ii) 当 $\hat{t} = t_{k-1}$ 时,

$$\begin{cases} V_j^0 = V_j, \quad T^0 = T, \\ V_j^s = V_j^{s-1}, \quad j = k-1, k, \dots, n, \\ \begin{pmatrix} V_0^s \\ V_1^s \\ \vdots \\ V_{k-2}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0^{s-1} & \alpha_1^{s-1} & & 0 \\ & \beta_1^{s-1} & \alpha_2^{s-1} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_{k-2}^{s-1} & \alpha_{k-1}^{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0^{s-1} \\ V_1^{s-1} \\ \vdots \\ V_{k-1}^{s-1} \end{pmatrix}; \\ T^{s-1} = \{t_{s-1}, t_s, \dots, \underbrace{\hat{t}, \dots, \hat{t}}_{s-1}, t_{k-1}, \dots, t_{n+k}\} \end{cases} \quad (2)$$

(iii) 当 $\hat{t} = t_{n+1}$ 时,

$$\begin{cases} V_j^0 = V_j, \quad T^0 = T, \\ V_j^s = V_j^{s-1}, \quad j = 0, 1, \dots, n-k+1, \\ \begin{pmatrix} V_{n-k+2}^s \\ V_{n-k+3}^s \\ \vdots \\ V_n^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{n-k+1}^{s-1} & \alpha_{n-k+2}^{s-1} & & 0 \\ & \beta_{n-k+2}^{s-1} & \alpha_{n-k+3}^{s-1} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_{n-1}^{s-1} & \alpha_n^{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{n-k+1}^{s-1} \\ V_{n-k+2}^{s-1} \\ \vdots \\ V_n^{s-1} \end{pmatrix}; \\ T^{s-1} = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+1}, \underbrace{\hat{t}, \dots, \hat{t}}_{s-1}, \dots, t_{n+k-s+1}\} \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\alpha_j^{s-1} = \begin{cases} 0, & \hat{t} \leq t_j, \\ \frac{\hat{t}-t_j}{t_{j+k-1}-t_j}, & t_j \leq \hat{t} \leq t_{j+k-1}, \\ 1, & \hat{t} \geq t_{j+k-1}, \end{cases} \quad \beta_j^{s-1} = \begin{cases} 1, & \hat{t} \leq t_{j+1}, \\ \frac{t_{j+k}-\hat{t}}{t_{j+k}-t_{j+1}}, & t_{j+1} \leq \hat{t} \leq t_{j+k}, \\ 0, & \hat{t} \geq t_{j+k}. \end{cases}$$

定义在节点矢量 T^{s-1} 上, 且 T^{s-1} 总是按下标从 0 开始重新编号.

递推公式 (1) 考虑的是在内节点处进行插值的情况, 而公式 (2)、(3) 考虑的是在端点处进行插值的情况, 当运用 (2)、(3) 分别插入节点 t_{k-1} 和 t_{n+1} 至 k 次后, 样条曲线的顶点个数和节点个数均保持不变, 且新的节点矢量为

$$\hat{T} = \{\underbrace{t_{k-1}, \dots, t_{k-1}}_k, t_k, \dots, t_n, \underbrace{t_{n+1}, \dots, t_{n+1}}_k\},$$

此时原曲线成为端点插值曲线. 新的多重节点插入的递推公式可以很好的将一般的非端点插值 B 样条曲线转变为端点插值的 B 样条曲线, 从而克服了经典的端点插值 B 样条曲线降阶算法中的不足.

4 Piegl 与 Tiller 的降阶算法

经典的 Piegl 与 Tiller 的降阶算法只适用于对满足端点插值的 B 样条曲线进行降阶, 整个算法共分三步:

- (I) 分解 B 样条曲线为分段 Bézier 曲线, 即插入节点过程;
- (II) 对分段 Bézier 曲线进行降阶;
- (III) 去掉多余的节点.

在算法程序的实际操作中, 以上三步并不是顺序进行的, 具体的算法步骤为: 插入第一个内节点 $k-2$ 次后, 第一段曲线成为 Bézier 曲线段, 将其降阶, 再将第二个内节点插入 $k-2$ 次, 将第二段曲线降阶, 然后再去掉插入的 $k-2$ 个第一个内节点, 依次再对后面的内节点进行同样的操作, 最终得到新的控制顶点和节点矢量, 即可得到所求的 $k-1$ 阶 B 样条曲线. 本算法的特别之处在于: 插入节点的过程中插入的都是旧节点, 并且是在前内节点已被插满的情况下插入的, 所以比一般的节点插入要省掉许多存储和运算. 同样, 在去除节点时, 由于去掉的节点恰好就是插入的节点, 所以无需求中间过渡的控制点, 直接就可以得到所求控制点.

5 改进的非端点插值降阶算法

1) B 样条曲线的端点插值化: 首先利用公式 (2) 插入 t_{k-1} , 使之成为 k 重节点; 然后利用公式 (3) 插入 t_{n+1} , 使之成为 k 重节点.

2) 利用 Piegl 与 Tiller 降阶方法进行降阶.

误差说明: 由于改进是在 Piegl 与 Tiller 降阶方法之前对非端点插值曲线进行处理, 步骤 1) 只是为 Piegl 与 Tiller 降阶方法作了必要的准备, 且不存在误差, 因而改进后的非端点插值降阶算法的误差仍是由经典 Piegl 与 Tiller 降阶方法中的 (II) 对 Bézier 曲线进行降阶, (III) 去掉多余节点所产生的误差, 这在 Piegl 与 Tiller 1995 年的论文中有详细的介绍.

计算实例: 一条定义在节点矢量

$$T = \{0.0, 0.2, 0.4, 0.8, 1.0, 2.0, 2.0, 3.0, 3.6, 3.6, 4.0, 4.2\}$$

上的 4 阶 B 样条曲线, 这显然无法由 Piegl 与 Tiller 的降阶算法直接降阶, 其降阶过程如下:

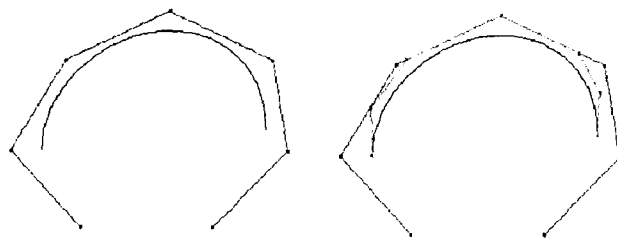


图 1 原始 B 样条曲线图像 图 2 端点插值算法得到的 B 样条曲线

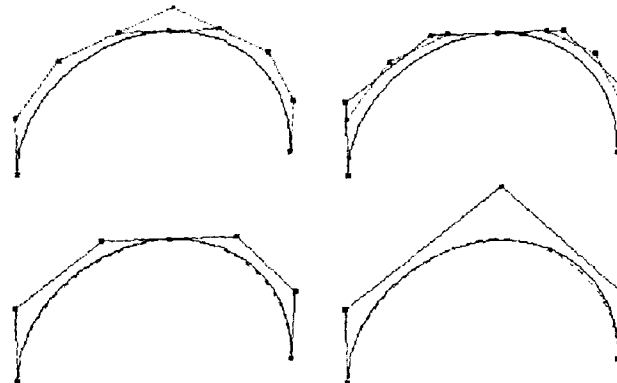


图 3 运用 Piegl,Tiller 降阶算法降阶

6 结 论

通过对现有的节点插入方法进行分析给出了一种新的多重节点插入的递推公式 (其特殊情况即端点插值递推公式), 并用它来推广 Piegl 与 Tiller 的 B 样条降阶方法, 新的 Piegl 与 Tiller 降阶算法能够很好地处理非端点插值的 B 样条曲线的降阶问题, 并为此类问题的解决提供了一种新的参考。

参考文献:

- [1] BOEHM W. *Inserting new knots into B-spline curve* [J]. *Comput. Aided Geom. Design*, 1980, 12(4): 199-201.
- [2] BOEHM W, PRAUTZSCH H. *The insertion algorithms* [J]. *Comput. Aided Geom. Design*, 1985, 17(2): 58-59.
- [3] WOLTERS H J, WU G, FARIN G. *Degree reduction of B-spline curves* [J]. *Comput. Suppl.*, 1998, 13: 235-241.
- [4] PIEGL L, TILLER W. *Algorithm for degree reduction of B-spline curves* [J]. *Comput. Aided Geom. Design*, 1995, 27(1): 101-110.
- [5] TILLER W. *Knot-removal algorithms for NURBS curves and surfaces* [J]. *Comput. Aided Geom. Design*, 1992, 24(8): 445-453.
- [6] 秦开怀. B 样条曲线的节点插入问题及两个新算法 [J]. *计算机学报*, 1997, 20(6): 556-561.
QIN Kai-huai. *Two algorithms for inserting knots into B-spline curves* [J]. *Chinese J. Comput.*, 1997, 20(6): 556-561. (in Chinese)
- [7] 施法中. *计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条* [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1994.
SHI Fa-zhong. *CAGD & NURBS* [M]. BeiHang University Press, 1994.

[8] 雍俊海, 胡事民, 孙家广. 均匀 B 样条曲线的降阶 [J]. 计算机学报, 2000, 5: 537-540.

YONG Jun-hai, HU Shi-min, SUN Jia-guang. Degree reduction of uniform B-spline curves [J]. Chinese J. Comput., 2000, 5: 537-540.

A Class of Degree Reduction Methods for B-Spline Curves

QU Rong-ning^{1,2}, WANG Ren-hong²

(1. Dept. of Math., Harbin Institute of Technology (Weihai), Shangdong 264209, China;

2. Dept. of Appl. Math., Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China)

Abstract: Degree reduction is a common technique in curve and surface design. It is frequently used in geometric design of the composite curves and the sweeping and skinning surfaces. There were some problems in the degree reduction by the Piegl and Tiller algorithm. In this paper, a class of new methods of knot insertion (include endpoint interpolating) is established. The methods can be used to all uniform and non-uniform curves.

Key words: B-spline curve; Bézier curve; degree reduction; knot insertion; endpoint interpolating.